

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Кафедра прикладної математики та моделювання складних систем

Допущено до захисту

Завідувач кафедри ПМ та МСС

\_\_\_\_\_ Коплик І.В.

(підпис)

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2021 р.

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА**

на здобуття освітнього ступеня «бакалавр»

спеціальність 113 «Прикладна математика»

освітньо-професійна програма «Прикладна математика»

тема роботи: **«МОДЕЛЮВАННЯ ВИМУШЕНОГО РАМАНІВСЬКОГО  
РОЗСПІВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ У НАБЛИЖЕНІ  
СЛАБОГО СИГНАЛУ»**

**Виконавець**

студент факультету ЕлІТ

Шапошніков Владислав Олександрович \_\_\_\_\_  
(підпис)

**Науковий керівник**

док. фіз.-мат. наук, професор

Лисенко Олександр Володимирович \_\_\_\_\_  
(підпис)

## РЕФЕРАТ

**Кваліфікаційна робота:** 49 с., 12 рисунків, 7 джерел.

**Мета роботи:** провести аналіз вимушеного раманівського розсіювання електромагнітних хвиль на сильнострумовому релятивістському електронному пучку як аналітично у слабосигнальному наближенні, так і чисельно, використовуючи перші принципи руху заряджених частинок.

**Об'єкт дослідження:** процес вимушеного раманівського розсіювання електромагнітних хвиль на сильнострумовому релятивістському електронному пучку.

**Предмет дослідження:** умови, за яких відбувається вимушене раманівське розсіювання електромагнітних хвиль на сильнострумовому релятивістському електронному пучку; параметри як електромагнітних хвиль, так і електронного пучка.

**Методи навчання:** метод послідовних наближень, метод великих частинок, стандартні чисельні методи.

У наближенні слабого сигналу аналітично знайдені умови, за яких відбувається підсилення електромагнітної хвилі за рахунок її раманівського розсіювання на сильнострумовому релятивістському електронному пучку; отримані аналітичні вирази для параметрів досліджуваного процесу. Використовуючи метод великих частинок та перші принципи руху заряджених частинок створена комп'ютерна модель, яка модулює раманівське розсіювання електромагнітних хвиль. Проведено чисельні експерименти і підтверджено результати аналітичного дослідження.

**Ключові слова:** ВИМУШЕНЕ РАМАНІВСЬКЕ РОЗСІЮВАННЯ, МЕТОД ВЕЛИКИХ ЧАСТИНОК, РЕЛЯТИВІСТСЬКИЙ СИЛЬНОСТРУМОВИЙ ЕЛЕКТРОННИЙ ПУЧОК, ПУЧКОВІ ХВИЛІ.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1        ВИМУШЕНЕ        РАМАНІВСЬКЕ        РОЗСІЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ (ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ) .....	7
1.1. Сутність вимушеного раманівського розсіювання електромагнітних хвиль .....	7
1.2. Використання раманівського розсіювання у фізичній електроніці .	11
1.3. Моделювання розсіювання електромагнітних хвиль методом частинок .....	14
РОЗДІЛ 2        АНАЛІТИЧНЕ        ДОСЛІДЖЕННЯ        РАМАНІВСЬКОГО РОЗСІЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ У НАБЛИЖЕННІ СЛАБКОГО СИГНАЛУ .....	20
2.1. Модель.....	20
2.2. Рівняння для середньої густини імпульсу пучка .....	22
2.3. Аналіз та чисельні оцінки.....	26
РОЗДІЛ 3        РЕАЛІЗАЦІЯ КОМП'ЮТЕРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ .....	31
3.1. Методика чисельного експерименту.....	31
3.2. Комп'ютерний код .....	32
3.3. Аніліз результатів комп'ютерного моделювання .....	34
ВИСНОВКИ .....	42
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕЛІЛ .....	43
ДОДАТКИ .....	44
ДОДАТОК А Лістинг програми .....	44

**СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ**

$k_{\parallel}$	– хвильове число;
$u_{\parallel}$	– початкова швидкість електронів при $t = 0$ ;
<i>c.c.</i>	– комплексно-спряжена величина;
$\omega$	– частота;
$E_{\parallel}$	– напруженість електричного поля;
$c$	– швидкість світла;
$e$	– заряд електрона;
$i$	– уявна одиниця;
$m_e$	– маса електрона;
$\delta\omega$	– інкремент зростання хвилі;
$\omega_b$	– ленгмюрівська частота електронів;
$\gamma$	– релятивістський фактор.

## ВСТУП

Раманівське розсіювання світла хвиль (комбінаційне розсіювання), яке було відкрите сто років тому індійським фізиком К.В. Раманом (за це він отримав Нобелівську премію у 1930 році), з часом знаходить усе більше та більше застосувань [1]. Одне з його останніх застосувань у релятивістській плазмовій електроніці – раманівські лазери на вільних електронах [2-5].

Лазери на вільних електронах (ЛВЕ) – це пристрої, що перетворюють енергію релятивістських електронів (тобто електронів, енергія яких у перевищує їх енергію спокою  $0,511 \text{ MeV} = 0,8 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$ ), в енергію електромагнітного випромінювання [2-5]. Вони дозволяють отримувати монохроматичне випромінювання на будь-якій довжині хвилі в діапазоні від 0.1 нм до 1 мм, причому ця довжина хвилі може відносно швидко перебудовуватися на десятки відсотків. Ще однією відмінністю ЛВЕ від інших пристроїв – вони можуть досягати дуже високих пікових потужностей. Лазери на вільних електронах використовуються в багатьох галузях, включаючи хімію, аналіз структури молекул в біології, медичну діагностику, неруйнівний контроль, військові застосування. Розрізняють два типи режимів роботи лазерів на вільних електронах – раманівський та комптонівський.

У ЛВЕ, які працюють у комптонівському режимі використовують ультрарелятивістські електрони (релятивістський фактор більший за 50-100), сила струму електронного пучка є достатньо малою, тому взаємодією електронів між собою в цих пристроях можна знехтувати. На базі таких ЛВЕ можна створити випромінювання рентгенівського діапазону.

