УДК 330.46

О. М. Назаренко, Д. В. Фільченко
Сумський державний університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, ПРОГНОЗУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ІНВЕСТИЦІЙНОГО РОЗВИТКУ

Пропонується алгоритм специфікації та ідентифікації динамічної моделі інвестиційного розвитку, досліджуються її прогнозні властивості. Обґрунтовується перехід до статичної моделі оптимального розподілу інвестиційних потоків. Апробація моделей здійснюється на прикладі економіки Данії.

Вступ

Серед факторів, що визначають довгострокове макроекономічне зростання, останнім часом все більшу роль відіграють інвестиції в реальний капітал [12]. Особливо це стосується економік трансформаційного типу, для яких ін‘єкції в основні фонди є головним чинником модернізації та оновлення виробництва [6]. В [7] пропонується алгоритм ідентифікації функцій інвестицій та дефіциту платіжного балансу в динамічній моделі за допомогою економетричних методів. В [2, 9] розглядається параметрична задача оптимального управління зовнішнім боргом, в якій параметрами керування виступають інвестиційні потоки. Нелінійна модель статичної оптимізації виробництва інвестиційних товарів та їх питомого імпорту запропонована в [4]. Невирішеними в даній тематиці залишаються проблеми ідентифікації моделей інвестиційного розвитку, дослідження їхніх прогнозних та оптимізаційних можливостей.

Постановка задачі

Розглянемо n-галузеву макроекономічну систему відкритого типу. В якості фазових координат оберемо основні фонди $x_i(t)$ кожної з галузей ($i = 1, 2, \ldots, n$) та зовнішній борг держави $x_{n+1}(t)$ – неперервні функції часу. Параметрами керування $u_j(t)$ ($j = 1, 2, \ldots, l$) будемо вважати потоки інвестиційних та споживчих товарів. Тоді еволюція динамічної системи може бути описана наступною системою n+1 диференціальних рівнянь:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \tag{1}$$

де $\boldsymbol{f}(\cdots)$ – вектор функцій, неперервно-диференційованих на деякому проміжку $[t_0, T]$. Їхній вигляд підлягає специфікації та ідентифікації в залежності від фізичної сутності задачі і мети моделювання.

Система (1) також може досліджуватися в інтегральній формі

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)dt. \tag{2}$$

Оскільки за змістом, динаміка кожної з розглянутих величин пов‘язана з вливаннями в основні фонди, то системи (1) і (2) будуть базовими для подальшого дослідження, метою якого є вирішення наступних проблем.

1. Специфікація вектор-функції $\boldsymbol{f}(\cdots)$ систем (1) і (2) та ідентифікація її параметрів для побудови динамічних моделей інвестиційного розвитку, вивчення їхніх прогнозних властивостей.
2. Побудова моделі, що відповідає (1) і дозволяє проводити статичну оптимізацію структури вектора потоків $\boldsymbol{u}(t)$:

$$\max_{\boldsymbol{u}} F(\boldsymbol{u}) \text{ за умови, що } \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}) \le c. \tag{3}$$

Економетрична ідентифікація та дослідження прогнозних властивостей динамічної моделі інвестиційного розвитку

Специфікацію вектор-функції $\boldsymbol{f}(\cdots)$ моделей (1) і (2) будемо проводити, виходячи з наступних міркувань. Швидкість зміни dx_i/dt основних фондів i-ої галузі економіки відображає величину чистих інвестицій в цю галузь, а dx_{n+1}/dt характеризує валовий приріст зовнішнього боргу [10]. Тоді, з міркувань економічної теорії, будемо припускати, що праві частини системи (1) можуть бути представлені як долі $u_i(t)$ ВВП Y країни:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u}(t)Y. \tag{4}$$

ВВП у даному випадку є екзогенним параметром, але подання Y в якості виробничої функції дозволяє не лише замкнути модель (1) або (2), але й дослідити властивості інвестиційного клімату макроекономічної системи. Спробуємо специфікувати функцію Y за допомогою двох факторів – сумарного значення основних фондів $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ та зовнішнього боргу x_{n+1}, використовуючи лінійну логарифмічну функціональну форму

$$\ln Y = a_0 + a_1 \ln \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \ln x_{n+1}. \tag{5}$$

Форма (5) обрана тому, що її коефіцієнти a_0, a_1, a_2 є зручними для дослідження зв‘язку між показником і факторами та для вивчення ефекту від масштабу виробництва.

