

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра прикладної математики та моделювання складних систем

Допущено до захисту

Завідувач кафедри ПМ та МСС

Коплик І.В.

«__» _____ 2021 р.

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття освітнього ступеня «бакалавр»

спеціальність 113 «Прикладна математика»

освітньо-професійна програма «Прикладна математика»

тема роботи **«АНАЛІЗ ПОХИБОК МСР ТА МСЕ ПРИ РОЗВ'ЯЗКУ
ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ»**

Виконавець

студент факультету ЕлІТ

Федорченко Сергій Сергійович

Науковий керівник

доцент, кандидат тех. наук

Маслов Олександр Петрович

Суми – 2021 р

СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет	електроніки та інформаційних технологій	
Кафедра	прикладної математики та моделювання складних систем	
Рівень вищої освіти	бакалавр	
Галузь знань	11 Математика та статистика	
Спеціальність	113 Прикладна математика	
Освітня програма	освітньо-професійна	«Прикладна математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри ПМ та МСС

Коплик І.В. _____

« ___ » _____ 2021 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ ЗДОБУВАЧУ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Федорченка Сергія Сергійовича

1. Тема роботи Аналіз похибок МСР та МСЕ при розв'язку диференційних рівнянь в частинних похідних
Керівник роботи Маслов О. П., доцент, канд.тех.наук
затверджено наказом по факультету ЕЛІТ від «14» квітня 2021 р. № 0180-VI
2. Термін подання роботи студентом «25» травня 2021р.
3. Вихідні данні до роботи 1) Крайові задачі гіперболічного типу; 2) Метод скінчених різниць (МСР), метод скінчених елементів (МСЕ) 3) Теоретичні оцінки похибок наближених методів.
4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, що їй належить розробити)
 - 1) Аналіз теоретичних оцінок похибок наближених методів;
 - 2) Побудова скінчено різницевої схем і базисних функцій МСЕ;
 - 3) Чисельний аналіз похибок МСР і МСЕ для задач еліптичного і гіперболічного типів. Написання програм чисельних розрахунків.
5. Перелік графічного матеріалу
 - 1) Графіки точних і наближених розв'язків задач, які розв'язувалися;

6. Консультанти до проекту (роботи), із значенням розділів проекту, що стосується їх

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		Завдання видав	Завдання прийняв

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ п/п	Найменування роботи, заходи	Термін виконання	Примітка
1	Провести аналіз теоретичних результатів. Розробити методику дослідження методів.	03.05 - 11.05	Виконано
2	Написати і відладати програми розв'язку задач.	11.05 - 15.05	Виконано
3	Отримати результати чисельного експерименту при різних параметрах розрахункових схем.	15.05 – 20.05	Виконано
4	Дослідити поведінку чисельно отриманої похибки .	17.05 - 21.05	Виконано
5	Оформлення роботи.	21.05 - 25.05	Виконано

Здобувач вищої освіти

Федорченко С.С.

Керівник роботи

Маслов О.П.

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота: 70 с., 3 рисунка, 3 таблиці, 14 джерел.

Мета роботи: дослідження похибок МСР і МСЕ при порівнянні отриманих наближень шуканої функції і її похідних з точними значеннями.

Об'єкт дослідження: похибки МСР та МСЕ при наближеному розв'язку різного типу крайових задач з однаковою розмірністю СЛАР.

Результати: у проведених дослідженнях при наближеному розв'язку задач еліптичного і гіперболічного типів з'ясовано, що в задачах еліптичного типу похибка МСЕ з мультиплікативними базисними функціями на декілька порядків менша, ніж для МСР.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ПОХИБКИ, МЕТОД СКІНЧЕНИХ РІЗНИЦЬ, МЕТОД СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ. ВАРІАЦІЙНИЙ ПРОЦЕС, БАГАТОТОЧКОВА ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА.

ЗМІСТ	
ВСТУП	7
РОЗДІЛ 1	9
ПОХИБКИ НАБЛИЖЕНИХ МЕТОДІВ	9
1.1. Можливі похибки при наближених розв’язках	9
1.1.1 Джерела похибок	9
1.1.2 Джерела похибок	10
1.1.3 Метод Бубнова-Галеркіна	11
1.1.4 Різницеві методи	12
1.2. Теоретичні оцінки деяких похибок	13
1.2.1 Стійкість процесу Рітца	13
1.2.2 Стійкість процесу Бубнова-Галеркіна	15
1.2.3 Похибки складання систем методами Рітца та Бубнова-Галеркіна	16
РОЗДІЛ 2	18
ПОХИБКИ МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ	18
2.1 Похибки апроксимації та викривлення у МСЕ	18
2.1.1 Похибка апроксимації	18
2.1.2 Похибка викривлення	19
2.1.3 Похибки МСЕ для багатовимірних задач	21
2.1.4 Апроксимація функцій у рівномірних метриках	22
2.1.5 Апроксимація функцій у інтегральних метриках	23
2.1.6 Класичний метод Рітца	24
2.1.7 Метод скінчених елементів	26
РОЗДІЛ 3	28
ПОБУДОВА МУЛЬТИПЛІКАТИВНИХ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЗА ДОПОМОГОЮ БФТ	28
3.1 Побудова систем координатних функцій у вигляді багатоточкової формули Тейлора	28
3.2 Деякі оцінки наближень багатоточкової формули Тейлора	30
РОЗДІЛ 4	32

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ	32
4.1 Задача про згин балки	32
4.2 Задача про коливання струни	34
4.3 Задача про коливання мембрани	36
ВИСНОВКИ.....	39
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	40
ДОДАТОК А.....	41
ДОДАТОК Б	42
ДОДАТОК В.....	45
ДОДАТОК Д.....	50
ДОДАТОК Е	52
ДОДАТОК Ж	56
ДОДАТОК З.....	58

ВСТУП

З того часу, коли почали застосовувати для розв'язку задач наближені методи, математиків цікавило питання похибки отриманого наближення відносно точного значення шуканої величини. Широке застосування в практиці обчислень комп'ютерів додало проблему похибки виконання великої кількості арифметичних дій з числами, які записані скінченною кількістю цифр.

Для того, щоб з'ясувати внески в загальну похибку кожної з основних причин, необхідно було їх класифікувати. Найбільше розповсюджена класифікація, коли з наближеним розв'язком зв'язують три типи похибки [1,2]: 1) неусувна похибка; 2) похибка метода, яка виникає при використанні наближеного розв'язку; 3) обчислювана похибка, яка виникає за рахунок комп'ютерної арифметики. На наш погляд, більш повною є класифікація, запропонована в [3], яка передбачає розбиття похибки методу та обчислювальної похибки на чотири: на похибки апроксимації, деформації, алгоритму та округлення.

Похибка апроксимації виникає тому, що дана «точна» задача замінюється (апроксимується) іншою, простішою «наближеною» задачею. Похибка деформації з'являється внаслідок того, що дані наближеної задачі, якій замінюється вихідна точна задача, обчислюються неточно. Похибка алгоритму виникає в разі, коли алгоритм, застосований для розв'язку наближеної (в даному випадку деформованої наближеної) задачі, дає її точне розв'язок лише в результаті деякого граничного переходу, якщо його не вдається виконати ефективно.

Розподіл похибки метода і обчислюваної похибки на більш прості дозволило в [3] отримати теоретичні (апріорні) оцінки похибок великої кількості методів наближеного розв'язку. В той же час апостеріорні похибки,

які виникають при розв'язку задач конкретними методами недостатньо вивчені навидь у порівнянні результатів різних наближених методів.

Метою даної роботи є чисельне дослідження апостеріорних похибок метода скінчених різниць і метода Бубнова-Гальоркіна з системою координатних функцій у вигляді скінчених елементів мультиплікативного типу. Розглядалися задачі з точним розв'язком, а саме: задача про згин балки (бігармонічне рівняння) та хвильове рівняння. Такий вибір був зроблений для того, щоб показати похибки метода в різних типах задач, тим паче, що хвильове рівняння чутливо до особливостей наближених методів.

Вибір для дослідження цих методів наближеного розв'язку обумовлений їх широким використанням при дослідженні фізичних, хімічних і т.п. процесів. В роботі розв'язані задачі різної розмірності, проведений аналіз отриманих похибок апроксимаційного і алгоритмічного типу для шуканої функції і похідної.

РОЗДІЛ 1

ПОХИБКИ НАБЛИЖЕНИХ МЕТОДІВ

1.1. Можливі похибки при наближених розв'язках

1.1.1 Джерела похибок

Найбільше розповсюджена класифікація, коли з наближеним розв'язком зв'язують три типи похибки. При цьому ми вважаємо, що задача поставлена точно. Тим самим ми зневажаємо так звані неусувніми похибками, пов'язаними з постановкою згаданої задачі як задачі природознавства або соціально-наукових дисциплін (похибки вимірів, недостатня точність основних гіпотез і т. п.). В загальному випадку, усунення або хоча б зменшення подібних похибок лежать за межами дії математичних методів, і найбільше, на що тут можна розраховувати, це при наявності достатньої інформації про ступінь точності згаданих факторів скористатися методами теорії збуджень та дати оцінку похибці, зумовленої неточністю даних факторів.

Переходимо до опису джерел похибок.

1. Похибка апроксимації. Похибка апроксимації виникає тому, що дана «точна» задача замінюється (апроксимується) іншою, простішою «наближеною» задачею.

Питання про погрішність апроксимації та її оцінку – один з найважливіших у обчислювальній математиці, та йому присвячена велика кількість літератури.

2. Похибка викривлення. Похибка деформації з'являється внаслідок того, що дані наближеної задачі, якій замінюється вихідна точна задача, обчислюються неточно.

3. Похибка алгоритму. Похибка алгоритму виникає в разі, коли алгоритм, застосований для розв'язку наближеної (в даному випадку деформованої наближеної) задачі, дає її точне розв'язок лише в результаті деякого граничного переходу, якщо його не вдається виконати ефективно.

Розподіл похибки метода і обчислюваної похибки на більш прості дозволило отримати теоретичні (апостеріорні) оцінки похибок великої кількості методів наближеного розв'язку. В той же час апостеріорні похибки, які виникають при розв'язку задач конкретними методами недостатньо вивчені навіть у порівнянні результатів різних наближених методів.

1.1.2 Джерела похибок

Нагадаємо основи методі Рітца для лінійних задач. Нехай симетричний білінійний функціонал $A(x, y)$ та відповідний йому однорідний квадратичний функціонал $A(x) = A(x, x)$ визначені на деякій лінійній множині M . Припустимо, що функціонал $A(x)$ додатній; це означає, що $A(x) > 0$, якщо x відмінний від нульового елемента множини M . Перетворимо M у передгільбертовий простір, введемо скалярний добуток $|x, y| = A(x, y)$ та норму $|x| = \sqrt{|x, x|} = \sqrt{A(x)}$. Замкнувши M у цій нормі, отримаємо гільбертовий простір, який позначимо H_A . Для спрощення наступних записів приймемо, що простір H_A – дійсний. У додатках частіше зустрічається випадок, коли M є лінійна щільна множина деякого гільбертового (рідше банахового) простору H , та $A(x, y) = (Ax, y)$, де A – додатній (та симетричний – ця обмовка потрібна, якщо H – дійсний простір) оператор в H . У такому випадку ми назовемо H_A енергетичним простором оператора A , а скалярний добуток та норму в H_A – відповідно енергетичним добутком та енергетичною нормою. Нехай $f(x)$ – лінійний функціонал, обмежений у H_A та визначений на всьому цьому просторі.

Поставимо задачу про мінімум функціоналу

$$F(x) = A(x) - 2(f, x). \#(1.1)$$

Ця задача теоретично розв'язується елементарно. За відомою теоремою Ф. Ріса, в H_A існує один та тільки один елемент x_* , такий що $f(x) = |x, x_*|$, для будь-якого x з H_A . Тепер $F(x) = |x|^2 - 2|x, x_*| = |x - x_*|^2 - |x_*|^2$,

і, вочевидь, функціонал (1.1) досягає мінімуму за $x = x_*$.

1.1.3 Метод Бубнова-Галеркіна

Оцінка похибки апроксимації для методу Бубнова - Галеркіна вперше була дана М. А. Красносельським [4] у доволі загальній ситуації – для рівнянь, в загально кажучи, нелінійних. З детальними доказами ці оцінки викладені в монографії [5].

Розглянемо неоднорідне рівняння

$$Ax = f, f \in H. \#(1.2)$$

Рівняння розглянемо за додаткового припущення, що оператор $T_1 = KA_0^{-1}$ також неперервний у H_0 . Припустимо, що спектр оператор A_0 дискретний; це означає, що A_0 має зліченну множину власних чисел з єдиною точкою згущення на нескінченності та що послідовність власних елементів операторі A_0 повна як у H , так і у H_0 .

Нехай B – оператор, подібний до A_0 . Це означає, що B – самоспряжений оператор, визначений у H , та що $D(B) = D(A_0)$. Як відомо, спектр оператора B також є дискретним. Припустимо, що цей спектр нам відомий і нехай ω_k і v_k – власні числа та відповідні їм власні елементи

оператора B . Так як цей оператор є визначеним, то існує обернений оператор B^{-1} , та числа $\omega_k > 0$. Послідовність $\{\omega_k\}$ приймемо за координатну.

Нехай

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^n a_k \omega_k \quad \#(1.3)$$

- наближений за Бубновим-Галеркіним розв'язок задачі. Зазначимо насамперед, що оператори $A^{-1}B$, $B^{-1}A$, а також спряжені з ними оператори BA^{-1} , AB^{-1} – обмежені в H . Далі, $x^{(n)} \in D(B) = D(A)$; звідси випливає, що нев'язка наближеного розв'язку $\delta_n = Ax^{(n)} - f$ є елементом простору H . Спираючись на результати робіт [83] та [12], можна довести, що $\|\delta_n\|_H \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

1.1.4 Різницеві методи

В. С. Рябенський та А. Ф. Філіппов довели досить цікаву загальну теорему про оцінку похибки апроксимації різницевих методів. Ця теорема детально доводиться у [6, 7]. Розглянемо задачу

$$Lx = f, lx = \varphi. \quad \#(1.4)$$

Тут x та f – функції, шукана та задана, визначені в області $\Omega \subset R_m$, φ – функція, визначена на $\delta\Omega$, L та l – лінійні оператори. Нехай задача замінена різницевою задачею

$$L_h x^h = f^h, l_h x^h = \varphi^h, \quad \#(1.5)$$

у якій x^h, f^h, φ^h - сіткові функції. В загальному випадку, ці функції можуть належати різноманітним сітковим просторам, так що $x^h \in X^h, f^h \in F^h, \varphi^h \in \Phi^h$.

Нехай $(*)_h$ - оператор, перетворюючий функцію задану на Ω або на $\delta\Omega$, в сіткову функцію, задану на відповідній множині вузлів. Теорема Рябенського-Філіппова стверджує наступне.