У раманівському режимі, навпаки, використовують електронні пучки з досить невисокими енергіями 2-5 MeV, але з високим електричним струмом – сотні та тисячі ампер. Тут взаємодія електронів між собою в раманівських лазерах на вільних електронах грає принципову роль. Фактично тут відбувається

розсіювання електромагнітної хвилі на хвилі власних коливань сильнострумового електронного пучка.

Подана кваліфікаційна робота присвячена дослідженню вимушеного раманівського розсіювання електромагнітних хвиль на сильнострумовому релятивістському електронному пучку. Дослідження проведено як аналітично, в квадратичному нелінійному наближенні за амплітудою електромагнітної хвилі, так і чисельно з використанням методу великих частинок. Аналітично знайдені умови, за яких відбувається підсилення електромагнітної хвилі за рахунок її раманівського розсіювання на сильнострумовому релятивістському електронному пучку, отримані аналітичні вирази для параметрів досліджуваного процесу. Використовуючи метод великих частинок та перші принципи руху заряджених частинок створена комп'ютерна модель, яка модулює раманівське розсіювання електромагнітних хвиль. Проведено чисельні експерименти і підтверджено результати аналітичного дослідження.

## РОЗДІЛ 1

### ВИМУШЕНЕ РАМАНІВСЬКЕ РОЗСІЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ (ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ)

#### 1.1. Сутність вимушеного раманівського розсіювання електромагнітних хвиль [1]

Першим комбінаційне розсіювання світла передбачив Адольф Смекал (в 1923 р) [1], потім були теоретичні роботи Крамерса, Гейзенберга, Дірака, Шредінгера і інших. У 1918 р Л. І. Мандельштам передбачив розщеплення лінії релєєвського розсіювання внаслідок розсіювання світла на теплових акустичних хвилях [1]. Починаючи з 1926 р, Мандельштам і Ландсберг розгорнули в Московському державному університеті експериментальне вивчення молекулярного розсіювання світла в кристалах, маючи на меті виявити тонку структуру в спектрі розсіювання, викликану модуляцією розсіяного світла пружними тепловими хвилями, частоти яких лежать в акустичному діапазоні (продовження досліджень феномена, нині іменованого розсіюванням Мандельштама-Бріллюена). У 1921 р в університеті Калькутти індійськими фізиками Раманом і Сешагірі Рао були виявлені особливості в поляризації розсіяного дистильованою водою світла при наявності світлофільтрів в каналі детектування. У 1923 році Раманом було показано, що особливості поляризації пов'язані з присутністю в середовищі деякого додаткового світіння з довжиною хвилі, помітно що відрізняється від довжини хвилі падаючого випромінювання. В якості можливої гіпотези пояснення могла бути висунута флюоресценція, проте хімічне очищення розчину не приводило до зникнення ефекту. Останнє навело Рамана на думку, що спостережуване явище є принципово новим явищем, і з 1923 року Раман починає програму дослідження «нового світла» в рідинах і парах. У період з 1923 по 1928 його група показує наявність розсіювання зі зміною по частоті в більш ніж 100 прозорих рідинах, газах і твердих тілах.

Основним методом дослідження, однак, було використання додаткових світлофільтрів і поляризаторів, що не дозволяло дати адекватну інтерпретацію спостережуваного явища. Але в 1928 р Раман висунув припущення, що спостережуваний ефект є нібито якийсь аналог ефекту Комптона в оптиці, припускаючи, що фотон може бути «поглинений частково», причому ці "частини" не можуть бути довільними і повинні відповідати спектрами інфрачервоного поглинання світла. Індійські вчені Ч. В. Раман і К. С. Крішнан зробили експериментальну перевірку цієї гіпотези і виявили лінійчатий спектр у досліджуваного ними протягом багатьох років випромінювання. Накопичений за багато років експериментальний матеріал дозволив їм опублікувати статтю, в якій вони заявили про виявлення нового виду світіння, властивого широкого класу речовин. [2]

Загалом фізики не відразу зрозуміли, що відкрите Ландсбергом і Мандельштамом комбінаційне розсіювання світла в кристалах є те ж саме явище, що і відкритий Раманом ефект в рідинах і парах. Більш того, Раман опублікував свої результати до публікації робіт Ландсберга і Мандельштама. Тому в англійській літературі розглянутий феномен носить назву "ефект Рамана". Також дане явище традиційно називається «комбінаційним розсіюванням світла».

Раманівське розсіювання, розсіювання світлових хвиль, при якому частоти падаючих і перевипромінених (розсіяних) хвиль відрізняються один від одного на частоти власних коливань в речовині. Є непружним розсіюванням з фотонів речовини, а це означає, що існує обмін енергії і зміна в напрямку джерела світла. Зазвичай цей ефект пов'язаний з тим, що молекула отримує енергію коливань, коли падаючі фотони від видимого лазера зміщуються в бік більш низької енергії. Це називається нормальним стоксовим раманівським розсіюванням.[3]

Комбінаційне розсіювання відбувається не на атомах, а на молекулах речовини, точніше на молекулярних коливаннях середовища. Як відомо, в молекулах існує три види рухів:



- 1) електронні - рух електронів навколо ядер;
- 2) коливальні - коливання ядер щодо свого положення рівноваги;
- 3) обертальні - коливання ядер відносно руху молекули (тобто обертання молекул як цілого).[3]

Нові лінії в спектрі розсіювання є комбінацією частот падаючого світла і частот коливальних і обертальних переходів.

Розглянемо розсіювання на прикладі двохатомної молекули, в якій атомні ядра коливаються з частотою  $\nu$ . Такі коливання призводять до модуляції поляризації молекули. У свою чергу, проходження електромагнітної хвилі з частотою  $\nu_\phi$  індукує дипольний момент молекули, що в результаті призводить до появи розсіяного світла з частотою, відмінною від падаючого на  $\Delta\nu$ .

Будова і молекулярний склад речовини, через яку проходить електромагнітна хвиля, в результаті визначає кінцевий спектр розсіяного випромінювання.

З точки зору квантової теорії при зіткненні фотона з часткою відбувається зміна їх енергій, в результаті чого розсіяний фотон приймає або віддає частину енергії, а молекула переходить на інший енергетичний рівень - пояснимо це на прикладі переходу молекули між нульовим і першим коливальними рівнями, різниця енергій між якими  $\Delta E$ .