Функції $u_i(t)$ будемо шукати у вигляді поліномів:

$$u_i(t) = b_{i0} + b_{i1}t + b_{i2}t^2 + \ldots + b_{ik_i}t^{k_i}, \; i = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{6}$$

степені k_i яких встановлюються експериментально, використовуючи критерій, що буде описаний нижче. Функція $u_i(t)$ є показником інвестиційної активності в i-й галузі ($i = 1, 2, \ldots, n$). Що стосується функції $u_{n+1}(t)$, то вона виступає в якості степеня незбалансованості імпортних та експортних потоків.

Застосування економетричних методів ідентифікації [1] вимагає дискретизації моделей (1) і (2). Для цього проміжок часу $[t_0, T]$ розіб‘ємо на N–1 інтервалів одиничної довжини (N – число моментів часу, в яких наявна статистична інформація по фазовим координатам та ВВП). Тоді система (1), (4) може бути подана різницевою схемою:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + b_{i0}Y\big|_t + b_{i1}tY\big|_t + \ldots + b_{ik_i}t^{k_i}Y\big|_t + \varepsilon_{k_i}(t), \tag{7}$$

а система (2), (4) – інтегральною схемою:

$$x_i(t+1) = x_i^* + b_{i0}\sum_{j=0}^{t} Y\big|_j + b_{i1}\sum_{j=0}^{t} jY\big|_j + \ldots + b_{ik_i}\sum_{j=0}^{t} j^{k_i}Y\big|_j + \nu_{k_i}(t), \tag{8}$$

де $i = 1, 2, \ldots, n+1$; $t = 0, 1, \ldots, N-1$; x_i^* – вільний член; $\varepsilon_{k_i}(t)$ та $\nu_{k_i}(t)$ – випадкові збурення моделей (7) та (8) відповідно.

У загальному вигляді економетричні моделі (7) та (8) можуть бути записані наступним чином:

$$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{c}_i, \; i = 1, 2, \ldots, n+1,$$

де $\boldsymbol{b}_i = (x_i^*, b_{i0}, b_{i1}, \ldots, b_{ik})^{/}$ — вектор невідомих коефіцієнтів, $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ — вектор випадкових збурень, а матриця $\boldsymbol{A}_i$ і вектор $\boldsymbol{c}_i$ мають вигляд: для різницевої схеми (7)

$$\boldsymbol{A}_i = \begin{pmatrix} Y\big|_{t=0} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ Y\big|_{t=1} & Y\big|_{t=0} \ldots & \ldots\ldots & Y\big|_{t=0} \\ Y\big|_{t=2} & 2Y\big|_{t=2} & \ldots\ldots & 2^{k_i}Y\big|_{t=2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Y\big|_{t=N-1} & (N-1)Y\big|_{t=N-1} & \ldots\ldots & (N-1)^{k_i}Y\big|_{t=N-1} \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{c}_i = \begin{pmatrix} x_i(1) - x_i(0) \\ x_i(2) - x_i(1) \\ x_i(3) - x_i(2) \\ \ldots\ldots \\ x_i(N-1) - x_i(N-2) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

а для інтегральної схеми (8)

$$\boldsymbol{A}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & Y\big|_{t=0} & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \sum\limits_{t=0}^{1} Y\big|_t & \sum\limits_{t=0}^{1} tY\big|_t & \ldots & \sum\limits_{t=0}^{1} t^{k_i}Y\big|_t \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \sum\limits_{t=0}^{N-2} Y\big|_t & \sum\limits_{t=0}^{N-2} tY\big|_t & \ldots & \sum\limits_{t=0}^{N-2} t^{k_i}Y\big|_t \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{c}_i = \begin{pmatrix} x_i(0) \\ x_i(1) \\ x_i(2) \\ \ldots\ldots \\ x_i(N-1) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Тоді МНК-оцінки $\hat{\boldsymbol{b}}_i$ вектора невідомих коефіцієнтів $\boldsymbol{b}_i$ можуть бути знайдені за формулою [8]

$$\hat{\boldsymbol{b}}_i = (\boldsymbol{A}_i^{/}\boldsymbol{A}_i)^{-1}\boldsymbol{A}_i^{/}\boldsymbol{c}_i. \tag{11}$$