Нехай справедливі наступні апроксимаційні нерівності

$$\|(Lx)_h - L_h x^h\|_{X^h} \leq Ch^k, \|(lx)_h - l_h x^h\|_{\Phi^h} \leq Ch^k, \#(1.7)$$

$$\|(f)_h - f^h\|_{F^h} \leq Ch^k, \|(\varphi)_h - \varphi^h\|_{\Phi^h} \leq Ch^k. \#(1.8)$$

Та нехай обернений оператор задачі обмежений незалежно від h , так що

$$\|x_*^h\|_{X^h} \leq C \left[\|f^h\|_{F^h} + \|\varphi^h\|_{\Phi^h} \right]. \#(1.9)$$

Тоді є справедливою оцінка похибки апроксимації

$$\|(x_*)_h - x_*^h\|_{X^h} \leq Ch^k. \#(1.10)$$

1.2. Теоретичні оцінки деяких похибок

1.2.1 Стійкість процесу Рітца

Позначимо відповідно через $a^{(n)}$ та $f^{(n)}$ вектори із складовими $a_k^{(n)}$ та $(f, \varphi_{nk}), k = 1, 2, \dots, N$, а через M_n -матрицю Рітца, тобто матрицю енергетичних добутків $[\varphi_{nk}, \varphi_{ni}], k, j = 1, 2, \dots, N$, та запишемо рівняння у вигляді

$$M_n a^{(n)} = f^{(n)}, n = 1, 2, \dots \#(1.11)$$

Перепишемо рівняння у вигляді

$$A_n a^{(n)} = f^{(n)}, \#(1.12)$$

де ми вважаємо, що $a^{(n)} \in \overline{X_n}$, $f^{(n)} \in \overline{Y_n}$, та позначимо через A_n оператор, діючий з $\overline{X_n}$ у $\overline{Y_n}$ та породжений матрицею M_n . Разом з (1.12) розглянемо викривлене рівняння

$$(A_n + \Gamma_n)c^{(n)} = f^{(n)} + \delta^{(n)}. \#(1.13)$$

Викривлене наближення за Рітцем має вигляд

$$z_*^{(n)} = \sum_{k=1}^N c_k^{(n)} \varphi_{nk} = p_n c^{(n)}. \#(1.14)$$

Звідси

$$\begin{aligned} |z_*^{(n)} - x_*^{(n)}|^2 &= (M_n(c^{(n)} - a^{(n)}), c^{(n)} - a^{(n)}) \leq \\ &\leq \|A_n(c^{(n)} - a^{(n)})\|_{\overline{Y_n}} \cdot \|c^{(n)} - a^{(n)}\|_{\overline{X_n}}. \#(1.15) \end{aligned}$$

Отже існують такі числа $p, q, r > 0$, що якщо $\|\Gamma_n\|_{\overline{X_n} \rightarrow \overline{Y_n}} \leq r$, то

$$\|c^{(n)} - a^{(n)}\|_{\overline{X_n}} \leq p \|\Gamma_n\|_{\overline{X_n} \rightarrow \overline{Y_n}} + q \|\delta^{(n)}\|_{\overline{Y_n}}. \#(1.16)$$

З (1.12), (1.13) випливає

$$(A_n + \Gamma_n)(c^{(n)} - a^{(n)}) = (I_n + \Gamma_n A_n^{-1})A_n(c^{(n)} - a^{(n)}) = \delta^{(n)} - \Gamma_n a^{(n)}; \#(1.17)$$

I_n – тотожний оператор в $\overline{Y_n}$. Нехай, $\|\Gamma_n\|_{\overline{X_n} \rightarrow \overline{Y_n}} \leq \beta c_0^{-2}$, де β – будь-яке число з інтервалу $(0, 1)$. Тоді $\|(I_n + \Gamma_n A_n^{-1})^{-1}\| \leq (1 - \beta)^{-1}$, і так як норми $\|a^{(n)}\|_{\overline{X_n}}$ обмежені, то

$$\|A_n(c^{(n)} - a^{(n)})\|_{\overline{Y_n}} \leq (1 - \beta)^{-1} \left[\|\delta^{(n)}\|_{\overline{Y_n}} + c' \|\Gamma_n\|_{\overline{X_n} \rightarrow \overline{Y_n}} \right]; c' = const \#(1.18)$$

З формул (15) – (18) очевидно випливає, що

$$\left| z_*^{(n)} - x_*^{(n)} \right| \leq p_1 \|\Gamma_n\|_{\bar{X}_n \rightarrow \bar{Y}_n} + q_1 \|\delta^{(n)}\|_{\bar{Y}_n}, \#(1.19)$$

та за r_1 можна прийняти число $r_1 = \min(r, \beta c_0^{-2})$.

1.2.2 Стійкість процесу Бубнова-Галеркіна

У сепарабельному гільбертовому просторі, яке для спрощення позначень вважаємо дійсним, розглянемо рівняння

$$Ax := A_0x + Kx = f, \#(1.20)$$

де A_0 – додатньо визначений самоспряжений оператор та добуток $T = A_0^{-1}K$ досить неперервний у енергетичному підпросторі H_0 оператора A_0 . У роботі автора від 1948 р. (докладніше див. [8]) встановлено наступні теореми.

а) Рівняння (1.19) еквівалентне рівнянню

$$x + Tx = A_0^{-1}f, \#(1.21)$$

що розглядається у H_0 , в наступному сенсі: будь-який розв'язок рівняння (1.20) задовольняє рівняння (1.21), а будь-який розв'язок рівняння (1.21) є узагальненим розв'язком рівняння (1.20).

б) Для заданої координатної системи метод Бубнова-Галеркіна, використаний для рівнянь (1.20) та (1.21), призводить до однієї та самої алгебраїчної системи.

в) Якщо координатна система є повною у H_0 , то метод Бубнова-Галеркіна для рівнянь (1.20), (1.21) сходиться у H_0 .

Стійкість методу Бубнова-Галеркіна достатньо дослідити для рівняння (1.21). Розглянемо обидва обчислювальних процеси: для вектору коефіцієнтів та для наближеного розв'язку. В [9] для більш загального методу Галеркіна-

Петрова доведено, що стійкість названих процесів має місце, якщо координатна система є сильно мінімальною в H_0 . В [10] доведено, що умова сильної мінімальності необхідне для стійкості процесу обчислення наближеного розв'язку; саме там спрощене доведення достатності.

1.2.3 Похибки складання систем методами Рітца та Бубнова-Галеркіна

В 1.2.1 даного розділу отримана оцінка викривлення для вільного обчислювального процесу; щоб користуватися даною формулою, необхідно мати оцінки норм операторів Γ_n – похибок операторів A_n та елементів $\delta^{(n)}$ – похибок правих частин рівняння (1.12). В даному параграфі будуть дані деякі оцінки такого роду для випадку, коли обчислювальний процес представляє собою послідовність систем Рітца або Бубнова-Галеркіна для лінійного рівняння у частинних похідних. Метод Рітца можна розглядати як частковий випадок методу Бубнова-Галеркіна, коли дана задача – додатно визначена, тому нижче в даному параграфі будемо говорити про метод Бубнова-Галеркіна.

Система Бубнова-Галеркіна має вигляд

$$A_n a^{(n)} = f^{(n)}, \#(1.22)$$

де $a^{(n)}$ та $f^{(n)}$ - вектори у R_N ; A_n – матриця $[\alpha_{jk}^{(n)}]_{j,k=1}^N$, при чому

$$\alpha_{jk}^{(n)} = \int \varphi_{nj}(t) \sum_{|\alpha|=0}^{2s} A_\alpha(t) D^\alpha \varphi_{nk}(t) dt \#(1.23)$$

та

$$f_i^{(n)} = (f, \varphi_{in}) = \int f(t) \varphi_{nj}(t) dt. \#(1.24)$$

Якщо позначити через Γ_n та $\delta^{(n)}$ похибки матриці A_n та вектору $f^{(n)}$ відповідно, то

$$\|\delta^{(n)}\| \leq \varepsilon_1 \|f^{(n)}\|, \|\Gamma_n\| \leq \varepsilon_1 \|A_n\|_E \leq \varepsilon_1 \sqrt{N} \|A_n\|. \#(1.25)$$

Надаємо оцінці конкретного вигляду, виражаючи її через дані задачі. Позначимо через $P_n = \|A_n\| \cdot \|A_n^{-1}\|$ число обумовленості матриці A_n та замінимо через $\|f^{(n)}\| \cdot \|A_n^{-1}\|$ оцінку норми $\|x^{(n)}\|$.

Тоді, якщо

$$\sqrt{N} \varepsilon_1 P_n \leq \beta, 0 \leq \beta < 1, \#(1.26)$$

то

$$\widehat{\xi}_n \leq \frac{\varepsilon_1 \|A_n^{-1}\| (\sqrt{N} P_n + 1) \|f^{(n)}\|}{1 - \beta}. \#(1.27)$$

РОЗДІЛ 2

ПОХИБКИ МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

2.1 Похибки апроксимації та викривлення у МСЕ

2.1.1 Похибка апроксимації

Нехай $x \in W_2^{(s+1)}(0,1)$, тоді $x \in C^{(s)}(0,1)$ та можна побудувати функцію $x^h(t)$ за формулою (1.3). Оцінимо нормі різниці $x - x^h$ у метриці $W_2^{(s+1)}(0,1)$, $0 \leq \bar{s} \leq s$; цю метрику можна задати, наприклад, формулою

$$(x, y)_{W_2^{(\bar{s})}} = \sum_{\alpha=0}^{\bar{s}} \int_0^1 x^\alpha(t) y^\alpha(t) dt. \#(2.1)$$

Розглянемо інтеграл

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [D^\alpha x(t) - D^\alpha x^h(t)]^2 dt = \\ & = \sum_{j_0=0}^{2n-1} \int_{j_0 h}^{(j_0+1)h} [D^\alpha x(t) - D^\alpha x^h(t)]^2 dt, 0 \leq \alpha \leq \bar{s}, \#(2.2) \end{aligned}$$

$$D^\alpha = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}. \#(2.3)$$

Виділимо з останньої суми один доданок:

$$\begin{aligned} J_{j_0} & = \int_{j_0 h}^{(j_0+1)h} [D^\alpha x(t) - D^\alpha x^h(t)]^2 dt = \\ & = \int_{j_0 h}^{(j_0+1)h} \left[D^\alpha x(t) - \sum_{q=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{2n} x^{(q)}(jh) h^{-\alpha} \omega_q \left(\frac{t}{h} - j \right) \right]^2 dt. \#(2.4) \end{aligned}$$

Позначимо $j_0 h = t_0$ та зробимо підстановку $t = t_0 + \tau h, 0 \leq \tau \leq 1$. Доданки у останній сумі відмінні від тотожного нуля, якщо $-1 < j_0 + \tau - j < 1$, тобто якщо $j = j_0$ або $j = j_0 + 1$. Тепер

$$J_{j_0} = h \int_0^1 \left[x^{(\alpha)}(t_0 + \tau h) - h^{-\alpha} \sum_{q=0}^{s-1} \sum_{i=0}^1 x^{(q)}(t_0 + ih) \omega_q^{(\alpha)}(\tau - i) \right]^2 dt \quad \#(2.5)$$

Розкладемо $x^{(\alpha)}(t_0 + \tau h)$ за формулою Тейлора за степенями h до членів порядку $s - \alpha$, а $x^{(q)}(t_0 + ih)$ - до членів порядку $s - q$; в обох випадках залишкові члени будуть містити похідну $x^{(s+1)}(t)$. Легко перевірити, що в силу фундаментальних співвідношень головні члени формул Тейлора зникнуть, а залишкові члени дадуть оцінку

$$J_{j_0} \leq Ch^{2s-2\alpha+2} \|x^{(s+1)}\|_{L_2(t_0, t_0+h)}^2. \quad \#(2.6)$$

Підсумовуючи за j_0 , а потім за α , отримаємо

$$\|x - x^h\|_{W_2^{(s)}} \leq Ch^{s-\bar{s}+1} \|x^{(s+1)}\|_{L_2(0,1)}. \quad \#(2.7)$$

Знаходимо оцінку похибки МСЕ

$$x_* - x^h \leq Ch^{2s-2} \|x_*^{(2s)}\|_{L_2(0,1)}. \quad \#(2.8)$$

2.1.2 Похибка викривлення

При дослідженні похибки викривлення для нас буде суттєвим, що коефіцієнти a_{qj} у наближеному розв'язку x_h залежать від h , тому будемо їх позначати через $a_{qj}^{(h)}$, так що

$$x_h(t) = \sum_{q=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{2n} a_{qj}^{(h)} \omega_q \left(\frac{t}{h} - j \right). \quad \#(2.9)$$

Сукупність коефіцієнтів $a_{qj}^{(h)}$ при фіксованому h будемо розглядати як вектор $a^{(n)}$ у просторі $R_N, N = s(2n + 1)$, а сукупність правих частин системи $F_{qj}^{(h)} := (f, \varphi_{qjh})$ – як вектор $F^{(h)}$ у тому ж просторі R_N .

Систему запишемо у вигляді

$$A_h a^{(h)} = F^{(h)} \quad \#(2.10)$$

Обчислювальний процес, що визначає наближений розв'язок x_h

$$A_h \Pi_h^{-1} x_h = F^{(h)}. \quad \#(2.11)$$

В результаті викривлення замість рівняння (2.11) отримуємо викривлене рівняння

$$(A_h + \widetilde{\Gamma}_h) \Pi_h^{-1} z_h = F^{(h)} + \delta^{(h)}, \quad \#(2.12)$$

та викривлений наближений розв'язок

$$z_n(t) = \sum_{q=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{2n} b_{qj}^{(h)} \varphi_{qjh}(t), \quad \#(2.13)$$

$b_{qj}^{(h)}$ – складові вектору $b^{(h)}$.

Раніше було доведено, що $\|A_h^{-1}\| \leq (c_1^2 \lambda_0)^{-1}$. Нехай $\|\Gamma_h\| \leq \beta c_1^2 \lambda_0, 0 < \beta < 1$.

Тоді

$$\begin{aligned} |z_n - x_h| &\leq \{(1 - \beta)^{-1} [p \|\widetilde{\Gamma}_h\| + q \|\delta^{(h)}\|_{Y_N}] \cdot [\beta c_1^2 \lambda_0 \|\widetilde{\Gamma}_h\| + \|\delta^{(h)}\|_{Y_N}]^{\frac{1}{2}}\} \leq \\ &\leq p_1 \|\widetilde{\Gamma}_h\| + q_1 \|\delta^{(h)}\|_{Y_N}; \quad \#(2.14) \end{aligned}$$

Остання нерівність є вірною, якщо $\|\widetilde{\Gamma}_h\| \leq r_1 = \min(r, \beta c_1^2 \lambda_0)$.

2.1.3 Похибки МСЕ для багатовимірних задач

Розглянемо також функції $x(t)$ класу $W_p^{\overline{s}}(Q)$, $\overline{s} \geq s, 1 \leq p \leq \infty$. Для таких функцій ми визначили $x^{(h)}(t)$ більш складною формулою

$$x^{(h)}(t) = \sum_{q=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{2n} h^{|q|} \bar{x}^{(q)}(jh) \bar{\omega}_q\left(\frac{t}{h} - j\right), \quad \#(2.15)$$

де $\bar{x}(t)$ – усереднення функції $x(t)$ рангу, не меншого s , за Ільїним-Головкіним [11, 12]. Зазначимо наступну властивість такого усереднення: якщо його ранг дорівнює $s_0 \leq \bar{s}$, то можна обрати достатньо малий радіус усереднення щоб

$$\|x - \bar{x}\|_{W_p^{s_0}} \leq \varepsilon, \quad \#(2.16)$$

ε – довільно задане додатне число.

Спираючись на посилені фундаментальні співвідношення, яким задовольняють одномірні вихідні функції $\omega_{q_k}(t_k)$, можна довести, що для функцій класу $C^{\overline{s}}(Q)$, $s + 1 \leq \bar{s} \leq 2s$, ця похибка має оцінку

$$\|x - \bar{x}\|_{C^{(s)}} \leq Ch^{\bar{s}-1} \max_{|\alpha|=\bar{s}} \|x^{(\alpha)}\|_C. \quad \#(2.17)$$

Якщо $x \in W_p^{\overline{s}}(Q)$, $s + 1 \leq \bar{s} \leq 2s$, то покладемо в (2.17)

$\varepsilon = Ch^{\bar{s}-s} \max_{|\alpha|=\bar{s}} \|x^{(\alpha)}\|_{L_p}$ та $s_0 = s$. Далі, побудуємо x^h за формулою

(2.15). З нерівності (2.17) отримаємо

$$\|\bar{x} - x^h\|_{W_p^{(s)}} \leq Ch^{\bar{s}-s} \max_{|\alpha|=\bar{s}} \|x^{(\alpha)}\|_{L_p} \quad \#(2.18)$$

та, відповідно,

$$\|x - x^h\|_{W_p^{(s)}} \leq Ch^{\bar{s}-s} \max_{|\alpha|=\bar{s}} \|x^{(\alpha)}\|_{L_p} \quad \#(2.19)$$

Постійні C в останніх формулах відрізняються, в загальному сенсі.