Молекула, знаходячись на енергетичному рівні  $E_{00} = h\nu_{00}$  (перша цифра індексу позначає номер електронного рівня  $E$ , друга цифра - номер коливального рівня  $\nu$ ;  $h$  - постійна Планка). Після взаємодії з фотоном, що має енергію  $E_\phi = h\nu_\phi$  перемістилася спочатку на віртуальний рівень, а потім на інший енергетичний рівень  $E_{01} = h\nu_{01}$ , випустивши при цьому фотон з енергією  $h(\nu_\phi - \Delta\nu)$ , де  $\Delta\nu = \nu_{01} - \nu_{00}$ .

Залежно від того, на якому рівні знаходиться молекула до взаємодії з фотоном, визначається знак в вираженні частоти додаткової лінії  $\nu_\phi \pm \Delta\nu$ . У разі, якщо молекула знаходиться на рівні  $E_{00}$ , розсіяний фотон має частоту  $(\nu_\phi - \Delta\nu)$ , що проявляється в спектрі розсіювання у вигляді додаткової лінії, яка має

частоту ( $\nu_\varphi - \Delta\nu$ ) - стоксова компонента; якщо молекула знаходиться на рівні  $E_{01}$ , то в спектрі розсіювання з'являється додаткова лінія, зміщена на частоту ( $\nu_\varphi + \Delta\nu$ ) антистоксова компонента.

Інтенсивність антистоксової компоненти залежить від температури, при цьому стоксова компонента не чутлива до температурних флуктуацій. Інтенсивність обох компонент визначається ймовірністю розсіювання на молекулах, яка прямо пропорційна кількості розсіюють молекул. При кімнатній температурі заселеність основного коливального рівня більше заселеності вищих рівнів, що обумовлює більш ймовірний процес появи саме стоксової компоненти і, відповідно, інтенсивність такої компоненти вище, ніж у антистоксовій. У свою чергу, зі збільшенням температури все більше число частинок переходить на збуджені коливальні рівні, і, як наслідок, ймовірність розсіювання з цих рівнів збільшується.

Представлений раніше механізм комбінаційного розсіювання відноситься до спонтанного, при якому кожна молекула випромінює в будь-якому напрямку і сумарна інтенсивність розсіяної хвилі становить близько  $10^{-5}$  -  $10^{-6}$  від інтенсивності падаючої хвилі. У 1962 році, після появи лазерів, були проведені експерименти, в яких відбувалося вплив високоінтенсивного випромінювання на розсіюють середу, що призводило до експоненціального зростання інтенсивності розсіяної хвилі від збільшення інтенсивності хвилі накачування. При протіканні даного ефекту, названого вимушеним комбінаційним розсіюванням, інтенсивності падаючої і розсіяної хвиль співмірні.

З огляду на те, що зі збільшенням інтенсивності випромінювання зростає ймовірність розсіювання на одній молекулі, світло розсіється на більшій кількості молекул, в результаті чого інтенсивність розсіяного випромінювання зростає. Первинне випромінювання з частотою  $\nu_\varphi$  відрізняється від розсіяного випромінювання з  $\Delta\nu$  частотою на компоненту з різницевої частотою  $\nu_\varphi + \Delta\nu$ , яка, в кінцевому підсумку, буде впливати на частки середовища і приводити до посилення інтенсивності розсіювання. В цілому, можна говорити про те, що саме

одночасний вплив падаючого і розсіяного випромінювань призводить до різкого зростання інтенсивності стоксової компоненти. Таким чином, саме розсіяне світло спонукає до ще більшого розсіювання (підтримці ефекту), тобто «змушує» розсіюватися з більшою інтенсивністю, що і пояснює назву «вимушене комбінаційне розсіювання».

При подоланні певного порогу інтенсивності (потужності) накачування починається експоненціальне зростання залежності інтенсивності стоксової компоненти від інтенсивності лазера - зростання триває до досягнення стану насичення.

Як і у випадку зі спонтанним комбінаційним розсіюванням, більш ймовірний процес появи стоксової компоненти, через що саме інтенсивність компоненти з частотою  $\nu_\varphi + \Delta\nu$  порівнянна з інтенсивністю накачування. Експоненціальне зростання залежності відбувається до досягнення однакової заселеності нульового і першого коливальних рівнів молекул - стану насичення. Внаслідок того, що збільшується заселеність першого коливального рівня, зростає і ймовірність появи антистоксової компоненти; при цьому, обидві компоненти служать додатковим джерелом накачування для випромінювання з частотою  $\nu_\varphi \pm 2\Delta\nu$ , яке також розсіюється і зумовлює появу додаткових гармонік в спектрі розсіяного випромінювання з частотами  $\nu_\varphi \pm n\Delta\nu$ , де  $n$  - номер гармоніки.

## **1.2. Використання раманівського розсіювання у фізичній електроніці [2-5]**

Лазер на вільних електронах (скорочено ЛВЕ) являє собою прилад, в якому вимушене випромінювання пучка релятивістського електронів призводить до посилення електромагнітних хвиль в короткохвильовому діапазоні.

ЛВЕ будуть працювати в кілька абсолютно особливих режимах, в яких справедливі різні фізичні принципи, а для характеристики важливих параметрів використовується досить широка термінологія. Розглянемо режими роботи і відповідну класифікацію.[5]

Якщо струм електронного пучка малий і енергія пучка висока (наприклад, 20 MeV), а довжина хвилі випромінювання лежить в короткохвильовому (ІК) діапазоні, то ми маємо режим ЛВЕ, який називають по-різному: комптонівський, двоххвильовий, інтерференційний або режим одночастинкової взаємодії. У цьому випадку існує дуже близька аналогія між ЛВЕ і лінійним прискорювачом: збільшення (зменшення) енергії частинок відповідає загасанню (посиленню) енергії електромагнітного поля. Оптимальне посилення ЛВЕ залежить від того, наскільки правильно ми оберемо енергію пучка і довжину ондулятора; тому такий режим називають ще і режимом кінцевої довжини ондулятора. К ЛВЕ в загальному випадку не застосовується положення лазерної фізики, згідно з яким чим більший об'єм середовища, тим більше посилення і вихідна потужність. Крім того, ні про яке посилення не може бути й мови, коли в ЛВЕ оптичний пучок відбивається від дзеркала і рухається назустріч потоку електронів.