Критерій визначення оптимальних степенів k_i поліномів (6) логічно пов‘язати з умовою знаходження максимально точних прогнозних значень досліджуваної величини. Довірчий інтервал для прогнозного значення фазової координати $x_i(N)$ розраховується за наступною формулою [5]:

$$\hat{x}_i(N) - \delta\, t_\alpha < x_i(N) < \hat{x}_i(N) + \delta\, t_\alpha, \; \delta = \sqrt{\hat{\sigma}_u^2(1 + \boldsymbol{a}_N(\boldsymbol{A}_i^{/}\boldsymbol{A}_i)^{-1}\boldsymbol{a}_N^{/})}. \tag{12}$$

Тут $\hat{x}_i(N)$ – точковий прогноз; t_α – двосторонній квантіль розподілу Стьюдента з числом степенів вільності N–k_i–1 та рівнем значущості α; δ – стандартна помилка прогнозу; $\hat{\sigma}_u^2$ – оцінка дисперсії залишкового члена регресії, $\boldsymbol{a}_N$ – вектор пояснюючих змінних в момент часу N, $\boldsymbol{A}_i$ – матриця пояснюючих змінних в моменти часу 0, 1, …, N-1. Чим менше значення стандартної помилки прогнозу, тим вужче довірчий інтервал для точкового прогнозу, а значить, вищі й прогнозні властивості моделі.

Апробацію запропонованого алгоритму ідентифікації економетричних моделей (7) та (8) будемо здійснювати на прикладі двогалузевої ($n = 2$) макроекономічної системи відкритого типу, в якості якої обрано економіку Данії в період 1966-1997 рр. ($N = 32$). Всі статистичні дані наявні на офіційному серверу статистики Данії [13] та Організації економічного співробітництва та розвитку [14].

Умовно розділимо економіку Данії на промислово-сільськогосподарську галузь та галузь послуг. До першої будемо відносити переробну промисловість, електроенергетику, газо- та водопостачання, сільське господарство, а до сфери послуг – готельно-ресторанний бізнес, транспорт, зв‘язок, телекомунікації, тощо.

Перш за все, ідентифікуємо функцію ВВП країни $Y(\cdot\cdot)$. Метод найменших квадратів оцінювання невідомих параметрів моделі (5) дає наступні результати:

$$\underset{(\text{s.e.})}{\ln Y} = \underset{(0.3195)}{0.3859} + \underset{(0.0521)}{0.8145}\ln(x_1 + x_2) + \underset{(0.0503)}{0.1120}\ln x_3,\ R^2 = 0.9968, \qquad (13)$$

де в дужках наведені стандартні помилки кожного з коефіцієнтів регресії. Експонуючи (13), знаходимо $Y(\cdot\cdot)$ як функцію типу Кобба-Дугласа:

$$Y = 1.4710\,(x_1 + x_2)^{0.8145} x_3^{\ 0.1120}. \qquad (14)$$

Використовуючи критерій Стьюдента [8], знаходимо, що всі коефіцієнти в (13), окрім $\ln a_0$, виявляються статистично значущими. Така ситуація є доволі розповсюдженою при використанні функцій типу (5) для регресійного аналізу [11], адже за змістом лінійної логарифмічної форми регресія природно може проходити через початок координат.

Економічний аналіз (14) показує, що на даних факторах економіка Данії характеризується повільно спадаючим доходом від масштабу виробництва (a_1+a_2 = 0.9265), а вплив зовнішнього боргу на ВВП країни хоча й присутній, проте не має домінуючого значення. Високе значення коефіцієнта детермінації R^2 дозволяє використовувати функцію (14) для подальшого дослідження економіки Данії.

Із (9)-(11) знайдемо МНК-оцінки коефіцієнтів поліномів (6) для факторів x_1 та x_2 моделей (7) та (8) за умови мінімуму стандартної помилки прогнозу (12). За розрахунками для різницевої схеми функції керування приймають наступний вигляд (рис. 1):

$$\underset{(\text{s.e})}{u_1}(t) = \underset{(0.0118)}{0.1469} - \underset{(0.0005)}{0.0037}\,t,\quad \underset{(\text{s.e.})}{u_2}(t) = \underset{(0.0448)}{0.221964} - \underset{(0.0043)}{0.006613}\,t + \underset{(0.0001)}{0.000042}\,t^2, \qquad (15)$$

а для інтегральної схеми (рис. 2) –

$$\underset{(\text{s.e.})}{u_1}(t) = \underset{(0.0033)}{0.1543} - \underset{(0.0002)}{0.0041}\,t,\quad \underset{(\text{s.e.})}{u_2}(t) = \underset{(0.0054)}{0.2239} - \underset{(0.0003)}{0.0057}\,t. \qquad (16)$$

Всі коефіцієнти, крім останніх двох для $u_2(t)$ в (15) є статистично значущими. Врахування незначущих коефіцієнтів в (15) допомагає забезпечити високу точність апроксимації змінних x_1 та x_2. Так, для інтегральної схеми (8) коефіцієнти детермінації R^2 дорівнюють 0.9986 та 0.9982 а для різницевої схеми (7) – 0.9979 та 0.9966.