2.1.4 Апроксимація функцій у рівномірних метриках

В даному параграфі буде отримана оцінка сталої $C = C(2s, \bar{s}), \bar{s} \leq s$, в нерівності

$$\|D^{\bar{s}}x - D^{\bar{s}}x^h\| \leq C(2s, \bar{s})h^{2s-\bar{s}}\|x^{(2s)}\|; \quad \#(2.20)$$

знаком $\|\cdot\|$ в цьому параграфі позначається норма в $L_\infty(0,1)$.

Нехай $t = t_0 + \tau h, t_0 = j_0 h, j_0$ – ціле число, $0 \leq j_0 \leq 2n - 1, 0 \leq \tau \leq 1$.

Складемо різницю

$$\begin{aligned} & D^{\bar{s}}x(t_0 + \tau h) - D^{\bar{s}}x^h(t_0 + \tau h) = \\ & = D^{\bar{s}}x(t_0 + \tau h) - \sum_{q=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{2n} h^{q-\bar{s}} \bar{x}^{(q)}(jh) \omega_{qs}^{(\bar{s})}(j_0 - j + \tau). \quad \#(2.21) \end{aligned}$$

Підставивши (2.21) у формулу Тейлора, отримаємо

$$\begin{aligned} & h^{-(2s-\bar{s})} [D^{\bar{s}}x(t) - D^{\bar{s}}x^h(t)] = \\ & = \frac{\tau^{2s-\bar{s}}}{(2s-\bar{s}-1)!} \int_0^1 x^{(2s)}(t_0 + \tau hz) (1-z)^{2s-\bar{s}-1} dz - \\ & - \sum_{q=0}^{s-1} \frac{\omega_{qs}^{(\bar{s})}(\tau-1)}{(2s-\bar{s})!} \int_0^1 x^{(2s)}(t_0 + hz) (1-z)^{2s-q-1} dz. \quad \#(2.22) \end{aligned}$$

Перший член мажорується величиною

$$\frac{\|x^{(2s)}\|}{(2s-\bar{s}-1)!} \int_0^1 (1-z)^{2s-\bar{s}-1} dz = \frac{\|x^{(2s)}\|}{(2s-\bar{s})!}, \quad \#(2.23)$$

а другий член - величиною

$$\|x^{(2s)}\| \sum_{q=0}^{s-1} \frac{A_{qs}^{(\bar{s})}}{(2s-q)!} \leq \frac{\|x^{(2s)}\|}{(s+1)!} \sum_{q=0}^{s-1} A_{qs}^{(\bar{s})}. \quad \#(2.24)$$

Звідки

$$C(2s, \bar{s}) \leq \frac{1}{(2s-\bar{s})!} + \frac{1}{(s+1)!} \sum_{q=0}^{s-1} A_{qs}^{(\bar{s})}. \quad \#(2.25)$$

Суму в (2.25) можна оцінити

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^{s-1} A_{qs}^{(\bar{s})} &< s\mu(s, \bar{s})2^{\bar{s}-2} \sum_{q=0}^{\infty} \left[\frac{1}{q!} \left(2 \left(\frac{3}{2} \right)_q - \frac{1}{2^q} \right) \right] = (2e^{\frac{3}{2}} - e^{\frac{1}{2}})s\mu(s, \bar{s})2^{\bar{s}-2} < \\ &< 7.32s\mu(s, \bar{s})2^{\bar{s}-2}, \quad \#(2.26) \end{aligned}$$

таким чином для $C(2s, \bar{s})$ оцінка виглядає наступним чином

$$C(2s, \bar{s}) \leq \frac{1}{(2s-\bar{s})!} + \frac{7.32s\mu(s, \bar{s})2^{\bar{s}-2}}{(s+1)!}. \quad \#(2.27)$$

2.1.5 Апроксимація функцій у інтегральних метриках

Почнемо з формули

$$\|D^{\bar{s}}x - D^{\bar{s}}x^h\|_{L_p} = \sum_{j=0}^{2n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |D^{\bar{s}}x(t) - D^{\bar{s}}x^h(t)|^p dt, \quad \#(2.28)$$

У інтегралі з правого боку покладемо $t = t_j + \tau h$:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} |D^{\bar{s}}x(t) - D^{\bar{s}}x^h(t)|^p dt = h \int_0^1 |D^{\bar{s}}x(t_j + \tau h) - D^{\bar{s}}x^h(t_j + \tau h)|^p d\tau. \quad \#(2.29)$$

У формулі (2.22) замінімо t_0 на t_j , зведемо модулі обох частин цієї формули до степеню p та проінтегруємо за τ у межах від нуля до одиниці:

$$h^{-p(2s-\bar{s})} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |D^{\bar{s}}x(t) - D^{\bar{s}}x^h(t)|^p dt =$$

$$= \left[\int_0^1 \frac{\tau^{2s-\bar{s}}}{(2s-\bar{s}-1)!} \int_0^1 x^{(2s)}(t_1 + \tau hz)(1-z)^{2s-\bar{s}-1} dz \right. \\ \left. - \sum_{q=0}^{s-1} \frac{\omega_{qs}^{(\bar{s})}(\tau-1)}{(2s-q-1)!} \int_0^1 x^{(2s)}(t_1 + hz)(1-z)^{2s-q-1} dz \right]^p d\tau. \#(2.30)$$

У силу нерівності Гельдера для сум права частина формули (2.30) не перевищує величини

$$2^{p-1} \int_0^1 d\tau \int_0^1 \left\{ \frac{\tau^{(2s-\bar{s})p}}{[(2s-\bar{s}-1)!]^p} |x^{(2s)}(t_1 + \tau hz)|^p (1-z)^{(2s-\bar{s}-1)p} + \right. \\ \left. + |x^{(2s)}(t_1 + hz)|^p \left[\sum_{q=0}^{s-1} \frac{(1-z)^{2s-q-1}}{(2s-q-1)!} |\omega_{qs}^{(\bar{s})}(\tau-1)| \right]^p \right\} dz. \#(2.31)$$

В результаті отримаємо кінцеву оцінку

$$h^{-(2s-\bar{s})} \|D^{\bar{s}}x - D^{\bar{s}}x^h\|_p \leq$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p'}} \|x^{(2s)}\|_p \left\{ \frac{1}{[(2s-\bar{s}-1)!]^p [2s-\bar{s}]^p + 1} + \right. \\ \left. + \left[\sum_{q=0}^{s-1} \frac{1}{[(2s-q-1)!]^{p'}} \right]^{p-1} \sum_{q=0}^{s-1} [A_{qsp}^{(\bar{s})}]^p \right\}^{\frac{1}{p'}}. \#(2.32)$$

2.1.6 Класичний метод Рітца

У площині декартових координат t_1, t_2 розглянемо крайову задачу

$$t = (t_1, t_2) \in \Omega, \frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial t_2^2} = f(t); t \in \partial\Omega, x = 0; \#(2.33)$$

область Ω є чвертю кругового кільця. У цій задачі є доцільним перейти до полярних координат $t_1 = r \cos \theta, t_2 = r \sin \theta$. В свою чергу будемо розглядати r та θ як декартові координати деякої іншої площини. Задача (2.33) переходить у наступну

$$(r, \theta) \in \Pi, \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} = r f(t) := \bar{f}(r, \theta); (r, \theta) \in \partial\Pi, x = 0; \#(2.34)$$

Π – прямокутник $1 < r < 1 + R, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Позначимо через A оператор задачі (2.34), а через B – оператор, визначений співвідношеннями

$$(r, \theta) \in \Pi, Bx = \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2}; (r, \theta) \in \partial\Pi, x = 0. \#(2.35)$$

Оператори A та B – подібні [13], та їх енергетичні норми еквівалентні:

$$\begin{aligned} |x|_A^2 &= \int_1^{1+R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[r \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} \right)^2 \right] dr d\theta \leq (1+R) |x|_B^2 = \\ &= (1+R) \int_1^{1+R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} \right)^2 \right] dr d\theta \leq \\ &\leq (1+R)^2 |x|_A^2 \#(2.36) \end{aligned}$$

Нехай $x_*^{(N)}$ –наближений розв'язок задачі (2) за Рітце, а $x^{(N)}$ -сума

$$x^{(N)} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \sin \frac{i\pi(r-1)}{R} \sin \frac{2j}{\theta}, n = \sqrt{N}. \#(2.37)$$

Очевидно, що $|x_* - x_*^{(N)}|_A \leq |x_* - x^{(N)}|_A$.

Оцінка похибка апроксимації:

$$\left| x_* - x_*^{(N)} \right|_A \leq \frac{4\sqrt{R(1+R)}}{\sqrt{\pi^5(n+1)}} \left\| \frac{\partial^3 x}{\partial r^2 \partial \theta} \right\| + \frac{16}{\sqrt{\pi^3 R}} \left\| \frac{\partial^3 x}{\partial r \partial \theta^2} \right\|^2. \#(2.38)$$

Оцінка похибки викривлення:

$$\xi_N \leq \frac{\varepsilon_1 \|\bar{f}\| (1+R)}{1-\beta} \left[(1+R)^2 n + \sqrt{\pi - 1 + \frac{\pi}{2} \ln n} \right]. \#(2.39)$$

2.1.7 Метод скінчених елементів

Розглянемо самоспряжену додатньо визначену задачу

$$0 < t < 1, -\frac{d}{dt} \left[(2+t) \frac{dx}{dt} \right] + tx = f(t); \#(2.40)$$

$$x(0) = x(1) = 0.$$

Для її розв'язку використаємо МСЕ із кусково-лінійною апроксимацією: введемо до розгляду вихідну функцію

$$\omega(t) = \begin{cases} t+1, & -1 \leq t \leq 0, \\ 1-t, & 0 < t \leq 1, \\ 0, & t \notin [-1, +1], \end{cases} \#(2.41)$$

оберемо натуральне число n , покладемо $h = \frac{1}{2n}$ та будемо шукати наближений розв'язок у вигляді

$$x_{*h}(t) = \sum_{j=1}^{2n-1} a_j^{(n)} \omega\left(\frac{t}{h} - j\right) := \sum_{j=1}^{2n-1} a_j^{(n)} \varphi_{jh}(t), \#(2.42)$$

де коефіцієнти a_{jn} визначаються з алгебраїчної системи МСЕ.

Оцінка похибки апроксимації має вигляд:

$$|x_* - x_{*h}| \leq 2h\|f\|. \#(2.43)$$

Оцінка похибки викривлення має вигляд:

$$\xi_n \leq 8\sqrt{3}c^2\varepsilon_1 h^{-\frac{5}{2}}\|f\|. \#(2.44)$$

Похибки алгоритму та округлення залежать від того, яким методом розв'язується алгебраїчна система МСЕ. Ця система – трьох діагональна, як бачимо її доцільно розв'язувати методом прогонки. Можна також перетворити систему за методом Натансона, та розв'язувати її ітераціями, але число обумовленості матриці МСЕ досить велике, та ітерації будуть збігатися повільно.

РОЗДІЛ 3

ПОБУДОВА МУЛЬТИПЛІКАТИВНИХ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЗА ДОПОМОГОЮ БФТ

3.1 Побудова систем координатних функцій у вигляді батаготочкової формули Тейлора

Проведення повного дослідження множина H -реалізованих функцій досить важко, тому зупинимося лише на деяких його підмножинах, що володіють рядом специфічних властивостей. Досліджуємо побудову функцій, які приймають задані значення разом зі своїми похідними до заданого порядку n включно, в деякій множині точок $\{x^{(i)}\}_{i \in I}$.

Очевидно, що в околиці кожної точки $x^{(i)}$ ці функції можуть являти собою відрізок ряду Тейлора. Проведемо побудову функцій, вододіючими зазначеними властивостями в деяких, найбільш простих підмножинах H -реалізованих функцій.

Нехай в $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ задана деяка послідовність точок $\{x^{(i)}\}_{i \in I}$ і послідовність чисел $\{z_i^s\}_{|s|=0, i \in I}^{n_i}$. Побудуємо H_0 – реалізований поліном $Q(x)$ для кожного виконується умова:

$$\frac{\partial^{|s|} Q(x^i)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_m^{s_m}} = z_i^s, \quad \forall i \in I, \quad |s| = \overline{0, n_i}, \quad \#(3.1)$$

Однозначно визначає поліном з $\mathcal{W}(H_0)$ ступеня n_i . Таким поліномом в околиці деякої фіксованої точки $x^{(i)}$ може бути відрізок ряду Тейлора

$$T(x - x^{(i)}) = \sum_{|s|=0}^{n_i} z_i^s \prod_{p=1}^m \frac{(x_p - x_p^{(i_p)})^{s_p}}{s_p!} \quad \#(3.2)$$

Отримати аналогічне розкладання, що задовольняє умові, в околиці безлічі точок $\{x^{(i)}\}_{i \in I}$, можна за допомогою виразу

$$Q(x) = \sum_{i \in I} h_i(x) T(x - x^{(i)}) \quad \# \quad (3.3)$$

Щодо введених функцій $h_i(x)$ вимагатимемо виконання наступних умов

$$D^l \left[h_i(x) \frac{(x_p - x_p^{(i_p)})^{s_p}}{s_p!} \right]_{x=x^{(i)}} = \delta_{iq} \delta_{se} \quad \# (3.4)$$

$$D^l [h_i(x)]_{x=x^{(i)}} = \delta_{l0}, \quad 0 \leq |l| \leq n_i$$

l, s - мультиіндекс, $l = s$ якщо $l_p = s_p, p = \overline{1, m}$. Побудувати $h_i(x)$, задовольняючу умові можна в різних системах H - реалізованих функцій. В залежності від обраного $w(H)$ формулу будемо називати - реалізованою багаточковою формулою Тейлора (БФТ) [14].

Для побудови $h_i(x)$ в $w(H_0)$ можна використовувати функцію виду

$$\begin{aligned} \xi_{ip}(x_p) &= \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq i_p}}^{q_p} (x_p - x_p^{(t)})^{n_{ip}+1} \left\{ \frac{1}{\prod_{\substack{t=1 \\ t \neq i_p}}^{q_p} (x_p - x_p^{(t)})^{n_{ip}+1}} \right\}_{x_p=x_p^{(i_p)}}^{(n_{ip})} = \\ &= G_{ip}(x_p) \sum_{\mu=0}^{n_{ip}} \left\{ \frac{1}{G_{ip}(x_p)} \right\}_{x_p=x_p^{(i_p)}}^{(\mu)} \frac{(x_p - x_p^{(i_p)})^\mu}{\mu!} \quad \# (3.5) \end{aligned}$$

Де q_p - кількість вузлів, $\{f(x)\}_{x_{ip}^{(i_p)}}^{(n_{ip})}$ означає розкладання функції $f(x_p)$ в ряд Тейлора в околиці точки $x_p^{(i_p)}$ за ступенями $x_p - x_p^{(i_p)}$ до порядку n_{ip} включно. Доказ того що $\xi_{ip}(x_p)$ задовольняє умовам і засноване на збігу з розкладанням одиниці виду

$$\xi_{ip}(x_p) = 1 + C (x_p - x_p^{(i_p)})^{n_{ip}+1} \quad \# (3.6)$$

C - константа.

Тоді необхідна функцією буде

$$h_i(x) = \prod_{p=1}^m \xi_{ip}(x_p), \quad i = (i_1, i_2, \dots, i_m) \quad \#(3.7)$$

При такій побудові $h_i(x)$ істотним є вимога щоб всі

$$x_p^{(t)}, \quad \forall t = \overline{1, q_p}, \quad p = \overline{1, m}$$

були різні.

3.2 Деякі оцінки наближень багатоточкової формули Тейлора

Для будь-якої лінійної формули наближення у R^m залишковим членом буде деякий лінійний функціонал, визначений на відповідних класах функцій.

Для простоти будемо розглядати випадок $m = 2$. Нехай БФТ наближує $u \in C^k(\Omega)$, а $D^{k+1}(u)$ – інтегрована у R^2 . Залишковий член цього розкладу

$$R_{j,k}(u) = u(x) - u_{j,k}(x) \quad \#(3.8)$$

буде визначатися як порядком розкладу K , так і числом вузлів $x^{(i)}$, що визначаються множиною J .