Лазери на вільних електронах, в яких має місце експоненціальне наростання хвиль і які нагадують традиційні лазери з накачуванням, працюють в довгохвильовому режимі ( $\lambda \gg 100$  мкм) при низькій енергії (зазвичай менше 5 MeV) і при високій щільності струму пучка ( $j \geq 1000$  А / см<sup>2</sup>); ці ЛВЕ є компактними пристроями з високим коефіцієнтом посилення. Якщо пучок холодний (тобто Розкид електронів по імпульсах невеликий), а амплітуда поля накачування ондулятора мала, то ми маємо ЛВЕ на комбінаційному розсіянні. При збільшенні поля накачування ондулятора коефіцієнт посилення зростає і ми приходимо до режиму великої амплітуди накачування з оптимальними значеннями посилення та ефективності (його ще іноді називають режимом осцилюючої двопотокової нестійкості). Однак якщо пучок має великий розкид по імпульсах, посилення і потужність зменшуються, але сигнал все ще

експоненціально наростає вздовж ондулятора, то такий режим називають комптонівським з розкидом по імпульсах. Посилення зменшується тому, що ЛВЕ на комбінаційному розсіянні - це трихвильовий параметричний пристрій (хвиля накачування, сигнал і неодружена хвиля), в якому в якості холостої хвилі може виступати або плазма, або хвиля просторового заряду. У разі електронів з розкидом по імпульсах, коли неодружена хвиля загасає внаслідок беззіткненого ефекту (за рахунок загасання Ландау), ми знову повертаємося до режиму малого посилення (усі ЛВЕ вимагають, щоб електронний пучок був досить холодним).[5]

Між одночастинковим ЛВЕ і ЛВЕ, в яких істотну роль відіграють колективні ефекти, що призводять до експоненціального наростання посилення, можна провести досить просту й кордон. ЛВЕ діють в колективному (багаточастковому) режимі, коли система має досить велику довжину, а пучок – досить високу щільність, так що уздовж системи укладається кілька плазмових довжин хвиль. Це накладає верхня межа на енергію пучка і нижня межа на довжину хвилі. Іншим дуже важливим ефектом є взаємодія між силою, яка групує електрони пучка (будемо називати її пондеромоторну силою), і розштовхує силами просторового заряду. Пондеромоторна сила визначається амплітудами ондуляторного поля і сигналу, в той час як сили просторового заряду - щільністю струму і енергією пучка. Як ми покажемо нижче, через цю конкуренції сил посилення ЛВЕ в деяких випадках зростає, а в деяких зменшується.

Як і традиційні лазери на атомних переходах, ЛВЕ можуть працювати і як підсилювачі когерентного випромінювання, і як генератори (при використанні резонатора з дзеркалами), або як підсилювачі локального шуму. Останній випадок відповідно до оптичної термінології ми називаємо ЛВЕ на надвипромінюванні. Такий ЛВЕ при дуже великому посиленні може давати потужне частково когерентне випромінювання.

Стало вже звичним використовувати в назвах різних електронних приладів суфікс «трон» (убітрон, скаттрон, оротрон і т. д.). Очевидно, ця традиція не має методологічної основи. Проте в СВЧ (в сантиметровій і міліметровій) області спектра ця тенденція існує і пов'язана з тим, що швидкість хвилі залежить від геометричних властивостей структури. Однак в ЛВЕ з досить гарним наближенням можна вважати, що швидкість електромагнітної хвилі дорівнює швидкості світла  $c$ . [7]

### 1.3. Моделювання розсіювання електромагнітних хвиль методом частинок [6-7]

Розглянемо чисельне моделювання методом частинок, виділимо три основних види обчислювальної моделі частинок: модель частинка-частинка (PP), модель частинка-сітка (PM) і модель частинка-частинка-частинка-сітка (PPPM або P3M). У моделі PP використовується формулювання закону сили довгодії; в моделі PM сила розглядається як польова величина і апроксимується на сітці; модель P3M є гібридом моделей PP і PM. Вибір моделі диктується частково фізикою досліджуваного явища і частково міркуваннями обчислювальних витрат. [7]

#### 1.3.1. Метод частинка-частинка

Метод PP є найпростішим з понятійної та обчислювальної точки зору. В деякий момент часу стан фізичної системи описується набором положень і швидкостей частинок  $\{X_i(t), v_i(t); i = 1, N_p\}$ . Цикл тимчасового кроку перераховує ці величини, використовуючи сили взаємодії і рівняння руху для отримання стану системи в більш пізній момент часу  $t + \Delta t$ .

Для спостереження за розвитком системи в часі використовується багаторазове повторення цього циклу.

Програмування циклу тимчасового кроку в методі PP є тривіальною задачею. Якщо ж розглянути обчислювальні витрати, стає зрозумілим, чому така

проста схема використовується тільки в невеликому числі випадків. Візьмемо, наприклад, систему точкових заряджених частинок, в якій вираз для довгодіючих сил визначено рівнянням (1).

$$F_{ij} = \frac{q_i q_j (x_i - x_j)}{4\pi\epsilon_0 |x_i - x_j|^3} \quad (1)$$

де  $x_i, x_j$  та  $q_i, q_2$  – положення та заряди частинок  $i$  та  $j$ . [7]

Покладемо, що кожна операція додавання, віднімання, множення та ділення вважається однією операцією з плаваючою точкою і зведення в ступінь  $3/2$  вважається трьома операціями. Множення на  $m_i(q_i q_j / 4\pi\epsilon_0)$  і  $\Delta t$  можна уникнути ретельним підбором одиниць виміру, і тому ми ці операції враховувати не будемо. Загалом отримуємо  $10(N_p^2 - N_p)$  операцій.