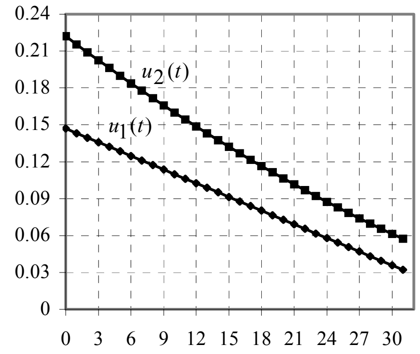


Рис.1. Графіки функцій керування за різницевою схемою

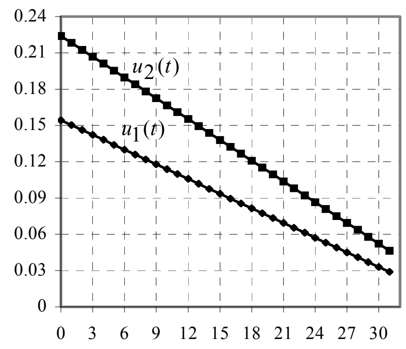


Рис.2. Графіки функцій керування за інтегральною схемою

Як бачимо, інвестиційна активність $u_2(t)$ у галузі послуг перевищує інвестиційну активність $u_1(t)$ у промислово-сільськогосподарській галузі і, маючи домінуюче значення, в більшій мірі сприяє модернізації економіки країни. Також треба відзначити майже синхронне спадання цього показника для обох галузей, що може свідчити про відсутність дисбалансів в економіці Данії і про певне інвестиційне насичення галузей.

Тепер наведемо результати дослідження прогнозних властивостей моделей (7), (8). Інтервальні прогнози для величин основних фондів x_1 і x_2, обчислені за формулою (12) при знайдених функціях керування, дорівнюють: $1197674.539 \pm 20073.928$ і $1800344.834 \pm 36369.454$ для різницевої схеми (7) та $11883527.018 \pm 34599.568$ і $1764626.422 \pm 56578.455$ для інтегральної схеми (8). Як бачимо, довірчі інтервали для прогнозів за різницевою схемою вужчі: у відсотках від точкового прогнозу 1.68% і 2.02% проти 2.92% і 3.21%. Отже, як показують розрахунки, різницева схема (7) на даних економіки Данії має кращі прогнозні властивості. Однак інтегральна схема (8) має кращі імітаційні властивості.

Оптимальний розподіл інвестиційних потоків в *n*-галузевій макроекономічній системі відкритого типу

Більш детально специфікуємо праві частини системи (1) – функції чистих інвестицій для перших n рівнянь та функцію валового росту зовнішнього боргу для (n+1)-го рівняння. Чисті інвестиції, за визначенням, є та частина валових інвестицій $g_i(\cdot)$ в i-ту галузь ($i = 1, 2, \dots, n$), яка залишається після заміни амортизованого капіталу $\mu_i(x_i(t),\ t)$. Функція валового росту зовнішнього боргу складається з функції його чистого росту $g_{n+1}(\cdot)$ та функції його обслуговування $\mu_{n+1}(x_{n+1}(t), t)$. Функції $g_i(\cdot)$ ($i = 1, 2, \ldots, n+1$) залежать від потоків $u_j(t)$ ($j = 1, 2, ..., l$) інвестиційного та споживчого характеру. Якщо координати вектор-функції $\boldsymbol{g}(\cdot)$ можуть бути представлені як лінійні комбінації координат вектора $\boldsymbol{u}(t)$ в момент часу t, то, враховуючи зазначені відмінності в специфікації правих частин рівнянь системи (1), приходимо до наступної динамічної моделі:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}(t), t) + \boldsymbol{\Lambda}(t)\boldsymbol{u}(t), \qquad (17)$$

де $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ – матриця вагових коефіцієнтів розмірності $(n+1)\times l$.