Теорема 1. Якщо функція $u \in C^k$, а $D^{k+1}u(x)$ - інтегрована у розглянутій області, залишковий член БФТ має вигляд

$$R_{j,k}(u) = \sum_{i \in J} h_i(x) \left[\sum_{p=1}^2 \int_{x_p^{(i_p)}}^{x_p} \frac{\partial^{k+1} u(V_p, \beta_{\bar{p}})}{\partial x_p^{k+1}} \frac{(x_p - V_p)^k}{k!} dV_p + \sum_{\substack{|l|=k+1 \\ l_1, l_2 > 0}} \int_{x_1^{(i_1)}}^{x_1} \int_{x_2^{(i_2)}}^{x_2} \frac{\partial^{k+1} u(\alpha)}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2}} \frac{(x_1 - V_1)^{l_1-1} (x_2 - V_2)^{l_2-1}}{(l_1 - 1)! (l_2 - 1)!} dV_2 dV_1 \right], \quad (3.9)$$

де $p + \bar{p} = m + 1, l = (l_1, l_2)$ – мультиіндекс розмірності $m = 2, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), V = (V_1, V_2), \beta = (\beta_1, \beta_2)$ – змінні, причому

$$\alpha_1 = \begin{cases} V_1, l_1 \geq l_2 - 1 \\ x_1^{(i_1)}, l_1 < l_2 - 1 \end{cases}, \alpha_2 = \begin{cases} V_2, l_2 \geq l_1 + \frac{1 + (-1)^k}{2} \\ x_2^{(i_2)}, l_2 \leq l_1 + \frac{1 + (-1)^k}{2} \end{cases} \quad \#(3.10)$$

$$\beta_1 = x_1^{(i_1)}, \beta_2 = \begin{cases} x_2, k + 1 < m \\ x_2^{(i_2)}, k + 1 \geq m \end{cases} \quad \#(3.11)$$

При $k = 0$, у (3.2) залишаються лише однократні інтеграли.

Теорема 2. Нехай $u(x) \in C^k(\Omega) \cap W^k(M_k, \Omega)$ наближається БФТ $u(x) \in C^k(\Omega) \cap W_2^k(M_k, \Omega)$, тоді

$$\|D^s(u - u_{j,k-1})\|_{L_2(\Omega)} \leq CM_k \Delta^{k-|s|}, |s| \leq k, \quad \#(3.12)$$

де C – деяка стала, що визначається значенням $k, |s|$, та не залежить від Δ , $|D^s u| \leq M_k$.

РОЗДІЛ 4

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ

4.1 Задача про згин балки

Рівняння згину балки під рівномірно розподіленим навантаженням має вигляд

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = 2, \#(4.1)$$

$$u(0) = 0, \frac{d^2 u(0)}{dx^2} = 0, u(1) = 0, \frac{du(1)}{dx} = 0.$$

де $u(x)$ – функція прогину. Деформації обчислюються через похідну першого порядку, згинаючі моменти- другого, перерізаючи сили - третього.

Точний розв'язок цієї задачі: $u(x) = \frac{2x^4 - 3x^3 + x}{48}$.

Наближений розв'язок побудували за 5-точковою схемою скінченно-різницевого методу та мінімізацією функціонала

$$\int_0^1 \left(\left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 - 2u \right) dx \#(4.2)$$

Систему координатних функцій вибрали у вигляді багатоточкової формули Тейлора. Такий вибір функції враховує всі особливості шуканої функції. Загальна кількість невідомих в СЛАР при порівнянні були однакові. Априорна теоретична оцінка похибки апроксимації [3]

$$u_* - u_h \leq Ch^{2s-2} \left\| u_*^{(2s)} \right\|_{L_2(0,1)}. \#(4.3)$$

В нашому випадку точний розв'язок відомий і можна обчислити теоретичну похибку.

$$\|u_*^{(2s)}\|_{L_2(0,1)} = \int_0^1 |1^2|^{\frac{1}{2}} dx = 1, \quad \text{і тоді маємо } u_* - u_h \leq Ch^2. \text{ Таким}$$

чином теоретична оцінка залежить від h (C - деяка додатна стала).

В результаті максимальна похибка склала для різних методів:

Розбиття n, вузлів	Макс. похибка u			Макс. похибка u'			Теоретична
	МСР	МСЕ 1	МСЕ 2	МСР	МСЕ 1	МСЕ 2	Оцінка
6	4.E-02	3.E-04	2.E-10	2.E-02	7.E-04	2.E-09	C 0,04
11	2.E-03	7.E-05	5.E-10	1.E-02	2.E-04	3.E-09	C 0,01
21	1.E-03	2.E-05	1.E-09	6.E-03	5.E-05	6.E-09	C 0,005
41	6.E-04	4.E-06	5.E-09	3.E-03	1.E-05	2.E-08	C 0,0025
81	3.E-04	1.E-06	2.E-08	2.E-03	3.E-06	8.E-08	C 0,00125

Таблиця 4.1. Похибки для різних методів наближеного розв'язку задачі про згин балки

З таблиці видно, на прикладі гладкої функції, метод скінчених різниць має похибку порядку теоретичної а МСЕ на декілька порядків менше для $u(x)$ і також для похідної $u'(x)$.

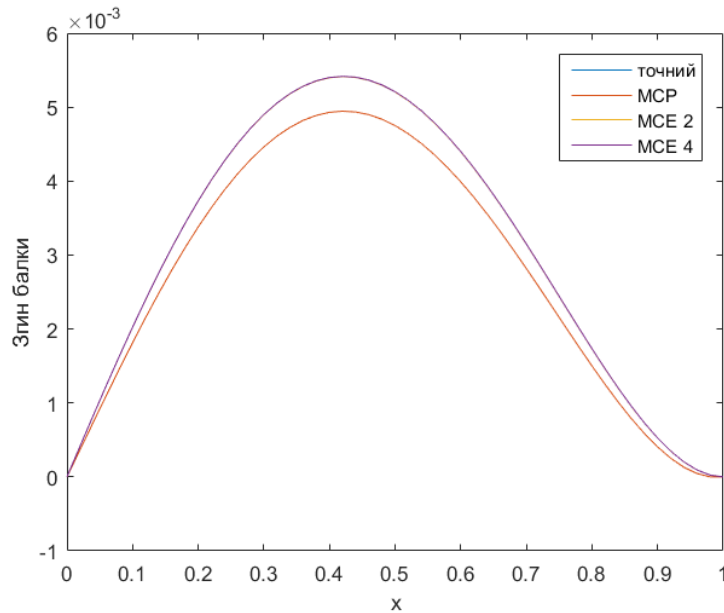


Рис. 4.1. Графіки точного та наближених розв'язків задачі про згин балки

4.2 Задача про коливання струни

Розв'яжемо одномірне хвильове рівняння з наступними крайовими та початковими умовами.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \#(4.4)$$

$u(x, 0) = \sin(\pi x)$, $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$. Розв'язок розглядаємо на відрізку $t \in (0, 2)$.

Точний розв'язок задачі - $u(x, t) = \sin(\pi x) \cos(\pi t)$.

Наближений розв'язок побудували за 5-точковою схемою скінченно-різницевого методу та мінімізацією функціонала відхилення

$$\int_0^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) u dx dt, \quad \#(4.5)$$

Наближений розв'язок у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n h(x - x_i) \sum_{j=1}^m h(t - t_j) \sum_{l_1+l_2=0}^k C_{ijl_1l_2} \frac{(x - x_i)^{l_1}}{l_1!} \frac{(t - t_j)^{l_2}}{l_2!} \quad \#(4.6)$$

В результаті максимальна похибка склала для різних методів:

Розбиття mхn, вузлів	Макс. похибка u	
	МСР	МСЕ
5x5	3.E-01	2.E-02
11x11	3.E-03	8.E-04
21x21	2.E-04	5.E-05
41x41	1.E-05	3.E-06
81x81	7.E-07	2.E-07

Таблиця 4.2. Похибки для різних методів наближеного розв'язку задачі про коливання струни

З таблиці бачимо, що для $0.00125 \leq h \leq 0.25$, метод скінчених елементів дає на порядок меншу похибку, ніж метод скінчених різниць.

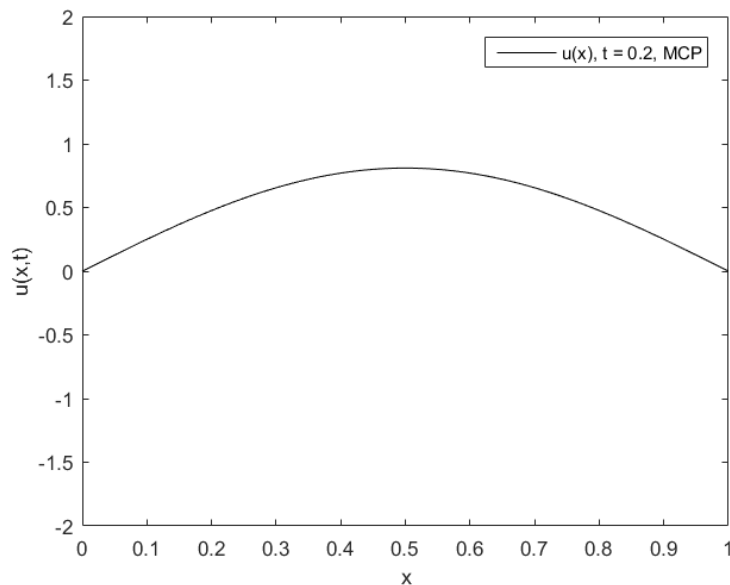


Рис. 4.2. Розв'язок задачі про коливання струни МСР ($t = 0.2$)

4.3 Задача про коливання мембрани

Підвищимо розмірність і розглянемо задачу про коливання прямокутної мембрани ($a = 1$).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \#(4.7)$$

з граничними і початковими умовами

$$u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad \#(4.8)$$

$$u(0, y, t) = 0,$$

$$u(1, y, t) = 0,$$

$$u(x, 0, t) = 0,$$

$$u(x, 1, t) = 0.$$

МСП будуються за семи точковою схемою. МСЕ мінімізує функціонал

$$\int_0^2 \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \right) u dx dy dt. \#(4.9)$$

Функції форми скінченного елемента будуються за формулою

$$u(x) = \sum_{i=1}^n h(x - x_i) \sum_{j=1}^m h(y - y_j) \sum_{l=0}^k C_{ijl} h(t - t_l) \#(4.10)$$

В результаті похибка склала

Розбиття mхnхk, вузлів	Макс. похибка u	
	МСП	МСЕ
2х2х5	1.E-1	2.E-1
5х5х6	12.E-2	8.E-2
9х9х11	6.E-2	7.E-2

Таблиця 4.3. Похибки для різних методів наближеного розв'язку задачі про коливання мембрани

З підвищенням розмірності задачі похибки стали зростати. На наш погляд це обумовлено нестійкістю використаної схеми. Умовою стійкості є

виконання нерівності $\frac{h_x^2 h_y^2 - \tau^2 (h_x^2 + h_y^2)}{h_x h_y \tau} < 1$.

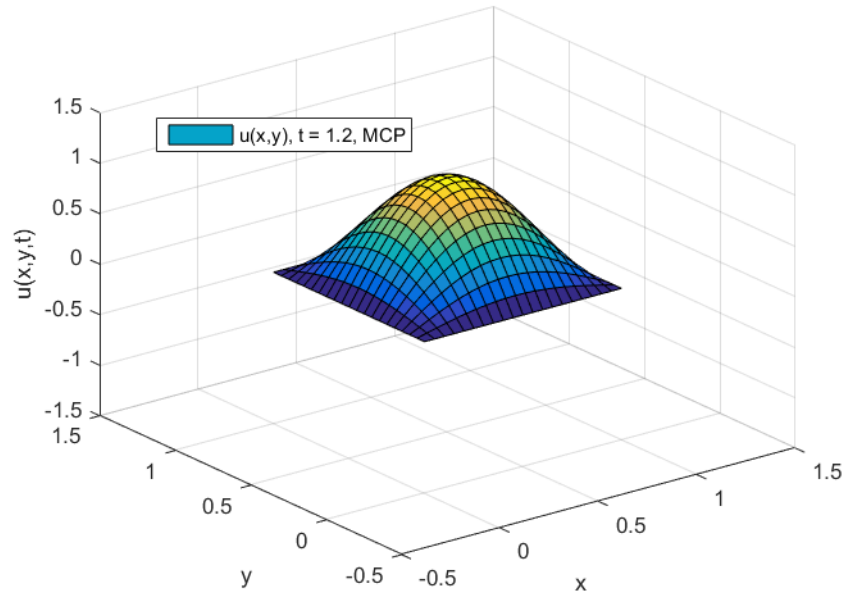


Рис. 4.3. Розв'язок задачі про коливання мембрани МСР ($t = 1.2$)

ВИСНОВКИ

1. При розв'язанні задач МСР і МСЕ з застосуванням метода Рітца варіаційний метод дає більш точне рішення. Отриманий наближений розв'язок апроксимує з великою точністю не тільки шукану функцію, а також і похідні.
2. Розв'язок хвильового рівняння в одновимірному випадку МСР дало похибку на порядок гірше ніж МСЕ. В якості функцій форми використовуються дворазово диференційовані функції.
3. Наближений розв'язок задачі коливання мембрани (двовимірне хвильове рівняння) дав досить велику похибку, в порівнянні з попередніми. Цей факт пояснюється зростанням СЛАР і нестійкістю розв'язку.

Таким чином МСЕ в основних задачах для диференціальних рівнянь в частинних похідних дає меншу похибку і може застосовуватися при необхідності знаходити диференціальні характеристики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бахвалов Н. С. Численные методы. М., 1973. – с. 62-64.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М, 1966. – с. 80-83.
3. Михлин С. Г. Некоторые вопросы теории погрешностей. Л. ЛГУ, 1988. – с. 103.
4. Красносельский М. А. Сходимость метода Галеркина для нелинейных уравнений//Докл. АН СРСР. 1950. Т. 73 № 6. – с. 15-20.
5. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рудицкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. М., 1969. – с. 83-84.
6. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. М., 1962. – с. 105-110.
7. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. Новосибирск, 1973. – с. 43-47.
8. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. 2-ге вид. М., 1970. – с. 60-70.
9. Яскова Г. Н., Яковлев М. Н. Некоторые условия устойчивости метода Петрова-Галеркина//Труды Мат. Ин-та им. В. А. Стеклова АН СРСР 1962. Т. 66. – с. 18-20.
10. Вайникко Г. М. Необходимое и достаточное условие устойчивости метода Галеркина-Петрова//Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1956. Вип. 177. – с. 32-38.
11. Ильин В. П. Свойства некоторых классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных в n-мерной области//Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СРСР. 1962. Т. 66. – с. 162-164
12. Демьянович Ю. К., Михлин С. Г. О сеточной аппроксимации функций соболевских классов//Зап. науч. Семина. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СРСР им В. А. Стеклова. 1973. Т. 35. – с. 283-284.
13. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. М., 1966. – с. 115-124.
14. Литвин О. М., Рвачов В. Л. Класична формула Тейлора , її узагальнення та застосування. К. Наукова думка, 1973р. – с. 80-91.