Як правило, для отримання корисних результатів з обчислювального експерименту потрібно кілька тисяч кроків за часом, тому метод прямого підсумовування РР доцільний тільки для систем, що містять приблизно до тисячі частинок, якщо сили довгодіючих, як, наприклад, при вивченні зоряних скупчень. Однак якщо сили взаємодії короткодіючі, то кількість операцій буде пропорційна не квадрату числа частинок, а числу частинок, помноженому на число сусідніх, досить близьких до виділеної частинки, щоб значно вплинути на діючу на неї силу. Модель атомних рідин Леннарда-Джонса є прикладом системи з короткодіючими силами, для якої широко застосовувалася модель РР.

### 1.3.2. Метод частинка-сітка

У методі частинка-сітка використовується формалізм близькодії і рівняння поля для потенціалу.

В результаті сила обчислюється набагато швидше, але зазвичай менш точно, ніж при використанні методу РР.

Польові величини, які заповнюють весь простір фізичної системи, наближено представляються значеннями в регулярно розташованих вузлах сітки. Диференціальні оператори, такі як лапласіан, замінюються кінцево-різницеви́ми апроксимаціями на цій сітці. Потенціали і сили в місці положення частинки обчислюються за допомогою інтерполяції по масиву сіткових значень. Сіткові щільності розраховуються за допомогою зворотної процедури роздачі характеристик частинки (наприклад, заряду) в найближчі вузли сітки для того, щоб отримати сіткові значення (наприклад, щільність заряду).

Цикл кроку по часу в методі РМ відрізняється від циклу методу РР тільки способом обчислення сил. Розрахунок сили в методі РМ, відповідний до наведеного вище прикладу методу РР з зарядженими частинками, складається з трьох етапів:

1. Роздача заряду на сітку.
2. Рішення на цій сітці рівняння Пуассона (2).

$$\nabla^2 \varphi = -\rho \varepsilon_0, \quad (2)$$

де  $\varphi$  – електростатичний потенціал,  $\rho$  – щільність заряду.[8]

3. Обчислення сил по сітковому потенціалу та інтерполяція сил в точці розташування частинок. [7]

Кількість операцій на етапах (1) і (3) пропорційна числу частинок  $N_p$ . Кількість операцій на етапі (2) залежить від числа вузлів сітки  $N_p$ . Отже, загальна кількість операцій –  $\alpha N_p + \beta(N)$ , де постійна  $\alpha$  і функція  $\beta$  залежать від конкретного виду використовуваної схеми РМ.



Величезний вигравш в швидкості методу РМ в порівнянні з методом РР досягається ціною втрати розширення в поле потенціалу та сили. Тільки ті поля, варіації яких мають довжину хвилі, більшу, ніж крок просторової сітки, можна точно уявити з допомогою сіткових значень. Поля потенціалу та сили одиночного точкового заряду (або маси) на відстанях, менших кроку сітки  $H$ , представляються неточно. Однак характер цих похибок такий, що неточне уявлення полів точкового заряду можна інтерпретувати як точне уявлення полів від зарядженої хмари кінцевого розміру, ширина якого близька до кроку сітки  $H$ .

Обмежене розширення сітки виявляється неприйнятним для вивчення корельованих систем: сітка, досить дрібна для дозволу близьких зіткнень частинок, мала б настільки велику кількість сіткових вузлів, що час ЦП, необхідний для знаходження потенціалу, перевищував би час виконання циклу часового кроку для методу РР. Для некорельованих систем і систем із зіткненнями (в тому числі із сильними зіткненнями) ситуація зворотна: обмежене сіткове розширення привносить властивості, необхідні для придушення нефізичних кореляцій між кінцевим числом рахункових макрочасток. За умови що сітковий крок менше, ніж характерна довжина хвилі фізичної системи (наприклад, Радіус Дебая в плазмі і ширина спірального рукава галактик) і що число рахункових макрочасток в кожному осередку сітки досить велике (скажімо  $\sim 10$ ) для підтримки низьких рівнів флуктуацій, модель РМ буде точно представляти математичні моделі некорельованих фізичних систем і систем із зіткненнями.

### 1.3.3. Метод частинка-частинка – частина-сітка

Ми з'ясували, що метод РР може бути використаний для невеликих систем з дальнюдіючими силами чи для великих систем, в яких сили взаємодії відмінні від нуля тільки на великих відстанях між частинками. З іншого боку, метод РМ є швидким в обчислювальному відношенні, але він придатний тільки для гладко

мінливих сил. Метод РЗМ поєднує переваги методів РР і РМ і дозволяє моделювати великі корельовані системи з дальнодіючими силами.

Прийом, використаний в методі РЗМ, полягає в розщепленні діючих між частинками сил на дві частини,

$$F_{ij} = F_{ij}^{sr} + F_{ij}^m \quad (3)[7]$$

де швидкозмінювана короткодіюча частина  $F_{ij}^{sr}$  відмінна від нуля тільки на декількох міжчасткових відстанях, а повільно змінюється частина  $F_{ij}^m$  досить гладка для точного уявлення на сітці. Метод РР використовується для знаходження сумарної короткодіючої сили, що діє на кожен частку, метод РМ використовується для знаходження сумарної повільно змінюваної складової сили. Додавання сумарної короткодіючої і сумарної повільно змінюваної складової сили дає результуючу силу, діючу на кожен частку; ця результуюча використовується для перерахунку швидкостей. Отримана в результаті схема РЗМ займає проміжне положення в тому сенсі, що можна уявити близькі зіткнення з тією ж точністю, як в методі РР, і обчислювати дальнодіючі сили з тою же швидкодією, як в методі РМ.

Розщеплення сил (1.41) найлегше демонструється для сил, що підкоряються закону зворотних квадратів. Розглянемо, наприклад, однорідно заряджені сфери з повним зарядом  $q$  і радіусом  $a/2$ . З теореми Гаусса і третього закону Ньютона випливає, що сила взаємодії двох таких сфер, розташованих на відстані  $r \geq a$ , дорівнює

$$F(r) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}, \quad r \geq 0, \quad (4)[7]$$

І прямує вздовж лінії, що з'єднує центри сфер. Декілька більш детальне обчислення показує, що для  $r \leq a$

$$F(r) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left( \frac{8r}{a} - \frac{9r^2}{a^2} + \frac{2r^4}{a^4} \right) r \leq a. \quad (5)[7]$$

Таким чином, один з можливих способів розщеплення сили - покласти сіткову частину сили рівної  $F(r)$ , а короткодіючу частину (що не дорівнює нулю тільки при  $r < a$ ) – різницею між силою, обернено пропорційною квадрату відстані, і  $F(r)$ .