Дискретний аналог системи (17) має вигляд:

$$\boldsymbol{\Lambda}(t)\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{b}(t),\ \ \boldsymbol{b}(t) = -\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}(t), t) + \boldsymbol{x}(t+1) - \boldsymbol{x}(t),\ \ t = 0, 1, \ldots, N-1. \qquad (18)$$

Якщо для кожної i-ої галузі економіки за проміжок часу $0 \le t \le N-1$ є статистичні дані по основним фондам $x_i(t)$ та функції амортизації $\mu_i(x_i(t), t)$, а також по зовнішньому боргу $x_{n+1}(t)$ і функції його обслуговування $\mu_{n+1}(x_{n+1}(t), t)$, то (18) є неоднорідною системою лінійних рівнянь відносно змінних керування $u_j(t)$ ($j = 1, 2, ..., l$). Система (18) має $l-n-1$ степенів вільності, що можуть використовуватися для забезпечення ефективності структури вектора $\boldsymbol{u}(t)$. Координати вектора $\boldsymbol{u}(t)$ завжди можна перенумерувати так, щоб перші $l-n-1$ змінних були вільними, а решта $n+1$ – базовими. Тоді базові змінні можна виразити через вільні:

$$\boldsymbol{u}^{\mathbf{2}}(t) = (\boldsymbol{\Lambda}^{\mathbf{2}}(t))^{-1}\cdot(\boldsymbol{b}(t) - \boldsymbol{\Lambda}^{\mathbf{1}}(t)\boldsymbol{u}^{\mathbf{1}}(t)), \qquad (19)$$

де $\boldsymbol{u}^{\mathbf{1}}(t)$ – вектор вільних змінних, а $\boldsymbol{u}^{\mathbf{2}}(t)$ – вектор базових змінних, розмірність матриці $\boldsymbol{\Lambda}^{\mathbf{1}}(t)$ – $(n+1) \times (l-n-1)$, а $\boldsymbol{\Lambda}^{\mathbf{2}}(t)$ – $(n+1) \times (n+1)$.

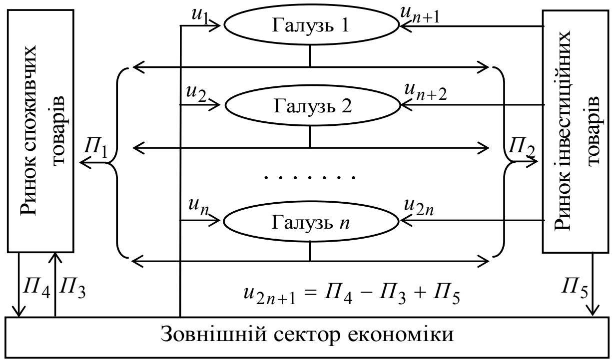


Рис. 3. Схема грошових та товарних потоків *n*-галузевої макроекономічної системи відкритого типу

Розглянемо один із можливих варіантів ідентифікації матриці $\boldsymbol{\Lambda}(t)$. На рис. 3 зображена макроекономічна система, кожна з n галузей якої виробляє продукти для ринку кінцевого споживання (потік $П_1$) та для інвестиційного ринку (потік $П_2$), сума яких складає ВВП країни $Y(t)$. Всі товари можуть експортуватися за кордон (сума потоків $П_4$ і $П_5$). Споживчі та інвестиційні товари також надходять ззовні у вигляді імпорту іноземних споживчих товарів (потік $П_3$) та іноземних інвестицій відповідно. Нехай вектор $\boldsymbol{u}(t)$ має такі координати: $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)$ – іноземні інвестиції в кожну з галузей, $u_{n+1}(t), u_{n+2}(t), \ldots, u_{2n}(t)$ – внутрішні інвестиції в кожну з галузей, u_{2n+1} – сума чистого експорту та інвестицій за кордон.

Отже, в даному випадку $l = 2n+1$ і система (18) має n степенів вільності. Тоді матрицю $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ можна ідентифікувати наступним чином [3]:

$$\boldsymbol{\Lambda}(t) = (\boldsymbol{\Lambda}^{\mathbf{1}}(t), \boldsymbol{\Lambda}^{\mathbf{2}}(t)), \quad \boldsymbol{\Lambda}^{\mathbf{1}}(t) = \underset{n}{\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ -- \\ \boldsymbol{i} \end{pmatrix}}\begin{matrix} {\scriptstyle n} \\ \\ {\scriptstyle 1} \end{matrix},\ \ \boldsymbol{\Lambda}^{\mathbf{2}}(t) = \underset{(n+1)\times(n+1)}{\boldsymbol{I}}, \qquad (20)$$

де $\boldsymbol{I}$ – одинична матриця, $\boldsymbol{i}$ – вектор одиниць вказаних розмірностей.