ДОДАТОК А

Програма для розв'язку задачі про згин балки МСР, реалізований у
MATLAB

% Початкові умови

$h = 1/50;$

% Матриця рівнянь

$E = \text{zeros}(1/h + 1);$

$E(1,1) = 1 ; E(2,1) = 1 ; ; E(2,2) = -2 ; E(2,3) = 1;$

for $i = 3 : 1/h - 1$ $E(i,[i - 2 : i + 2]) = [1 -4 6 -4 1];$ end

$E(1/h , 1/h) = -1; E(1/h , 1/h + 1) = 1; E(1/h + 1 , 1/h + 1) = 1;$

% Матриця правих частин

$R = \text{zeros}(1/h + 1,1);$

$R(3:1/h - 1) = h^4;$

% Наближений розв'язок та його порівняння з точним

$K = (E \setminus R)';$

$dK = [(K(2 : \text{length}(K)) - K(1 : \text{length}(K)-1))/h \ 0];$

$d2K = [0 (K(1 : \text{length}(K) - 2) - 2 * K(2 : \text{length}(K) - 1) + K(3 : \text{length}(K)))/h^2];$

ДОДАТОК Б

Програма для розв'язку задачі про згин балки МСЕ 2-го порядку,
реалізований у MATLAB

```

% Функції f0 та f1
syms t x h
M = int('t^2*(1 - t)^2',t,0,1);
fi_1 = expand((1/M)*int('t^2*(1 - t)^2',t,0,x/h));
fi_0 = 1 - fi_1;
h = 1/50;
% Матриця A початкова
A = zeros(3);
A(1,1) = eval(int(diff(fi_0,x,2)^2,x,0,h));
A(1,2) = eval(int(diff(fi_0,x,2)*diff(fi_0*(x/h),x,2),x,0,h));
A(1,3) = eval(int(diff(fi_0,x,2)*diff(fi_0*(x^2/(2*h^2)),x,2),x,0,h));
A(2,2) = eval(int(diff(fi_0*(x/h),x,2)^2,x,0,h));
A(2,3) = eval(int(diff(fi_0*(x/h),x,2)*diff(fi_0*(x^2/(2*h^2)),x,2),x,0,h));
A(3,3) = eval(int(diff(fi_0*(x^2/(2*h^2)),x,2)^2,x,0,h));
A(3,1) = A(1,3); A(3,2) = A(2,3); A(2,1) = A(1,2);
% Матриця B
B = zeros(3);
B(1,1) = eval(int(diff(fi_0,x,2)*diff(fi_1,x,2),x,0,h));
B(1,2) = eval(int(diff(fi_0,x,2)*diff(fi_1*((x - h)/h),x,2),x,0,h));
B(1,3) = eval(int(diff(fi_0,x,2)*diff(fi_1*((x - h)^2/(2*h^2)),x,2),x,0,h));
B(2,1) = eval(int(diff(fi_0*(x/h),x,2)*diff(fi_1,x,2),x,0,h));
B(2,2) = eval(int(diff(fi_0*(x/h),x,2)*diff(fi_1*((x - h)/h),x,2),x,0,h));

```

```
B(2,3) = eval(int(diff(fi_0*(x/h),x,2)*diff(fi_1*((x - h)^2/(2*h^2)),x,2),x,0,h));
```

```
B(3,1) = eval(int(diff(fi_0*(x^2/(2*h^2)),x,2)*diff(fi_1,x,2),x,0,h));
```

```
B(3,2) = eval(int(diff(fi_0*(x^2/(2*h^2)),x,2)*diff(fi_1*((x - h)/h),x,2),x,0,h));
```

```
B(3,3) = eval(int(diff(fi_0*(x^2/(2*h^2)),x,2)*diff(fi_1*((x - h)^2/(2*h^2)),x,2),x,0,h));
```

```
% Матриця рівнянь
```

```
E = zeros((1/h + 1)*3);
```

```
E(1:3,1:6) = [A B];
```

```
for i = 2 : 1/h E(3*i - 2 : 3*i , 3*i - 5 : 3*i + 3) = [B' 2*diag(diag(A)) B]; end
```

```
E((1/h + 1)*3 - 2 : (1/h + 1)*3 , (1/h)*3 - 2 : (1/h + 1)*3) = [B' -A + 2*diag(diag(A))];
```

```
E(1,:) = 0; E(1,1) = 1; E(3,:) = 0; E(3,3) = 1;
```

```
E((1/h + 1)*3 - 2 , :) = 0; E((1/h + 1)*3 - 2 , (1/h + 1)*3 - 2) = 1;
```

```
E((1/h + 1)*3 - 1 , :) = 0; E((1/h + 1)*3 - 1 , (1/h + 1)*3 - 1) = 1;
```

```
% Матриця правих частин
```

```
R1 = zeros(3,1);
```

```
R1(1) = eval(int(fi_0,x,0,h)); R1(2) = eval(int(fi_0*(x/h),x,0,h)); R1(3) = eval(int(fi_0*(x^2/(2*h^2)),x,0,h));
```

```
R2 = zeros(3,1);
```

```
R2(1) = eval(int(fi_1,x,0,h)); R2(2) = eval(int(fi_1*((x - h)/h),x,0,h)); R2(3) = eval(int(fi_1*((x - h)^2/(2*h^2)),x,0,h));
```

```
R = zeros((1/h + 1)*3,1);
```

```
R(1:3) = R1;
```

```
for i = 2 : 1/h R(3*i - 2 : 3*i) = R1 + R2; end
```

```
R((1/h + 1)*3 - 2 : (1/h + 1)*3) = R2;
```

```
R(1) = 0 ; R(3) = 0 ; R((1/h + 1)*3 - 2) = 0; R((1/h + 1)*3 - 1) = 0;
```

```
% Наближений розв'язок
```

$$K_t = E \setminus \mathbb{R};$$

$$K = K_t(\text{mod}(1 : \text{length}(K_t), 3) == 1)';$$

$$dK = (K_t(\text{mod}(1 : \text{length}(K_t), 3) == 2)')/h;$$

$$d2K = (K_t(\text{mod}(1 : \text{length}(K_t), 3) == 0)')/h^2;$$

ДОДАТОК В

Програма для розв'язку задачі про згин балки МСЕ 4-го порядку,
реалізований у MATLAB

% Функції f0 та f1

syms t x h

M = int('t^4*(1 - t)^4',t,0,1);

fi_1 = expand((1/M)*int('t^4*(1 - t)^4',t,0,x/h));

fi_0 = 1 - fi_1;

h = 1/50;

% Матриця A початкова

A = zeros(5);

A(1,1) = eval(int(diff(fi_0,x,2)^2,x,0,h));

A(1,2) = eval(int(diff(fi_0,x,2)*diff(fi_0*(x/h),x,2),x,0,h));

A(1,3) = eval(int(diff(fi_0,x,2)*diff(fi_0*(x^2/(2*h^2)),x,2),x,0,h));

A(1,4) = eval(int(diff(fi_0,x,2)*diff(fi_0*(x^3/(6*h^3)),x,2),x,0,h));

A(1,5) = eval(int(diff(fi_0,x,2)*diff(fi_0*(x^4/(24*h^4)),x,2),x,0,h));

A(2,2) = eval(int(diff(fi_0*(x/h),x,2)^2,x,0,h));

A(2,3) = eval(int(diff(fi_0*(x/h),x,2)*diff(fi_0*(x^2/(2*h^2)),x,2),x,0,h));

A(2,4) = eval(int(diff(fi_0*(x/h),x,2)*diff(fi_0*(x^3/(6*h^3)),x,2),x,0,h));

A(2,5) = eval(int(diff(fi_0*(x/h),x,2)*diff(fi_0*(x^4/(24*h^4)),x,2),x,0,h));

A(3,3) = eval(int(diff(fi_0*(x^2/(2*h^2)),x,2)^2,x,0,h));

A(3,4) = eval(int(diff(fi_0*(x^2/(2*h^2)),x,2)*diff(fi_0*(x^3/(6*h^3)),x,2),x,0,h));

A(3,5) =

eval(int(diff(fi_0*(x^2/(2*h^2)),x,2)*diff(fi_0*(x^4/(24*h^4)),x,2),x,0,h));

A(4,4) = eval(int(diff(fi_0*(x^3/(6*h^3)),x,2)^2,x,0,h));

```

A(4,5) =
eval(int(diff(fi_0*(x^3/(6*h^3)),x,2)*diff(fi_0*(x^4/(24*h^4)),x,2),x,0,h));

A(5,5) = eval(int(diff(fi_0*(x^4/(24*h^4)),x,2)^2,x,0,h));

A(2,1) = A(1,2); A(3,1) = A(1,3); A(3,2) = A(2,3); A(4,1) = A(1,4) ; A(4,2) =
A(2,4) ; A(4,3) = A(3,4);

A(5,1) = A(1,5) ; A(5,2) = A(2,5) ; A(5,3) = A(3,5) ; A(5,4) = A(4,5);

% Матриця A кінцева

Aend = zeros(5);

Aend(1,1) = eval(int(diff(fi_1,x,2)^2,x,0,h));

Aend(1,2) = eval(int(diff(fi_1,x,2)*diff(fi_1*((x - h)/h),x,2),x,0,h));

Aend(1,3) = eval(int(diff(fi_1,x,2)*diff(fi_1*((x - h)^2/(2*h^2)),x,2),x,0,h));

Aend(1,4) = eval(int(diff(fi_1,x,2)*diff(fi_1*((x - h)^3/(6*h^3)),x,2),x,0,h));

Aend(1,5) = eval(int(diff(fi_1,x,2)*diff(fi_1*((x - h)^4/(24*h^4)),x,2),x,0,h));

Aend(2,2) = eval(int(diff(fi_1*((x - h)/h),x,2)^2,x,0,h));

Aend(2,3) = eval(int(diff(fi_1*((x - h)/h),x,2)*diff(fi_1*((x -
h)^2/(2*h^2)),x,2),x,0,h));

Aend(2,4) = eval(int(diff(fi_1*((x - h)/h),x,2)*diff(fi_1*((x -
h)^3/(6*h^3)),x,2),x,0,h));

Aend(2,5) = eval(int(diff(fi_1*((x - h)/h),x,2)*diff(fi_1*((x -
h)^4/(24*h^4)),x,2),x,0,h));

Aend(3,3) = eval(int(diff(fi_1*((x - h)^2/(2*h^2)),x,2)^2,x,0,h));

Aend(3,4) = eval(int(diff(fi_1*((x - h)^2/(2*h^2)),x,2)*diff(fi_1*((x -
h)^3/(6*h^3)),x,2),x,0,h));

Aend(3,5) = eval(int(diff(fi_1*((x - h)^2/(2*h^2)),x,2)*diff(fi_1*((x -
h)^4/(24*h^4)),x,2),x,0,h));

Aend(4,4) = eval(int(diff(fi_1*((x - h)^3/(6*h^3)),x,2)^2,x,0,h));

Aend(4,5) = eval(int(diff(fi_1*((x - h)^3/(6*h^3)),x,2)*diff(fi_1*((x -
h)^4/(24*h^4)),x,2),x,0,h));

```

$A_{end}(5,5) = \text{eval}(\text{int}(\text{diff}(f_{i_1} * ((x - h)^4 / (24 * h^4)), x, 2)^2, x, 0, h));$

$A_{end}(2,1) = A_{end}(1,2); A_{end}(3,1) = A_{end}(1,3); A_{end}(3,2) = A_{end}(2,3); A_{end}(4,1) = A_{end}(1,4); A_{end}(4,2) = A_{end}(2,4); A_{end}(4,3) = A_{end}(3,4);$

$A_{end}(5,1) = A_{end}(1,5); A_{end}(5,2) = A_{end}(2,5); A_{end}(5,3) = A_{end}(3,5); A_{end}(5,4) = A_{end}(4,5);$

% Матрица B

$B = \text{zeros}(3);$

$B(1,1) = \text{eval}(\text{int}(\text{diff}(f_{i_0, x, 2}) * \text{diff}(f_{i_1, x, 2}), x, 0, h));$

$B(1,2) = \text{eval}(\text{int}(\text{diff}(f_{i_0, x, 2}) * \text{diff}(f_{i_1} * ((x - h) / h), x, 2), x, 0, h));$

$B(1,3) = \text{eval}(\text{int}(\text{diff}(f_{i_0, x, 2}) * \text{diff}(f_{i_1} * ((x - h)^2 / (2 * h^2))), x, 2), x, 0, h));$

$B(1,4) = \text{eval}(\text{int}(\text{diff}(f_{i_0, x, 2}) * \text{diff}(f_{i_1} * ((x - h)^3 / (6 * h^3))), x, 2), x, 0, h));$

$B(1,5) = \text{eval}(\text{int}(\text{diff}(f_{i_0, x, 2}) * \text{diff}(f_{i_1} * ((x - h)^4 / (24 * h^4))), x, 2), x, 0, h));$

$B(2,1) = \text{eval}(\text{int}(\text{diff}(f_{i_0} * (x / h), x, 2) * \text{diff}(f_{i_1, x, 2}), x, 0, h));$

$B(2,2) = \text{eval}(\text{int}(\text{diff}(f_{i_0} * (x / h), x, 2) * \text{diff}(f_{i_1} * ((x - h) / h), x, 2), x, 0, h));$

$B(2,3) = \text{eval}(\text{int}(\text{diff}(f_{i_0} * (x / h), x, 2) * \text{diff}(f_{i_1} * ((x - h)^2 / (2 * h^2))), x, 2), x, 0, h));$

$B(2,4) = \text{eval}(\text{int}(\text{diff}(f_{i_0} * (x / h), x, 2) * \text{diff}(f_{i_1} * ((x - h)^3 / (6 * h^3))), x, 2), x, 0, h));$

$B(2,5) = \text{eval}(\text{int}(\text{diff}(f_{i_0} * (x / h), x, 2) * \text{diff}(f_{i_1} * ((x - h)^4 / (24 * h^4))), x, 2), x, 0, h));$

$B(3,1) = \text{eval}(\text{int}(\text{diff}(f_{i_0} * (x^2 / (2 * h^2))), x, 2) * \text{diff}(f_{i_1, x, 2}), x, 0, h));$

$B(3,2) = \text{eval}(\text{int}(\text{diff}(f_{i_0} * (x^2 / (2 * h^2))), x, 2) * \text{diff}(f_{i_1} * ((x - h) / h), x, 2), x, 0, h));$

$B(3,3) = \text{eval}(\text{int}(\text{diff}(f_{i_0} * (x^2 / (2 * h^2))), x, 2) * \text{diff}(f_{i_1} * ((x - h)^2 / (2 * h^2))), x, 2), x, 0, h));$

$B(3,4) = \text{eval}(\text{int}(\text{diff}(f_{i_0} * (x^2 / (2 * h^2))), x, 2) * \text{diff}(f_{i_1} * ((x - h)^3 / (6 * h^3))), x, 2), x, 0, h));$

$B(3,5) = \text{eval}(\text{int}(\text{diff}(f_{i_0} * (x^2 / (2 * h^2))), x, 2) * \text{diff}(f_{i_1} * ((x - h)^4 / (24 * h^4))), x, 2), x, 0, h));$

$B(4,1) = \text{eval}(\text{int}(\text{diff}(f_{i_0} * (x^3 / (6 * h^3))), x, 2) * \text{diff}(f_{i_1, x, 2}), x, 0, h));$