Кількість операцій, що припадають на крок за часом в методі РЗМ, складається з частини  $\alpha N_p + \beta(N)$ , що відповідає РМ та інтегруванню рівнянь руху, і частини, пропорційної  $N_p N_n$ , для етапу РР. Число сусідів  $N_n$  приблизно становить  $4\pi a^3 n_0 / 3$ , де  $n_0$ -середня щільність частинок. Таким чином, повне число операцій для моделі РЗМ можна записати у вигляді  $\alpha N_p + \beta(N) + \gamma N_n N_p$ .

Правильним вибором  $N$ ,  $N_p$  і  $a$  домагаються лінійної залежності кількості операцій від числа макрочасток. Для десяти тисяч частинок це дає час циклу, що дорівнює 10 с, на деякому комп'ютері, що можна порівняти з часом, приблизно рівним 20 хв, для тієї ж ситуації при використанні методу РР на тому ж самому пристрої.

## РОЗДІЛ 2

### АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РАМАНІВСЬКОГО РОЗСПОВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ У НАБЛИЖЕННІ СЛАБКОГО СИГНАЛУ

#### 2.1. Модель

Розглянемо наступну модель вимушеного раманівського розсіювання електромагнітних хвиль на сильнострумовому пучку. Розглядаємо одновимірний випадок, Релятивістський електронний пучок з концентрацією електронів  $n_e$  рухається вздовж осі  $Z$ . В початковий момент часу  $t_0 = 0$  швидкість всіх електронів однакова і дорівнює  $u_{||}$ . В цей же момент часу «вмикається» електромагнітна хвиля. В розглянутій моделі враховується лише електричну складову цього поля, яка має вигляд:

$$E_z(z, t) = \frac{1}{2} [E_0 \exp(-i\omega t + ik_z z) + c. c.] \quad (2.1)$$

Прийmemo до уваги, що в процесі взаємодії електромагнітної хвилі з електромагнітним пучком відбувається підсилення (або послаблення) електромагнітної хвилі. Цю особливість враховуємо тим, що частота  $\omega$  містить уявну поправку  $i\delta\omega$  (інкремент), яка обумовлена експоненціальним зростанням електричного поля. Тобто під частотою  $\omega$  будемо розуміти  $\omega + i\delta\omega$ .

$$\omega \rightarrow \omega + i\delta\omega \quad (2.2)[3]$$

Також в моделі прийнято до уваги взаємодію електронів між собою. Електромагнітна хвиля модулює електричний пучок, тобто створює в ньому області підвищеної та пониженої концентрації електронів. В результаті цього в електронному пучку створюються додаткові пучкові поля, які спричиняють

осциляторний рух електронів відносно рівноважного (незбуреного) положення  $z_H$  з частотою  $\Omega_B$ .

Тоді рівняння руху (релятивістський аналог 2-го закону Ньютона) набуває наступного вигляду:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv_z}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_z}{c}\right)^2}} \right) = e\beta E_z(z, t) - \psi(z - z_H) \quad (2.3)[3]$$

В цьому рівнянні  $v_z$  – швидкість електрона;  $m$ ,  $e$  – маса та електричний заряд електрона;  $z_H = u_{||}t + z_0$ ;  $z_0$  – координата електрона в початковий момент часу  $t_0 = 0$ ;  $-\psi(z - z_H)$  – квазіпружна сила, що обумовлена пучковими полями,  $\psi$  – деяка стала,  $\beta$  – коефіцієнт, що враховує особливості електродинамічної системи, в якій розповсюджується електромагнітна хвиля,  $c$  – швидкість світла у вакуумі.

З рівняння (2.3) нескладно знайти прискорення електрона:

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{e\beta}{m} \left( 1 - \frac{v_z^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} E(z, t) - \Omega_B^2 (z - z_H) \quad (2.4)[3]$$

Також доповнимо рівняння (2.4) співвідношенням для знаходження координати електрона  $z$ :

$$\frac{dz}{dt} = v_z \quad (2.5)[3]$$

Система рівнянь (2.4), (2.5) та (2.1) дозволяє знайти швидкості та координати електронів.

В цьому розділі використовуючи ці рівняння аналітично знайдемо умову, коли найбільш ефективно відбувається підсилення електромагнітної хвилі в

наближенні слабкого сигналу. Для цього використаємо підхід, який викладено в [3]

В наступному розділі (розділ 3) на базі цих же рівнянь чисельно проаналізуємо динаміку електронів і порівняємо результати чисельного моделювання з результатами, що отримані аналітично.

## 2.2. Рівняння для середньої густини імпульсу пучка

Отримаємо рівняння для середньої густини електромагнітної хвилі аналітично з рівнянь (2.1), (2.4) та (2.5) в наближенні слабкого сигналу використовуючи підхід, який описано в [1]. Введемо  $\tilde{z}$  як відхилення координати електрона від незбуреного положення.

$$z = z_H + \tilde{z} = u_{||}t + z_0 + \tilde{z}. \quad (2.6)$$

Тоді з рівнянь (2.1), (2.4) і (2.5) отримаємо

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \Omega_B^2 \tilde{z} = \frac{e\beta}{m} \left(1 - \frac{u_{||}^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} * \frac{1}{2} [E_0 \exp(-i\omega t + ik_z(u_{||}t + z_0)) + c. c.] \quad (2.7)$$

При цьому в правій частині (2.7) ми знехтували  $\tilde{z}$ . Тобто вважається, що

$$k_z \tilde{z} \ll 1 < 2\pi \quad (2.8)$$

Розв'язок рівняння (2.7) шукаємо у вигляді

$$\tilde{z} = A \exp(-i\omega t + ik_z u_{||}t + i\varphi_0) + c. c. \quad (2.9)$$

Тут  $\varphi_0 = k_z z_0$ .