Використовуючи формули (18)-(20) в кожний момент часу, можна ставити статичні задачі оптимізації координат вектора іноземних інвестицій $\boldsymbol{u}^{\mathbf{1}}(t)$. Специфікацію цільової функції F, вектор-функції обмежень $\boldsymbol{h}(\cdot)$ та стовпця $\boldsymbol{c}$ в (3) будемо проводити з позицій статичної теорії ігор.

Поглянемо на процес інвестиційного розвитку економічної системи як на процес взаємодії двох агрегованих учасників: реципієнта, або одержувача інвестицій (національної економіки), та іноземного інвестора. Нехай реципієнт має n чистих стратегій – віддавати абсолютний пріоритет i-й галузі ($i = 1, 2, \ldots, n$), а інвестор, в свою чергу, може обирати між $(n+1)$-ю чистими стратегіями – спеціалізуватися на i-й галузі або ж диверсифіковувати інвестиції, залучаючи їх в кожну галузь економіки. Якщо стратегії реципієнта та інвестора не співпадають для жодної з галузей, виграші обох природно будуть дорівнювати нулю. Якщо ж обрані стратегії відображають спільний інтерес гравців, то виграш реципієнта буде дорівнювати залученим інвестиціям в i-у галузь в момент часу t, а виграш інвестора – сумі прибутків, які він може отримати від інвестування протягом кількох наступних періодів (до деякого кінцевого моменту часу). Ці два виграші розділені в часі, тому логічно виграш інвестора дисконтувати до моменту t, використовуючи величину чистого теперішнього значення (*NPV*). Гра реципієнта та інвестора в чистих стратегіях є матричною грою з ненульовою сумою (рис. 4).

Стратегії інвестора

Стратегії реципієнта	Спеціалізація на галузі 1	Спеціалізація на галузі 2	. . .	Спеціалізація на галузі n	Диверсифікація
Абсолютний пріоритет галузі 1	I_1, $NPV(I_1)$	0, 0	· · ·	0, 0	u_1, $NPV(u_1)$
Абсолютний пріоритет галузі 2	0, 0	I_2, $NPV(I_2)$	· · ·	0, 0	u_2, $NPV(u_2)$
. . . .	. . . .	. . . .	· · ·	. . . .	. . . .
Абсолютний пріоритет галузі n	0, 0	0, 0	· · ·	I_n, $NPV(I_n)$	u_n, $NPV(u_n)$

Рис. 4. Платіжна матриця гри між реципієнтом та інвестором

Розглянемо випадок, коли реципієнт використовує змішану стратегію. Нехай свою i-у чисту стратегію реципієнт обирає з ймовірністю p_i ($p_1 + p_2 + \ldots p_n = 1$). Тоді виграш реципієнта вже є не окремим елементом платіжної матриці, а зваженим середнім значень її елементів. Тому очікуваний виграш (математичне сподівання виграшу) реципієнта, припускаючи, що він використовує вектор ймовірностей $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, а інвестор застосовує стратегію диверсифікації, дорівнює $\boldsymbol{pu^1}$. Тому логічно в якості цільової функції моделі (3) обрати наступну:

$$\max F(\boldsymbol{u}^1) = \boldsymbol{pu}^1. \tag{21}$$

Що стосується системи обмежень, то приведемо два з можливих обмежень на інструментальні змінні $\boldsymbol{u}^1$. Перше випливає з того, що сумарна величина іноземних інвестицій не може перевищувати деякого значення M, критичного для економіки або стратегії розвитку:

$$\sum_{j=1}^{n} u_j \le M \;. \tag{22}$$

Для того, щоб записати друге обмеження, введемо наступні позначення. Нехай $k(t)$ – коефіцієнт, що показує, яка частка споживчих товарів національного виробництва повинна за будь-яких умов залишатися для внутрішнього споживання; $k_i(t)$ – частка інвестицій $u_{n+i}(t)$ внутрішнього походження в i-у галузь, яка за будь-яких умов повинна йти на внутрішній розвиток. Враховуючи (19),(20), отримаємо наступне обмеження.