$B(4,2) = \text{eval}(\text{int}(\text{diff}(f_{i_0} * (x^3 / (6 * h^3))), x, 2) * \text{diff}(f_{i_1} * ((x - h) / h), x, 2), x, 0, h));$

```
B(4,3) = eval(int(diff(fi_0*(x^3/(6*h^3)),x,2)*diff(fi_1*((x -
h)^2/(2*h^2)),x,2),x,0,h));
```

```
B(4,4) = eval(int(diff(fi_0*(x^3/(6*h^3)),x,2)*diff(fi_1*((x -
h)^3/(6*h^3)),x,2),x,0,h));
```

```
B(4,5) = eval(int(diff(fi_0*(x^3/(6*h^3)),x,2)*diff(fi_1*((x -
h)^4/(24*h^4)),x,2),x,0,h));
```

```
B(5,1) = eval(int(diff(fi_0*(x^4/(24*h^4)),x,2)*diff(fi_1,x,2),x,0,h));
```

```
B(5,2) = eval(int(diff(fi_0*(x^4/(24*h^4)),x,2)*diff(fi_1*((x - h)/h),x,2),x,0,h));
```

```
B(5,3) = eval(int(diff(fi_0*(x^4/(24*h^4)),x,2)*diff(fi_1*((x -
h)^2/(2*h^2)),x,2),x,0,h));
```

```
B(5,4) = eval(int(diff(fi_0*(x^4/(24*h^4)),x,2)*diff(fi_1*((x -
h)^3/(6*h^3)),x,2),x,0,h));
```

```
B(5,5) = eval(int(diff(fi_0*(x^4/(24*h^4)),x,2)*diff(fi_1*((x -
h)^4/(24*h^4)),x,2),x,0,h));
```

```
% Матриця рівнянь
```

```
E = zeros((1/h + 1)*5);
```

```
E(1:5,1:10) = [A B];
```

```
for i = 2 : 1/h E(5*i - 4 : 5*i , 5*i - 9 : 5*i + 5) = [B' A + Aend B]; end
```

```
E((1/h + 1)*5 - 4 : (1/h + 1)*5 , (1/h)*5 - 4 : (1/h + 1)*5) = [B' Aend];
```

```
E(1,:) = 0; E(1,1) = 1; E(3,:) = 0; E(3,3) = 1;
```

```
E((1/h + 1)*5 - 3 , :) = 0; E((1/h + 1)*5 - 3 , (1/h + 1)*5 - 3) = 1;
```

```
E((1/h + 1)*5 - 4 , :) = 0; E((1/h + 1)*5 - 4 , (1/h + 1)*5 - 4) = 1;
```

```
% Матриця правих частин
```

```
R1 = zeros(5,1);
```

```
R1(1) = eval(int(fi_0,x,0,h)); R1(2) = eval(int(fi_0*(x/h),x,0,h)); R1(3) =
eval(int(fi_0*(x^2/(2*h^2)),x,0,h));
```

```
R1(4) = eval(int(fi_0*(x^3/(6*h^3)),x,0,h)) ; R1(5) =
eval(int(fi_0*(x^4/(24*h^4)),x,0,h));
```



```

R2 = zeros(5,1);

R2(1) = eval(int(fi_1,x,0,h)); R2(2) = eval(int(fi_1*((x - h)/h),x,0,h)); R2(3) =
eval(int(fi_1*((x - h)^2/(2*h^2)),x,0,h));

R2(4) = eval(int(fi_1*((x - h)^3/(6*h^3)),x,0,h)) ; R2(5) = eval(int(fi_1*((x -
h)^4/(24*h^4)),x,0,h));

R = zeros((1/h + 1)*5,1);

R(1:5) = R1;

for i = 2 : 1/h  R(5*i - 4 : 5*i) = R1 + R2; end

R((1/h + 1)*5 - 4 : (1/h + 1)*5) = R2;

R(1) = 0; R(3) = 0 ; R((1/h + 1)*5 - 4) = 0 ; R((1/h + 1)*5 - 3) = 0;

% Наближений розв'язок

Kt = E\R;

K = Kt(mod(1 : length(Kt),5) == 1)';

dK = (Kt(mod(1 : length(Kt),5) == 2)')/h;

d2K = (Kt(mod(1 : length(Kt),5) == 3)')/h^2;

d3K = (Kt(mod(1 : length(Kt),5) == 4)')/h^3;

d4K = (Kt(mod(1 : length(Kt),5) == 0)')/h^4;

```

ДОДАТОК Д

Программа для розв'язку задачі про коливання струни МСР, реалізований у
MATLAB

% Початкові умови

$ax = 0$; $bx = 1$; $t0 = 0$; $t1 = 2$;

$h = 0.0125$; $tau = 0.025$; $a = 1$;

$m = \text{abs}((bx - ax)/h) + 1$; $o = \text{floor}(\text{abs}((t1 - t0)/tau)) + 1$;

$X = ax : h : bx$; $T = t0 : tau : t1$;

$E = \text{zeros}(m*(o+1), m*(o+1))$;

$R = \text{zeros}(m*(o+1), 1)$;

% Матриця правих частин

for $i = 1 : m$

$E(i, i) = 1$;

$R(i) = \sin(\pi * X(i))$;

end

$R(R < 0) = 0$;

% Матриця коефіцієнтів

for $k = 2 : o$

for $i = 1 : m$

if $i == 1$ || $i == m$

$E(m*(k-1)+i, m*(k-1)+i) = 1$;

else

$E(m*(k-1)+i, m*(k-1)+i) = -2/(tau^2) + 2*a^2/(h^2)$;

% Сусіди по горизонталі

$E(m*(k-1)+i, m*(k-1)+i+1) = -a^2/(h^2)$;

$E(m*(k-1)+i, m*(k-1)+i-1) = -a^2/(h^2)$;

```
% Сусіди за часовими слоями
```

$$E(m^{*(k-1)+i}, m^{*(k-2)+i}) = 1/(\tau^2);$$

$$E(m^{*(k-1)+i}, m^{*(k)+i}) = 1/(\tau^2);$$

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
for i = 1 : m
```

$$E(m^{*o+i}, m^{*o+i}) = 1;$$

$$E(m^{*o+i}, m^{*(o-2)+i}) = -1;$$

```
end
```

```
% Наближений розв'язок
```

$$K = E \setminus R;$$

ДОДАТОК Е

Програма для розв'язку задачі про коливання струни МСЕ, реалізований у
MATLAB

% Початкові умови

ax = 0 ; bx = 1 ; t0 = 0 ; t1 = 2 ;

h = 0.0125 ; tau = 0.025 ; a = 1 ;

m = abs((bx - ax)/h) + 1 ; o = floor(abs((t1 - t0)/tau)) + 1 ;

X = ax : h : bx ; T = t0 : tau : t1 ;

E = zeros(m*o , m*o) ;

R = zeros(m*o , 1) ;

syms x t ;

% Функції форми

fi_cl_x = 3*(x/h)^2 + 2*(x/h)^3 ;

fi_cr_x = 3*(x/h)^2 - 2*(x/h)^3 ;

fi_nl_x = 1 - 3*(x/h)^2 + 2*(x/h)^3 ;

fi_nr_x = 1 - 3*(x/h)^2 - 2*(x/h)^3 ;

fi_cl_t = 3*(t/tau)^2 + 2*(t/tau)^3 ;

fi_cr_t = 3*(t/tau)^2 - 2*(t/tau)^3 ;

fi_nl_t = 1 - 3*(t/tau)^2 + 2*(t/tau)^3 ;

fi_nr_t = 1 - 3*(t/tau)^2 - 2*(t/tau)^3 ;

% Коефіцієнти матриці

coef_right_up = int(int((fi_cr_x*diff(fi_cl_t,2) -
diff(fi_cr_x,2)*fi_cl_t)*fi_nl_x*fi_nr_t, t , [-tau 0]), x , [0 h]) ;

coef_up = int(int((fi_nr_x*diff(fi_cl_t,2) - diff(fi_nr_x,2)*fi_cl_t)*fi_nr_x*fi_nr_t,
t , [-tau 0]), x , [-h 0]) + int(int((fi_nl_x*diff(fi_cl_t,2) -
diff(fi_nl_x,2)*fi_cl_t)*fi_nl_x*fi_nr_t, t , [-tau 0]), x , [0 h]) ;

$$\text{coef_left_up} = \text{int}(\text{int}((\text{fi_cl_x} * \text{diff}(\text{fi_cl_t}, 2) - \text{diff}(\text{fi_cl_x}, 2) * \text{fi_cl_t}) * \text{fi_nr_x} * \text{fi_nr_t}, t, [-\text{tau } 0]), x, [-h \ 0]);$$

$$\begin{aligned} \text{coef_left_not_last} = & \text{int}(\text{int}((\text{fi_cl_x} * \text{diff}(\text{fi_nr_t}, 2) - \text{diff}(\text{fi_cl_x}, 2) * \text{fi_nr_t}) * \text{fi_nr_x} * \text{fi_nr_t}, t, [-\text{tau } 0]), x, [-h \ 0]) + \\ & \text{int}(\text{int}((\text{fi_cl_x} * \text{diff}(\text{fi_nl_t}, 2) - \text{diff}(\text{fi_cl_x}, 2) * \text{fi_nl_t}) * \text{fi_nr_x} * \text{fi_nl_t}, t, [0 \ \text{tau}]), \\ & x, [-h \ 0]); \end{aligned}$$

$$\text{coef_left_last} = \text{int}(\text{int}((\text{fi_cl_x} * \text{diff}(\text{fi_nr_t}, 2) - \text{diff}(\text{fi_cl_x}, 2) * \text{fi_nr_t}) * \text{fi_nr_x} * \text{fi_nr_t}, t, [-\text{tau } 0]), x, [-h \ 0]);$$

$$\text{coef_left_down} = \text{int}(\text{int}((\text{fi_cl_x} * \text{diff}(\text{fi_cr_t}, 2) - \text{diff}(\text{fi_cl_x}, 2) * \text{fi_cr_t}) * \text{fi_nr_x} * \text{fi_nl_t}, t, [0 \ \text{tau}]), x, [-h \ 0]);$$

$$\begin{aligned} \text{coef_down} = & \text{int}(\text{int}((\text{fi_nr_x} * \text{diff}(\text{fi_cr_t}, 2) - \text{diff}(\text{fi_nr_x}, 2) * \text{fi_cr_t}) * \text{fi_nr_x} * \text{fi_nl_t}, t, [0 \ \text{tau}]), x, [-h \ 0]) + \\ & \text{int}(\text{int}((\text{fi_nl_x} * \text{diff}(\text{fi_cr_t}, 2) - \text{diff}(\text{fi_nl_x}, 2) * \text{fi_cr_t}) * \text{fi_nl_x} * \text{fi_nl_t}, t, [0 \ \text{tau}]), \\ & x, [0 \ h]); \end{aligned}$$

$$\text{coef_right_down} = \text{int}(\text{int}((\text{fi_cr_x} * \text{diff}(\text{fi_cr_t}, 2) - \text{diff}(\text{fi_cr_x}, 2) * \text{fi_cr_t}) * \text{fi_nl_x} * \text{fi_nl_t}, t, [0 \ \text{tau}]), x, [0 \ h]);$$

$$\begin{aligned} \text{coef_right_not_last} = & \text{int}(\text{int}((\text{fi_cr_x} * \text{diff}(\text{fi_nr_t}, 2) - \text{diff}(\text{fi_cr_x}, 2) * \text{fi_nr_t}) * \text{fi_nl_x} * \text{fi_nr_t}, t, [-\text{tau } 0]), x, [0 \ h]) + \\ & \text{int}(\text{int}((\text{fi_cr_x} * \text{diff}(\text{fi_nl_t}, 2) - \text{diff}(\text{fi_cr_x}, 2) * \text{fi_nl_t}) * \text{fi_nl_x} * \text{fi_nl_t}, t, [0 \ \text{tau}]), \\ & x, [0 \ h]); \end{aligned}$$

$$\text{coef_right_last} = \text{int}(\text{int}((\text{fi_cr_x} * \text{diff}(\text{fi_nr_t}, 2) - \text{diff}(\text{fi_cr_x}, 2) * \text{fi_nr_t}) * \text{fi_nl_x} * \text{fi_nr_t}, t, [-\text{tau } 0]), x, [0 \ h]);$$

$$\begin{aligned} \text{coef_centre_not_last} = & \text{int}(\text{int}((\text{fi_nl_x} * \text{diff}(\text{fi_nr_t}, 2) - \text{diff}(\text{fi_nl_x}, 2) * \text{fi_nr_t}) * \text{fi_nl_x} * \text{fi_nr_t}, t, [-\text{tau } 0]), x, [0 \ h]) + \\ & \text{int}(\text{int}((\text{fi_nr_x} * \text{diff}(\text{fi_nr_t}, 2) - \text{diff}(\text{fi_nr_x}, 2) * \text{fi_nr_t}) * \text{fi_nr_x} * \text{fi_nr_t}, t, [-\text{tau } \\ & 0]), x, [-h \ 0]) + \text{int}(\text{int}((\text{fi_nr_x} * \text{diff}(\text{fi_nl_t}, 2) - \text{diff}(\text{fi_nr_x}, 2) * \text{fi_nl_t}) * \text{fi_nr_x} * \text{fi_nl_t}, t, [0 \ \text{tau}]), \\ & x, [-h \ 0]) + \\ & \text{int}(\text{int}((\text{fi_nl_x} * \text{diff}(\text{fi_nl_t}, 2) - \text{diff}(\text{fi_nl_x}, 2) * \text{fi_nl_t}) * \text{fi_nl_x} * \text{fi_nl_t}, t, [0 \ \text{tau}]), \\ & x, [0 \ h]); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{coef_centre_last} = & \text{int}(\text{int}((\text{fi_nl_x} * \text{diff}(\text{fi_nr_t}, 2) - \text{diff}(\text{fi_nl_x}, 2) * \text{fi_nr_t}) * \text{fi_nl_x} * \text{fi_nr_t}, t, [-\text{tau } 0]), x, [0 \ h]) + \\ & \text{int}(\text{int}((\text{fi_nr_x} * \text{diff}(\text{fi_nr_t}, 2) - \text{diff}(\text{fi_nr_x}, 2) * \text{fi_nr_t}) * \text{fi_nr_x} * \text{fi_nr_t}, t, [-\text{tau } \\ & 0]), x, [-h \ 0]); \end{aligned}$$

```

% Матриця коефіцієнтів та правих частин
for i = 1 : m
    E(i , i) = 1 ;
    R(i) = sin(pi*X(i)) ;
end
R(R<0) = 0;
for k = 2 : o
    for i = 1 : m
        if i == 1 || i == m
            E(m*(k-1)+i , m*(k-1)+i) = 1 ;
        else
            if k ~= o
                E(m*(k-1)+i , m*(k-1)+i) = coef_centre_not_last ;
            %   Сусіди по горизонталі
                E(m*(k-1)+i , m*(k-1)+i+1) = coef_right_not_last ;
                E(m*(k-1)+i , m*(k-1)+i-1) = coef_left_not_last ;
            %   Сусіди за часовими слоями
                E(m*(k-1)+i , m*(k-2)+i) = coef_up ;
                E(m*(k-1)+i , m*(k)+i) = coef_down ;
            %   Сусіди по кутах
                E(m*(k-1)+i , m*(k-2)+i-1) = coef_left_up ;
                E(m*(k-1)+i , m*(k-2)+i+1) = coef_right_up ;
                E(m*(k-1)+i , m*(k)+i-1) = coef_left_down ;
                E(m*(k-1)+i , m*(k)+i+1) = coef_right_down ;
            end
        end
    end
end

```

```

        if k == 0
            E(m*(k-1)+i , m*(k-1)+i) = coef_centre_last ;
%   Сусіди по горизонталі
            E(m*(k-1)+i , m*(k-1)+i+1) = coef_right_last ;
            E(m*(k-1)+i , m*(k-1)+i-1) = coef_left_last ;
%   Сусіди за часовими слоями
            E(m*(k-1)+i , m*(k-2)+i) = coef_up ;
%   Сусіди по кутах
            E(m*(k-1)+i , m*(k-2)+i-1) = coef_left_up ;
            E(m*(k-1)+i , m*(k-2)+i+1) = coef_right_up ;
        end
    end
end
% Наближений розв'язок
K = E\R ;

```

ДОДАТОК Ж

Програма для розв'язку задачі про коливання мембрани МСР, реалізований у MATLAB

```
% Початкові умови
```

```
ax = 0 ; bx = 1 ; ay = 0 ; by = 1 ; t0 = 0 ; t1 = 2 ;
```

```
hx = 0.05 ; hy = 0.05 ; tau = 0.1 ; a = 1 ;
```

```
n = abs((by - ay)/hy) + 1 ; m = abs((bx - ax)/hx) + 1 ; o = abs((t1 - t0)/tau) + 1 ;
```

```
X = ax : hx : bx ; Y = ay : hy : by ; T = t0 : tau : t1 ;
```

```
E = zeros(m*n*(o+1) , m*n*(o+1)) ;
```

```
R = zeros(m*n*(o+1) , 1) ;
```

```
for i = 1 : n
```

```
    for j = 1 : m
```

```
        E(m*(i-1)+j , m*(i-1)+j) = 1 ;
```

```
        R(m*(i-1)+j) = sin(pi*X(j)) * sin(pi*Y(i)) ;
```

```
    end
```

```
end
```

```
% Матриця коефіцієнтів
```

```
for k = 2 : o
```

```
    for i = 1 : n
```

```
        for j = 1 : m
```

```
            if i == 1 || i == n || j == 1 || j == m
```

```
                E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i-1)+j) = 1 ;
```