Підставимо (2.9) в (2.7) і отримуємо значення сталої А.

$$A(-i\omega + ik_z u_{||})^2 + \Omega_B^2 A = \frac{e}{m} \beta \left(1 - \frac{u_{||}^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} E_0$$

$$A = \frac{\frac{e}{m} \beta \left(1 - \frac{u_{||}^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} E_0}{(-i\omega + ik_z u_{||})^2 + \Omega_B^2} \quad (2.10)$$

Тепер запишемо рівняння для зміни релятивістського імпульсу електрона:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{ez}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{mv_z}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_z}{c}\right)^2}} \right) = m \left(1 - \left(\frac{v_z}{c}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{dv_z}{dt} = m \left(1 - \left(\frac{v_z}{c}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} [-\Omega_B^2 A + \\ &+ \frac{e}{m} \beta \left(1 - \frac{v_z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} E_0 \exp(-i\omega t + ik_z u_{||} t + ik_z \tilde{z} + i\varphi_0) + c. c.] \end{aligned} \quad (2.11)$$

В рівнянні (2.11) використаємо наближене співвідношення

$$e^{ik_z \tilde{z}} \approx 1 + ik_z \tilde{z} \quad (2.12)$$

Яке виконується за умови (2.8), тоді з (2.11) та (2.10) отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{dP_{ez}}{dt} &= e\beta \left[ \left( \frac{-\Omega_B^2}{(-i\omega + ik_z u_{||})^2 + \Omega_B^2} + 1 \right) \frac{1}{2} E_0 \exp(-i\omega t + ik_z u_{||} t + i\varphi_0) (1 + \right. \\ &\left. + ik_z [A \exp(-i\omega t + ik_z u_{||} t + i\varphi_0)] + c. c. \right) + c. c.] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Середнє значення густини імпульсу пучка буде визначатись співвідношенням

$$\frac{dP_{e_z}}{dt} = n_B \frac{d\phi_z}{dt} \quad (2.14)$$

Де  $n_B$  – концентрація електронів,  $\langle P_e \rangle$  – середнє значення імпульса електронів пучка.

Для того щоб знайти  $\langle P_e \rangle$  достатньо проінтегрувати (2.13) за змінною  $\varphi_0$ , що характеризує окремий електрон в межах від 0 до  $2\pi$ , тобто

$$\langle P_e \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots d\varphi_0$$

В результаті такого інтегрування всі доданки, які містять  $\exp(-i\omega t + ik_z u_{||} t + i\varphi_0)$  будуть дорівнювати нулю.

В результаті маємо:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{e_z}}{dt} &= n_B e \beta \left( \frac{-\Omega_B^2}{(-i\omega + ik_z u_{||})^2 + \Omega_B^2} + 1 \right) \frac{1}{2} E_0 ik_z A^* + c. c. = \\ &= n_B e \beta \frac{1}{4} |E_0|^2 \left( 1 - \frac{u_{||}^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{-\Omega_B^2 + (-i\omega + ik_z u_{||})^2 + \Omega_B^2}{|(-i\omega + ik_z u_{||})^2 + \Omega_B^2|} ik_z + c. c. \right] \quad (2.15) \end{aligned}$$

Далі в (2.15) проведемо заміну  $\omega \rightarrow \omega + i\delta\omega$ , відповідно до (2.2) і отримаємо

$$\frac{dP_{e_z}}{dt} = n_B e \beta \frac{1}{4} |E_0|^2 \left( 1 - \frac{u_{||}^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{4(\omega + k_z u_{||}) k_z \delta\omega}{[\Omega_B^2 - (\omega + k_z u_{||})^2 + \delta\omega^2]} + 4\delta\omega^2 (\omega - k_z u_{||})^2 \quad (2.16)$$

Введемо позначення плазмової частоти  $\omega_B^2 = \frac{4\pi e n_B}{m}$ . Тоді вираз (2.16) набере вигляду:



$$\frac{dP_{eZ}}{dt} = \omega_B^2 \left(1 - \frac{u_{||}^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \beta \frac{|E_0|^2}{4\pi} 2k_Z \frac{\delta\omega(\omega - k_Z u_{||})}{\left[\Omega_B^2 - (\omega - k_Z u_{||})^2 \delta\omega^2\right]^2 + 4\delta\omega^2(\omega - k_Z u_{||})^2} \quad (2.17)$$

Нагадаємо, що під середнім значенням густини імпульсу електронів ми розуміємо

$$P_e = n_B \left\langle \frac{mv_z}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_z}{c}\right)^2}} \right\rangle$$

Звідси можемо отримати, що малі зміни  $P_e$ , та середньої густини енергії  $W_e = mc^2 \left\langle \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_z}{c}\right)^2}} - 1 \right\rangle$  пов'язані між собою співвідношенням

$$\delta W_e = u_{||} \delta P_e \quad (2.18)$$

Далі використаємо закони збереження енергії та імпульсу під час випромінювання

$$\frac{d}{dt} (W + W_e + W_{||}) = 0, \quad \frac{d}{dt} (P + P_e) = 0 \quad (2.19)$$

Де  $W, P$  – середні густини енергії та імпульсу електромагнітної хвилі,  $W_{||}$  – густина енергії плазмових коливань (кучкових хвиль). Також використовуємо зв'язок між середніми імпульсом та енергією електромагнітної хвилі

$$P = \frac{k\pi}{\omega} W, \quad W = \alpha \frac{|E_0|^2}{8\pi} \quad (2.20)$$

Тут  $\alpha$  – параметр, який визначається конкретним типом електромагнітної хвилі. Звідси отримуємо, що

$$P = \alpha \frac{k_z |E_0|^2}{\omega 8\pi} \quad (2.21)$$

Використовуємо закон збереження імпульсу (2.19), зв'язок між  $P$  та  $W$  (2.20) рівняння (2.17) перетворимо до вигляду

$$\frac{d}{dt}(W, P) = -\frac{\omega}{\alpha} \frac{2\beta\omega_B^2\gamma^{-3}(\omega - k_z u_{||})\delta\omega}{[(\omega - k_z u_{||})^2 - \Omega_B^2]^2 + 4(\omega - k_z u_{||})^2\delta\omega^2} (W, P) \quad (2.22)$$

Тут  $\gamma = \left(1 - \frac{u_{||}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ . В рівнянні (2.22) враховано випадок великої густини електронів

$$\Omega_B^2 \gg \delta\omega^2 \quad (2.23)$$

### 2.3. Аналіз та чисельні оцінки

Проведемо аналіз отриманого рівняння для середньої густини енергії електромагнітної хвилі (2.22).