$$\sum_{i=1}^{n}(1+k-k_i)u_i \le (1-k)Y + \sum_{i=1}^{n+1}(k-k_i)b_i \;. \tag{23}$$

Отже, при використанні змішаної стратегії реципієнт в кожний момент часу постає перед задачею лінійного програмування (21)-(23). Множина альтернативних розв‘язків перетинає осі n-мірної системи координат в точках $I_1, I_2, \ldots, I_n$, що відповідають випадку, коли реципієнт діє за абсолютними стратегіями. Умовою вибору реципієнтом змішаної стратегії є:

$$(\boldsymbol{pu^1} > p_1 I_1) \vee (\boldsymbol{pu^1} > p_2 I_2) \vee \ldots \vee (\boldsymbol{pu^1} > p_n I_n). \tag{24}$$

Розглянемо оптимальний розподіл інвестицій на прикладі двогалузевої моделі економіки Данії в період 1966-1997 рр. Аналіз статистичних даних показує, що параметри $k(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ можна вважати сталими величинами, рівними 0.93, 0.98 та 0.80 відповідно. Одразу звернемо увагу на значну різницю між частиною інвестиційних товарів промислово-сільсько-господарської галузі, що йдуть за кордон (2%), і аналогічним показником для галузі послуг (20%). Це свідчить про більшу розвиненість саме останньої, що, до речі, й знайшло підтвердження в даній роботі.

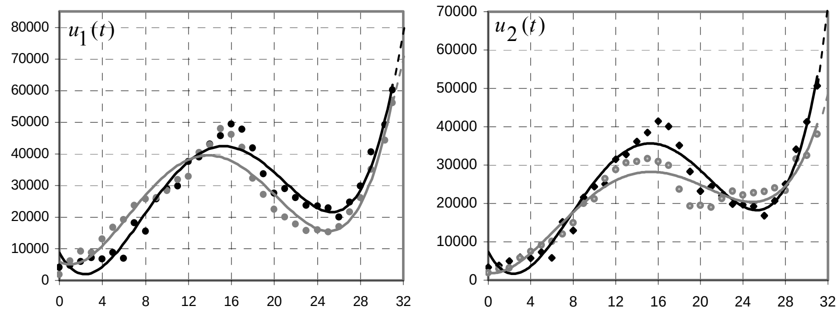
Для двох степенів вільності при $k_1 > k_2$ умови (24) набувають вигляду:

$$(I_2 < M = I_1 < I_1^{/}) \vee (1 < p_2/p_1 < I_1^{/}/I_2),$$

де $I_1^{/}$ таке значення u_1, яке отримується з (23) при $u_2 = 0$.

Згідно цих умов пріоритети p_1 та p_2 інвестиційного розвитку галузей повинні бути обрані на рівні 0.44 та 0,56 відповідно. Тоді модель (21)-(23) дає оптимальний розподіл іноземних інвестицій для галузі 1 (рис. 5а) та галузі 2 (рис. 5б). Тут точками зображені значення реальних та оптимальних потоків інвестицій в моменти часу $t = \overline{0,31}$.

Особливо цікавим видається проміжок часу з 1983 по 1989 рр. ($t = \overline{17,23}$), коли економіка Данії переживала кризу зовнішнього боргу, яка співпала з загальноекономічним спадом. Оптимальний розподіл іноземних інвестицій міг би стати своєрідним стабілізатором, що підтримав би економічну систему в ситуації несприятливої зовнішньої кон‘юнктури.



функція регресії для реальних значень інвестиційних потоків, тис. DKK

функція регресії для оптимальних значень інвестиційних потоків. тис. DKK

а) б)

Рис. 5 Оптимальний та реальний розподіли іноземних інвестицій для економіки Данії

Проведений аналіз реальних та оптимальних значень інвестицій в кожну з галузей економіки є ретроспективним. Проте, більш актуальною видається проблема оптимального планування розподілу інвестиційних ресурсів в прогнозний період. Для цього побудуємо часові тренди оптимального ($\hat{u}_1^*$, $\hat{u}_2^*$) і реального ($\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$) розподілу інвестицій за 1966-1997 рр. та знайдемо відповідні прогнозні значення на 1998 р. (t = 32). Обираючи поліноміальну функцію регресії, методом найменших квадратів отримуємо наступні часові тренди (рис. 5).