```
            else
```



```

        E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i-1)+j) = -2/(tau^2) +
        2*a^2/(hx^2) + 2*a^2/(hy^2) ;
% Сусіди по горизонталі
        E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i-1)+j+1) = -
        a^2/(hx^2) ;
        E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i-1)+j-1) = -
        a^2/(hx^2) ;
% Сусіди по вертикалі
        E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i-2)+j) = -a^2/(hy^2) ;
        E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i)+j) = -a^2/(hy^2) ;
% Сусіди за часовими слоями
        E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-2)+m*(i-1)+j) = 1/(tau^2) ;
        E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k)+m*(i-1)+j) = 1/(tau^2) ;

        end

        end

        end

end

for i = 1 : n

        for j = 1 : m

                E(m*n*o+m*(i-1)+j , m*n*o+m*(i-1)+j) = 1 ;

                if i ~= 1 && i ~= n && j ~= 1 && j ~= m

                        E(m*n*o+m*(i-1)+j , m*n*(o-2)+m*(i-1)+j) = -1 ;

                end

        end

end

% Наближений розв'язок

```

$K = E \setminus R$;

ДОДАТОК 3

Програма для розв'язку задачі про коливання мембрани МСЕ, реалізований у MATLAB

% Початкові умови

$ax = 0$; $bx = 1$; $ay = 0$; $by = 1$; $t0 = 0$; $t1 = 0.02$;

$hx = 0.1$; $hy = 0.1$; $tau = 0.01$;

$n = \text{abs}((by - ay)/hy) + 1$; $m = \text{abs}((bx - ax)/hx) + 1$; $o = \text{abs}((t1 - t0)/tau) + 1$;

$X = ax : hx : bx$; $Y = ay : hy : by$; $T = t0 : tau : t1$;

$E = \text{zeros}(m*n*o, m*n*o)$;

$R = \text{zeros}(m*n*o, 1)$;

% Функції форми

$\text{syms } x \ y \ t$;

$fi_cl_x = 3*(x/hx)^2 + 2*(x/hx)^3$;

$fi_cr_x = 3*(x/hx)^2 - 2*(x/hx)^3$;

$fi_nl_x = 1 - 3*(x/hx)^2 + 2*(x/hx)^3$;

$fi_nr_x = 1 - 3*(x/hx)^2 - 2*(x/hx)^3$;

$fi_cl_y = 3*(y/hy)^2 + 2*(y/hy)^3$;

$fi_cr_y = 3*(y/hy)^2 - 2*(y/hy)^3$;

$fi_nl_y = 1 - 3*(y/hy)^2 + 2*(y/hy)^3$;

$fi_nr_y = 1 - 3*(y/hy)^2 - 2*(y/hy)^3$;

$fi_cl_t = 3*(t/tau)^2 + 2*(t/tau)^3$;

$fi_cr_t = 3*(t/tau)^2 - 2*(t/tau)^3$;

$fi_nl_t = 1 - 3*(t/tau)^2 + 2*(t/tau)^3$;

$$fi_nr_t = 1 - 3*(t/tau)^2 - 2*(t/tau)^3 ;$$

% Сусіди за k-тим часовим шаром

```
E_centre_k = eval(int(int(int((fi_nr_x*fi_nr_y*diff(fi_nr_t,t,2) -
fi_nr_y*fi_nr_t*diff(fi_nr_x,x,2) -
fi_nr_x*fi_nr_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nr_y*fi_nr_t ,x,-hx,0),y,-hy,0),t,-
tau,0)) + eval(int(int(int((fi_nl_x*fi_nr_y*diff(fi_nr_t,t,2) -
fi_nr_y*fi_nr_t*diff(fi_nl_x,x,2) -
fi_nl_x*fi_nr_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nr_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,-hy,0),t,-
tau,0)) + eval(int(int(int((fi_nr_x*fi_nl_y*diff(fi_nr_t,t,2) -
fi_nl_y*fi_nr_t*diff(fi_nr_x,x,2) -
fi_nr_x*fi_nr_t*diff(fi_nl_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,-hx,0),y,0,hy),t,-
tau,0)) + eval(int(int(int((fi_nl_x*fi_nl_y*diff(fi_nr_t,t,2) -
fi_nl_y*fi_nr_t*diff(fi_nl_x,x,2) -
fi_nl_x*fi_nr_t*diff(fi_nl_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,0,hy),t,-
tau,0)) + eval(int(int(int((fi_nr_x*fi_nr_y*diff(fi_nr_t,t,2) -
fi_nr_y*fi_nr_t*diff(fi_nr_x,x,2) -
fi_nr_x*fi_nr_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nr_y*fi_nr_t ,x,-hx,0),y,-
hy,0),t,0,tau)) + eval(int(int(int((fi_nr_x*fi_nr_y*diff(fi_nr_t,t,2) -
fi_nr_y*fi_nr_t*diff(fi_nr_x,x,2) -
fi_nr_x*fi_nr_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nr_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,-
hy,0),t,0,tau)) + eval(int(int(int((fi_nr_x*fi_nr_y*diff(fi_nr_t,t,2) -
fi_nr_y*fi_nr_t*diff(fi_nr_x,x,2) -
fi_nr_x*fi_nr_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nr_y*fi_nr_t ,x,-
hx,0),y,0,hy),t,0,tau)) + eval(int(int(int((fi_nr_x*fi_nr_y*diff(fi_nr_t,t,2) -
fi_nr_y*fi_nr_t*diff(fi_nr_x,x,2) -
fi_nr_x*fi_nr_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nr_y*fi_nr_t
,x,0,hx),y,0,hy),t,0,tau));
```

```
E_centre_k_not_last = eval(int(int(int((fi_nr_x*fi_nr_y*diff(fi_nr_t,t,2) -
fi_nr_y*fi_nr_t*diff(fi_nr_x,x,2) -
fi_nr_x*fi_nr_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nr_y*fi_nr_t ,x,-hx,0),y,-hy,0),t,-
tau,0)) + eval(int(int(int((fi_nr_x*fi_nr_y*diff(fi_nr_t,t,2) -
fi_nr_y*fi_nr_t*diff(fi_nr_x,x,2) -
fi_nr_x*fi_nr_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nr_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,-hy,0),t,-
tau,0)) + eval(int(int(int((fi_nr_x*fi_nr_y*diff(fi_nr_t,t,2) -
fi_nr_y*fi_nr_t*diff(fi_nr_x,x,2) -
fi_nr_x*fi_nr_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nr_y*fi_nr_t
,x,0,hx),y,0,hy),t,0,tau));
```

$$\begin{aligned} & \text{fi_nr_x*fi_nr_t*diff(fi_nl_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,-hx,0),y,0,hy),t,-} \\ & \text{tau,0)) + eval(int(int(int((fi_nl_x*fi_nl_y*diff(fi_nr_t,t,2) -} \\ & \text{fi_nl_y*fi_nr_t*diff(fi_nl_x,x,2) -} \\ & \text{fi_nl_x*fi_nr_t*diff(fi_nl_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,0,hy),t,-} \\ & \text{tau,0));} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{E_right_k} &= \text{eval(int(int(int((fi_cr_x*fi_nr_y*diff(fi_nr_t,t,2) -} \\ & \text{fi_nr_y*fi_nr_t*diff(fi_cr_x,x,2) -} \\ & \text{fi_cr_x*fi_nr_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nr_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,-hy,0),t,-} \\ & \text{tau,0)) + eval(int(int(int((fi_cr_x*fi_nl_y*diff(fi_nr_t,t,2) -} \\ & \text{fi_nl_y*fi_nr_t*diff(fi_cr_x,x,2) -} \\ & \text{fi_cr_x*fi_nr_t*diff(fi_nl_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,0,hy),t,-} \\ & \text{tau,0)) + eval(int(int(int((fi_cr_x*fi_nr_y*diff(fi_nl_t,t,2) -} \\ & \text{fi_nr_y*fi_nl_t*diff(fi_cr_x,x,2) -} \\ & \text{fi_cr_x*fi_nl_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nr_y*fi_nl_t ,x,0,hx),y,-} \\ & \text{hy,0),t,0,tau)) + eval(int(int(int((fi_cr_x*fi_nl_y*diff(fi_nl_t,t,2) -} \\ & \text{fi_nl_y*fi_nl_t*diff(fi_cr_x,x,2) -} \\ & \text{fi_cr_x*fi_nl_t*diff(fi_nl_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nl_y*fi_nl_t} \\ & \text{,x,0,hx),y,0,hy),t,0,tau));} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{E_right_k_not_last} &= \text{eval(int(int(int((fi_cr_x*fi_nr_y*diff(fi_nr_t,t,2) -} \\ & \text{fi_nr_y*fi_nr_t*diff(fi_cr_x,x,2) -} \\ & \text{fi_cr_x*fi_nr_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nr_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,-hy,0),t,-} \\ & \text{tau,0)) + eval(int(int(int((fi_cr_x*fi_nl_y*diff(fi_nr_t,t,2) -} \\ & \text{fi_nl_y*fi_nr_t*diff(fi_cr_x,x,2) -} \\ & \text{fi_cr_x*fi_nr_t*diff(fi_nl_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,0,hy),t,-} \\ & \text{tau,0));} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{E_right_up_k} &= \text{eval(int(int(int((fi_cr_x*fi_cl_y*diff(fi_nr_t,t,2) -} \\ & \text{fi_cl_y*fi_nr_t*diff(fi_cr_x,x,2) -} \\ & \text{fi_cr_x*fi_nr_t*diff(fi_cl_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nr_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,-hy,0),t,-} \\ & \text{tau,0)) + eval(int(int(int((fi_cr_x*fi_cl_y*diff(fi_nl_t,t,2) -} \\ & \text{fi_cl_y*fi_nl_t*diff(fi_cr_x,x,2) -} \\ & \text{fi_cr_x*fi_nl_t*diff(fi_cl_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nr_y*fi_nl_t ,x,0,hx),y,-} \\ & \text{hy,0),t,0,tau));} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{E_right_up_k_not_last} &= \text{eval(int(int(int((fi_cr_x*fi_cl_y*diff(fi_nr_t,t,2) -} \\ & \text{fi_cl_y*fi_nr_t*diff(fi_cr_x,x,2) -} \\ & \text{fi_cr_x*fi_nr_t*diff(fi_cl_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nr_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,-hy,0),t,-} \\ & \text{tau,0));} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{fi_cl_x*fi_nr_t*diff(fi_nl_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,-hx,0),y,0,hy),t,-} \\ & \text{tau,0)) + eval(int(int(int((fi_cl_x*fi_nr_y*diff(fi_nl_t,t,2) -} \\ & \text{fi_nr_y*fi_nl_t*diff(fi_cl_x,x,2) -} \\ & \text{fi_cl_x*fi_nl_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nr_y*fi_nl_t ,x,-hx,0),y,-} \\ & \text{hy,0),t,0,tau)) + eval(int(int(int((fi_cl_x*fi_nl_y*diff(fi_nl_t,t,2) -} \\ & \text{fi_nl_y*fi_nl_t*diff(fi_cl_x,x,2) -} \\ & \text{fi_cl_x*fi_nl_t*diff(fi_nl_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nl_y*fi_nl_t ,x,-} \\ & \text{hx,0),y,0,hy),t,0,tau));} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_left_k_not_last &= \text{eval(int(int(int((fi_cl_x*fi_nr_y*diff(fi_nr_t,t,2) -} \\ & \text{fi_nr_y*fi_nr_t*diff(fi_cl_x,x,2) -} \\ & \text{fi_cl_x*fi_nr_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nr_y*fi_nr_t ,x,-hx,0),y,-hy,0),t,-} \\ & \text{tau,0)) + eval(int(int(int((fi_cl_x*fi_nl_y*diff(fi_nr_t,t,2) -} \\ & \text{fi_nl_y*fi_nr_t*diff(fi_cl_x,x,2) -} \\ & \text{fi_cl_x*fi_nr_t*diff(fi_nl_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,-hx,0),y,0,hy),t,-} \\ & \text{tau,0));} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_left_down_k &= \text{eval(int(int(int((fi_cl_x*fi_cr_y*diff(fi_nr_t,t,2) -} \\ & \text{fi_cr_y*fi_nr_t*diff(fi_cl_x,x,2) -} \\ & \text{fi_cl_x*fi_nr_t*diff(fi_cr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,-hx,0),y,0,hy),t,-} \\ & \text{tau,0)) + eval(int(int(int((fi_cl_x*fi_cr_y*diff(fi_nl_t,t,2) -} \\ & \text{fi_cr_y*fi_nl_t*diff(fi_cl_x,x,2) -} \\ & \text{fi_cl_x*fi_nl_t*diff(fi_cr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nl_y*fi_nl_t ,x,-} \\ & \text{hx,0),y,0,hy),t,0,tau));} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_left_down_k_not_last &= \text{eval(int(int(int((fi_cl_x*fi_cr_y*diff(fi_nr_t,t,2) -} \\ & \text{fi_cr_y*fi_nr_t*diff(fi_cl_x,x,2) -} \\ & \text{fi_cl_x*fi_nr_t*diff(fi_cr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,-hx,0),y,0,hy),t,-} \\ & \text{tau,0));} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_down_k &= \text{eval(int(int(int((fi_nr_x*fi_cr_y*diff(fi_nr_t,t,2) -} \\ & \text{fi_cr_y*fi_nr_t*diff(fi_nr_x,x,2) -} \\ & \text{fi_nr_x*fi_nr_t*diff(fi_cr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,-hx,0),y,0,hy),t,-} \\ & \text{tau,0)) + eval(int(int(int((fi_nl_x*fi_cr_y*diff(fi_nr_t,t,2) -} \\ & \text{fi_cr_y*fi_nr_t*diff(fi_nl_x,x,2) -} \\ & \text{fi_nl_x*fi_nr_t*diff(fi_cr_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,0,hy),t,-} \\ & \text{tau,0)) + eval(int(int(int((fi_nr_x*fi_cr_y*diff(fi_nl_t,t,2) -} \\ & \text{fi_cr_y*fi_nl_t*diff(fi_nr_x,x,2) -} \\ & \text{fi_nr_x*fi_nl_t*diff(fi_cr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nl_y*fi_nl_t ,x,-} \\ & \text{hx,0),y,0,hy),t,0,tau)) + eval(int(int(int((fi_nl_x*fi_cr_y*diff(fi_nl_t,t,2) -} \end{aligned}$$

fi_cr_y*fi_nl_t*diff(fi_nl_x,x,2) -
 fi_nl_x*fi_nl_t*diff(fi_cr_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nl_y*fi_nl_t
 ,x,0,hx),y,0,hy),t,0,tau));

E_down_k_not_last = eval(int(int(int((fi_nr_x*fi_cr_y*diff(fi_nr_t,t,2) -
 fi_cr_y*fi_nr_t*diff(fi_nr_x,x,2) -
 fi_nr_x*fi_nr_t*diff(fi_cr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,-hx,0),y,0,hy),t,-
 tau,0)) + eval(int(int(int((fi_nl_x*fi_cr_y*diff(fi_nr_t,t,2) -
 fi_cr_y*fi_nr_t*diff(fi_nl_x,x,2) -
 fi_nl_x*fi_nr_t*diff(fi_cr_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,0,hy),t,-
 tau,0));

E_right_down_k = eval(int(int(int((fi_cr_x*fi_cr_y*diff(fi_nr_t,t,2) -
 fi_cr_y*fi_nr_t*diff(fi_cr_x,x,2) -
 fi_cr_x*fi_nr_t*diff(fi_cr_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,0,hy),t,-
 tau,0)) + eval(int(int(int((fi_cr_x*fi_cr_y*diff(fi_nl_t,t,2) -
 fi_cr_y*fi_nl_t*diff(fi_cr_x,x,2) -
 fi_cr_x*fi_nl_t*diff(fi_cr_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nl_y*fi_nl_t
 ,x,0,hx),y,0,hy),t,0,tau));

E_right_down_k_not_last = eval(int(int(int((fi_cr_x*fi_cr_y*diff(fi_nr_t,t,2) -
 fi_cr_y*fi_nr_t*diff(fi_cr_x,x,2) -
 fi_cr_x*fi_nr_t*diff(fi_cr_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,0,hy),t,-
 tau,0));

% Сусіди за k-1-шим часовим шаром

E_centre_kmin1 = eval(int(int(int((fi_nr_x*fi_nr_y*diff(fi_cl_t,t,2) -
 fi_nr_y*fi_cl_t*diff(fi_nr_x,x,2) -
 fi_nr_x*fi_cl_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nr_y*fi_nr_t ,x,-hx,0),y,-hy,0),t,-
 tau,0)) + eval(int(int(int((fi_nr_x*fi_nl_y*diff(fi_cl_t,t,2) -
 fi_nl_y*fi_cl_t*diff(fi_nr_x,x,2) -
 fi_nr_x*fi_cl_t*diff(fi_nl_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,-hx,0),y,0,hy),t,-
 tau,0)) + eval(int(int(int((fi_nl_x*fi_nr_y*diff(fi_cl_t,t,2) -
 fi_nr_y*fi_cl_t*diff(fi_nl_x,x,2) -
 fi_nl_x*fi_cl_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nr_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,-hy,0),t,-
 tau,0)) + eval(int(int(int((fi_nl_x*fi_nl_y*diff(fi_cl_t,t,2) -
 fi_nl_y*fi_cl_t*diff(fi_nl_x,x,2) -
 fi_nl_x*fi_cl_t*diff(fi_nl_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,0,hy),t,-
 tau,0));

$$E_right_kmin1 = eval(int(int(int((fi_cr_x*fi_nr_y*diff(fi_cl_t,t,2) - fi_nr_y*fi_cl_t*diff(fi_cr_x,x,2) - fi_cr_x*fi_cl_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nr_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,-hy,0),t,-tau,0)) + eval(int(int(int((fi_cr_x*fi_nl_y*diff(fi_cl_t,t,2) - fi_nl_y*fi_cl_t*diff(fi_cr_x,x,2) - fi_cr_x*fi_cl_t*diff(fi_nl_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,0,hy),t,-tau,0));$$

$$E_right_up_kmin1 = eval(int(int(int((fi_cr_x*fi_cl_y*diff(fi_cl_t,t,2) - fi_cl_y*fi_cl_t*diff(fi_cr_x,x,2) - fi_cr_x*fi_cl_t*diff(fi_cl_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nr_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,-hy,0),t,-tau,0));$$

$$E_up_kmin1 = eval(int(int(int((fi_nr_x*fi_cl_y*diff(fi_cl_t,t,2) - fi_cl_y*fi_cl_t*diff(fi_nr_x,x,2) - fi_nr_x*fi_cl_t*diff(fi_cl_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nr_y*fi_nr_t ,x,-hx,0),y,-hy,0),t,-tau,0)) + eval(int(int(int((fi_nl_x*fi_cl_y*diff(fi_cl_t,t,2) - fi_cl_y*fi_cl_t*diff(fi_nl_x,x,2) - fi_nl_x*fi_cl_t*diff(fi_cl_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nr_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,-hy,0),t,-tau,0));$$

$$E_left_up_kmin1 = eval(int(int(int((fi_cl_x*fi_cl_y*diff(fi_cl_t,t,2) - fi_cl_y*fi_cl_t*diff(fi_cl_x,x,2) - fi_cl_x*fi_cl_t*diff(fi_cl_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nr_y*fi_nr_t ,x,-hx,0),y,-hy,0),t,-tau,0));$$

$$E_left_kmin1 = eval(int(int(int((fi_cl_x*fi_nr_y*diff(fi_cl_t,t,2) - fi_nr_y*fi_cl_t*diff(fi_cl_x,x,2) - fi_cl_x*fi_cl_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nr_y*fi_nr_t ,x,-hx,0),y,-hy,0),t,-tau,0)) + eval(int(int(int((fi_cl_x*fi_nl_y*diff(fi_cl_t,t,2) - fi_nl_y*fi_cl_t*diff(fi_cl_x,x,2) - fi_cl_x*fi_cl_t*diff(fi_nl_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,-hx,0),y,0,hy),t,-tau,0));$$

$$E_left_down_kmin1 = eval(int(int(int((fi_cl_x*fi_cr_y*diff(fi_cl_t,t,2) - fi_cr_y*fi_cl_t*diff(fi_cl_x,x,2) - fi_cl_x*fi_cl_t*diff(fi_cr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,-hx,0),y,0,hy),t,-tau,0));$$

$$E_down_kmin1 = eval(int(int(int((fi_nr_x*fi_cr_y*diff(fi_cl_t,t,2) - fi_cr_y*fi_cl_t*diff(fi_nr_x,x,2) -$$