$$\hat{u}_1{}^*(t) = 1.70t^4 - 97.22t^3 + 1639.96t^2 - 6208.48t + 8758.67, \quad R^2 = 0.95;$$
$$\hat{u}_1(t) = 1.41t^4 - 73.84t^3 + 1086.26t^2 - 2013.09t + 6037.72, \quad R^2 = 0.92;$$
$$\hat{u}_2{}^*(t) = 1.44t^4 - 82.64t^3 + 1392.64t^2 - 5288.82t + 7426.48, \quad R^2 = 0.95;$$
$$\hat{u}_2(t) = 0.69t^4 - 37.06t^3 + 540.04t^2 - 319.32t + 1861.06, \quad R^2 = 0.92.$$

Той факт, що значення коефіцієнтів детермінації R^2 для оптимальних траєкторій вищі відповідних значень R^2 для реальних траєкторій, вказує на більшу стабільність економічного розвитку при оптимальному розподілі інвестицій.

Екстраполяція виявлених тенденцій дає результати, показані пунктирними лініями на рис. 5. Оптимальний план інвестування на 1998 р. пропонує проводити більш відкриту політику залучення іноземних інвестицій в кожну з галузей, особливо в галузь послуг. Хоча остання виявляється більш розвиненою і пріоритетною, іноземні інвестиції більшою мірою залучаються в промислово-сільськогосподарську галузь. Разом із тим інвестиційні товари галузі послуг більше затребувані закордоном. Це свідчить про те, що галузь послуг є більш самодостатньою в плані інвестиційного розвитку, але й більш залежною від зовнішніх впливів.

Висновки

На прикладі інвестиційного розвитку макроекономічної системи були розроблені та апробовані два алгоритми ідентифікації динамічних моделей – за різницевою та інтегральною схемами, що базуються на економетричних методах. Перший виявився більш придатним для прогнозування фазових координат, а другий — для імітації. Присутність деякого числа степенів вільності в моделях еволюції дозволила досліджувати статичні ситуації, коли за наявності деякого критерію та обмежень на інструментальні зміні можна будувати та розв‘язувати різні задачі математичного програмування. Результати, апробовані на прикладі економіки Данії, співпали з реальними тенденціями і особливостями розвитку країни в досліджуваний період часу.

Бібліографічні посилання

1. **Васильєв А.А.**, **Назаренко А.М**. Дискретизация и численная идентификация дифференциально-игровых моделей макроэкономической динамики // Вісник Харк. нац. ун-та., – 2006. – №733. Сер. „Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління”, вип. 6. – С. 35-47.
2. **Дикусар В.В.**, **Синягин С.Ю.** Качественные и численные методы в задаче оптимального управления внешним долгом: Сообщ. по прикл. матем./ ВЦ РАН.– М., 2000.
3. **Интриллигатор М.** Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975.
4. **Колемаев В.А.** Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем. – М.: Юнити, 2005.
5. **Магнус Я.Р.**, **Катышев П.К.**, **Пересецкий А.А.** Эконометрика. Начальный курс. — М.: Дело, 1997.
6. **Михалевич М.В.**, **Сергиенко И.В.**, **Кошлай Л.Б.** Моделирование внешнеэкономической деятельности в условиях переходной экономики // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – №4 – С.61-78.
7. **Назаренко О.М.** Динамічне моделювання інвестиційного розвитку та оптимальної макроекономічної інвестиційної політики // Механизм регулирования экономики. – 2006. – №4. – С. 51-60.
8. **Назаренко О. М.** Основи економетрики: Підручник. – Київ: „Центр навчальної літератури”, 2004.
9. **Чекарев Д.А.** Модель экономической системы с эффектом накопления в задаче оптимального управления внешним долгом // Моделирование и обработка информации: Сб.ст. / Моск. физ.-тех. институт. – М., 2003. – С. 39-43.
10. **Шевчук В.О.** Міжнародна економіка: теорія і практика. – Львів: Каменяр, 2003.
11. **Greene W.H.** Econometric analysis. Fifth Edition. – New Jersey: Prentice Hall Upper Saddle River, 2003.
12. **Romer, D.** Advanced Macroeconomics. – McGraw-Hill, 1996.
13. Denmark Statistics: http://www.dst.dk.
14. OECD, Statistic database: http://www.oecd.org.

Надійшла до редколегії