```

fi_nr_x*fi_cl_t*diff(fi_cr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,-hx,0),y,0,hy),t,-
tau,0)) + eval(int(int(int((fi_nl_x*fi_cr_y*diff(fi_cl_t,t,2) -
fi_cr_y*fi_cl_t*diff(fi_nl_x,x,2) -
fi_nl_x*fi_cl_t*diff(fi_cr_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,0,hy),t,-
tau,0));

```

```

E_right_down_kmin1 = eval(int(int(int((fi_cr_x*fi_cr_y*diff(fi_cl_t,t,2) -
fi_cr_y*fi_cl_t*diff(fi_cr_x,x,2) -
fi_cr_x*fi_cl_t*diff(fi_cr_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nl_y*fi_nr_t ,x,0,hx),y,0,hy),t,-
tau,0));

```

% Суєиди за k+1-шим часовим шаром

```

E_centre_kplus1 = eval(int(int(int((fi_nr_x*fi_nr_y*diff(fi_cr_t,t,2) -
fi_nr_y*fi_cr_t*diff(fi_nr_x,x,2) -
fi_nr_x*fi_cr_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nr_y*fi_nl_t ,x,-hx,0),y,-
hy,0),t,0,tau)) + eval(int(int(int((fi_nr_x*fi_nl_y*diff(fi_cr_t,t,2) -
fi_nl_y*fi_cr_t*diff(fi_nr_x,x,2) -
fi_nr_x*fi_cr_t*diff(fi_nl_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nl_y*fi_nl_t ,x,-
hx,0),y,0,hy),t,0,tau)) + eval(int(int(int((fi_nl_x*fi_nr_y*diff(fi_cr_t,t,2) -
fi_nr_y*fi_cr_t*diff(fi_nl_x,x,2) -
fi_nl_x*fi_cr_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nr_y*fi_nl_t ,x,0,hx),y,-
hy,0),t,0,tau)) + eval(int(int(int((fi_nl_x*fi_nl_y*diff(fi_cr_t,t,2) -
fi_nl_y*fi_cr_t*diff(fi_nl_x,x,2) -
fi_nl_x*fi_cr_t*diff(fi_nl_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nl_y*fi_nl_t
,x,0,hx),y,0,hy),t,0,tau));

```

```

E_right_kplus1 = eval(int(int(int((fi_cr_x*fi_nr_y*diff(fi_cr_t,t,2) -
fi_nr_y*fi_cr_t*diff(fi_cr_x,x,2) -
fi_cr_x*fi_cr_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nr_y*fi_nl_t ,x,0,hx),y,-
hy,0),t,0,tau)) + eval(int(int(int((fi_cr_x*fi_nl_y*diff(fi_cr_t,t,2) -
fi_nl_y*fi_cr_t*diff(fi_cr_x,x,2) -
fi_cr_x*fi_cr_t*diff(fi_nl_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nl_y*fi_nl_t
,x,0,hx),y,0,hy),t,0,tau));

```

```

E_right_up_kplus1 = eval(int(int(int((fi_cr_x*fi_cl_y*diff(fi_cr_t,t,2) -
fi_cl_y*fi_cr_t*diff(fi_cr_x,x,2) -
fi_cr_x*fi_cr_t*diff(fi_cl_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nr_y*fi_nl_t ,x,0,hx),y,-
hy,0),t,0,tau));

```

```
E_up_kplus1 = eval(int(int(int((fi_nr_x*fi_cl_y*diff(fi_cr_t,t,2) -
fi_cl_y*fi_cr_t*diff(fi_nr_x,x,2) -
fi_nr_x*fi_cr_t*diff(fi_cl_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nr_y*fi_nl_t ,x,-hx,0),y,-
hy,0),t,0,tau)) + eval(int(int(int((fi_nl_x*fi_cl_y*diff(fi_cr_t,t,2) -
fi_cl_y*fi_cr_t*diff(fi_nl_x,x,2) -
fi_nl_x*fi_cr_t*diff(fi_cl_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nr_y*fi_nl_t ,x,0,hx),y,-
hy,0),t,0,tau));
```

```
E_left_up_kplus1 = eval(int(int(int((fi_cl_x*fi_cl_y*diff(fi_cr_t,t,2) -
fi_cl_y*fi_cr_t*diff(fi_cl_x,x,2) -
fi_cl_x*fi_cr_t*diff(fi_cl_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nr_y*fi_nl_t ,x,-hx,0),y,-
hy,0),t,0,tau));
```

```
E_left_kplus1 = eval(int(int(int((fi_cl_x*fi_nr_y*diff(fi_cr_t,t,2) -
fi_nr_y*fi_cr_t*diff(fi_cl_x,x,2) -
fi_cl_x*fi_cr_t*diff(fi_nr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nr_y*fi_nl_t ,x,-hx,0),y,-
hy,0),t,0,tau)) + eval(int(int(int((fi_cl_x*fi_nl_y*diff(fi_cr_t,t,2) -
fi_nl_y*fi_cr_t*diff(fi_cl_x,x,2) -
fi_cl_x*fi_cr_t*diff(fi_nl_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nl_y*fi_nl_t ,x,-
hx,0),y,0,hy),t,0,tau));
```

```
E_left_down_kplus1 = eval(int(int(int((fi_cl_x*fi_cr_y*diff(fi_cr_t,t,2) -
fi_cr_y*fi_cr_t*diff(fi_cl_x,x,2) -
fi_cl_x*fi_cr_t*diff(fi_cr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nl_y*fi_nl_t ,x,-
hx,0),y,0,hy),t,0,tau));
```

```
E_down_kplus1 = eval(int(int(int((fi_nr_x*fi_cr_y*diff(fi_cr_t,t,2) -
fi_cr_y*fi_cr_t*diff(fi_nr_x,x,2) -
fi_nr_x*fi_cr_t*diff(fi_cr_y,y,2))*fi_nr_x*fi_nl_y*fi_nl_t ,x,-
hx,0),y,0,hy),t,0,tau)) + eval(int(int(int((fi_nl_x*fi_cr_y*diff(fi_cr_t,t,2) -
fi_cr_y*fi_cr_t*diff(fi_nl_x,x,2) -
fi_nl_x*fi_cr_t*diff(fi_cr_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nl_y*fi_nl_t
,x,0,hx),y,0,hy),t,0,tau));
```

```
E_right_down_kplus1 = eval(int(int(int((fi_cr_x*fi_cr_y*diff(fi_cr_t,t,2) -
fi_cr_y*fi_cr_t*diff(fi_cr_x,x,2) -
fi_cr_x*fi_cr_t*diff(fi_cr_y,y,2))*fi_nl_x*fi_nl_y*fi_nl_t
,x,0,hx),y,0,hy),t,0,tau));
```

```
% Матриця коефіцієнтів
```

```
for i = 1 : n
```

```

for j = 1 : m
    E(m*(i-1)+j , m*(i-1)+j) = 1 ;
    R(m*(i-1)+j) = Kiter(m*(i-1)+j) ; ;
end
end

for k = 2 : o
    for i = 1 : n
        for j = 1 : m
            if i == 1 || i == n || j == 1 || j == m
                E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i-1)+j) = 1 ;
            else
                if k ~= o
                    % Сусіди за шаром k
                    E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i-1)+j) = E_centre_k ;
                    % Вузлова точка
                    E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i-1)+j+1) = E_right_k ;
                    % Правий сусід
                    E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i-2)+j+1) = E_right_up_k ;
                    % Правий верхній сусід
                    E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i-2)+j) = E_up_k ;
                    % Верхній сусід
                    E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i-2)+j-1) = E_left_up_k ;
                    % Лівий верхній сусід
                    E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i-1)+j-1) = E_left_k ;
                    % Лівий сусід
                    E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i)+j-1) = E_left_down_k ;
                    % Лівий нижній сусід

```

$E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j, m*n*(k-1)+m*(i)+j) = E_down_k ;$
 % Нижній сусід

$E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j, m*n*(k-1)+m*(i)+j+1) = E_right_down_k ;$
 % Правий нижній сусід

% Сосіди за шаром k-1

$E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j, m*n*(k-2)+m*(i-1)+j) = E_centre_kmin1 ;$
 % Вузлова точка

$E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j, m*n*(k-2)+m*(i-1)+j+1) = E_right_kmin1 ;$
 % Правий сусід

$E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j, m*n*(k-2)+m*(i-2)+j+1) =$
 $E_right_up_kmin1 ;$ % Правий верхній сусід

$E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j, m*n*(k-2)+m*(i-2)+j) = E_up_kmin1 ;$
 % Верхній сусід

$E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j, m*n*(k-2)+m*(i-2)+j-1) = E_left_up_kmin1 ;$
 % Лівий верхній сусід

$E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j, m*n*(k-2)+m*(i-1)+j-1) = E_left_kmin1 ;$
 % Лівий сусід

$E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j, m*n*(k-2)+m*(i)+j-1) = E_left_down_kmin1 ;$
 % Лівий нижній сусід

$E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j, m*n*(k-2)+m*(i)+j) = E_down_kmin1 ;$
 % Нижній сусід

$E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j, m*n*(k-2)+m*(i)+j+1) =$
 $E_right_down_kmin1 ;$ % Правий нижній сусід

% Сусіди за шаром k+1

$E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j, m*n*(k)+m*(i-1)+j) =$
 $E_centre_kplus1 ;$ % Вузлова точка

$E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j, m*n*(k)+m*(i-1)+j+1) = E_right_kplus1 ;$
 % Правий сусід

$E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j, m*n*(k)+m*(i-2)+j+1) =$
 $E_right_up_kplus1 ;$ % Правий верхній сусід

```

                                E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k)+m*(i-2)+j) =
E_up_kplus1 ;                    % Верхній сусід

                                E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k)+m*(i-2)+j-1) =
E_left_up_kplus1 ;              % Лівий верхній сусід

                                E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k)+m*(i-1)+j-1) = E_left_kplus1 ;
% Лівий сусід

                                E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k)+m*(i)+j-1) = E_left_down_kplus1 ;
% Лівий нижній сусід

                                E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k)+m*(i)+j) = E_down_kplus1 ;
% Нижній сусід

                                E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k)+m*(i)+j+1) =
E_right_down_kplus1 ;          % Правий нижній сусід

                                end

                                if k == 0

% Сусіди за шаром k (для випадку k = kmax)

                                E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i-1)+j) = E_centre_k_not_last ;
% Вузлова точка

                                E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i-1)+j+1) = E_right_k_not_last
;                                % Правий сусід

                                E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i-2)+j+1) =
E_right_up_k_not_last;        % Правий верхній сусід

                                E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i-2)+j) = E_up_k_not_last ;
% Верхній сусід

                                E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i-2)+j-1) =
E_left_up_k_not_last ;        % Лівий верхній сусід

                                E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i-1)+j-1) = E_left_k_not_last ;
% Лівий сусід

                                E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i)+j-1) =
E_left_down_k_not_last ;      % Лівий нижній сусід

```

```

    E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i)+j) = E_down_k_not_last ;
% Нижній сусід

    E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-1)+m*(i)+j+1) =
E_right_down_k_not_last ;      % Правий нижній сусід

% Сусіди за шаром k-1

    E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-2)+m*(i-1)+j) = E_centre_kmin1 ;
% Вузлова точка

    E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-2)+m*(i-1)+j+1) = E_right_kmin1 ;
% Правий сусід

    E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-2)+m*(i-2)+j+1) =
E_right_up_kmin1 ;      % Правий верхній сусід

    E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-2)+m*(i-2)+j) = E_up_kmin1 ;
% Верхній сусід

    E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-2)+m*(i-2)+j-1) = E_left_up_kmin1 ;
% Лівий верхній сусід

    E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-2)+m*(i-1)+j-1) = E_left_kmin1 ;
% Лівий сусід

    E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-2)+m*(i)+j-1) = E_left_down_kmin1 ;
% Лівий нижній сусід

    E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-2)+m*(i)+j) = E_down_kmin1 ;
% Нижній сусід

    E(m*n*(k-1)+m*(i-1)+j , m*n*(k-2)+m*(i)+j+1) =
E_right_down_kmin1 ;

    end

    end

    end

    end

end

% Наближений розв'язок  $K = E \setminus R$  ;

```