З цього рівняння випливає, що густина енергії випромінювання  $W$  зростає з часом за умови  $\omega - k_z u_{||} < 0$ . Максимальне зростання буде мати місце, коли коефіцієнт

$$\Theta = -\frac{w\omega}{\alpha} \frac{\beta\omega_B^2\gamma^{-3}(\omega - k_z u_{||})\delta\omega}{[(\omega - k_z u_{||})^2 - \Omega_B^2]^2 + 4(\omega - k_z u_{||})^2\delta\omega^2} \quad (2.24)$$

буде максимальним. Якщо дослідити цей коефіцієнт на екстремум відносно  $x = \omega - k_z u_{||}$ , то отримаємо, максимум інкременту реалізується за умови

$$\omega - k_z u_{||} = -\Omega_B \quad (2.25)$$

Через те, що енергія  $\sim E_z^2$ , а  $E_z \sim e^{\delta\omega t}$ , то з (2.22) випливає, що

$$\Theta = 2\delta\omega \quad (2.26).$$

Приймавши цю умову знаходимо, що інкремент зростання за умови (2.25) дорівнює

$$\delta\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta \omega_B^2 \gamma^{-3} \omega}{\alpha \Omega_B} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.27)$$

Тепер умову (2.23) можемо записати у явному вигляді

$$\frac{\Omega_B}{\omega} \gg \frac{1}{4} \frac{\beta \omega_B^2 \gamma^{-3}}{\alpha \Omega_B^2} \quad (2.28)$$

Так, коли  $\Omega_B^2 = \omega_B^2 \gamma^{-3}$ ,  $\beta = 1$ ,  $\alpha = 1$ , ця умова набирає вигляду

$$\frac{\Omega_B}{\omega} \gg \frac{1}{4}$$

З (2.24) та (2.26) випливає, що коли  $\omega - k_z u_{||} = 0$ , то  $\Theta = 0$  та  $\delta\omega = 0$ . Тобто електромагнітне поле не змінюється.

Коли ж

$$\omega - k_z u_{||} = \Omega_B, \quad (2.29)$$

то

$$\delta\omega = i \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{2} \frac{\omega_B^2 \gamma^{-3}}{\Omega_B} \omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.30)$$

В цьому випадку рівняння (2.12) зводиться до наступного

$$\frac{dW}{dt} = i 2 |\delta\omega| W \quad (2.31)$$

Під час такої взаємодії енергія періодично перекидається від електронного пучка в випромінювання, а потім у зворотному напрямку. Такий процес називається розпадом початкового збудження.

На рис. 2.1 подана характерна поведінка густини енергії в процесах (2.25) (нестійкість) та (2.29) (розпад збурення).

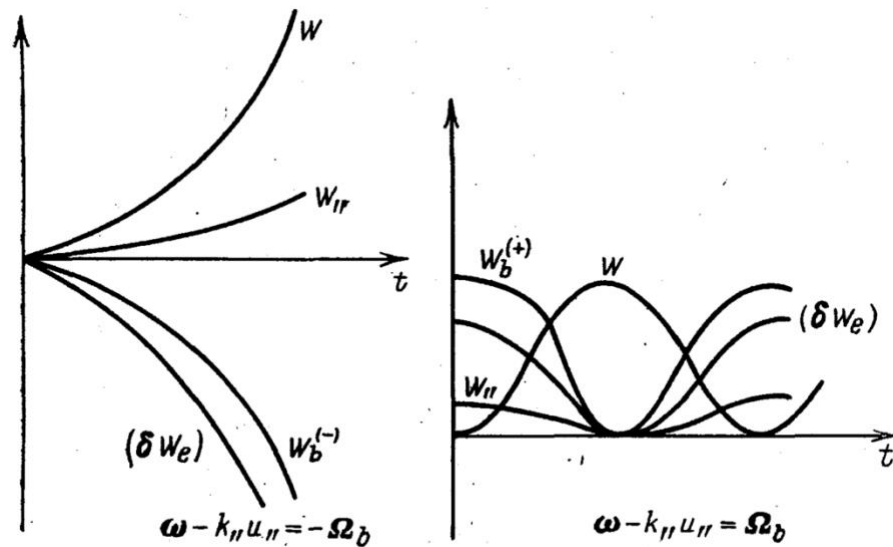


Рис. 2.1 [2]

Проведемо оцінку максимальних значень густини електричного поля та механізмів завдяки яким має місце нелінійна стабілізація нестійкості за рахунок вимушеного раманівського розсіювання випромінювання.

Використовуючи закон збереження енергії можемо отримати вираз для густини енергії випромінювання

$$\begin{aligned}
W = \frac{\alpha |E_0|^2}{8\pi} &= n_B \left( mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v_z^2}{c^2}\right)}} \right) - mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{u_{||}^2}{c^2}\right)}} \right) \right) \approx \\
&\approx mc^2 \gamma^3 \frac{u_{||}^2}{c^2} n_B \left( 1 - \frac{v_z}{u_{||}} \right)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Оцінимо  $u_{||} - v_z$ . Це можна виконати за допомогою співвідношення (2.25) та (2.24). З цих співвідношень випливає:

$$u_{||} = \frac{\omega + \Omega_B}{k_z} \tag{2.33}$$

Випромінювання припиняється, коли  $\omega - k_z v_z = 0$ , тобто

$$v_z = \frac{\omega}{k_z} \tag{2.34}$$

Звідси

$$1 - \frac{v_z}{u_{||}} = \frac{\Omega_B}{k_z u_{||}} \tag{2.35}$$

Тоді

$$\left( \frac{|E_0|^2}{8\pi} \right)_{max} \approx n_B mc^2 \gamma^3 \frac{u_{||}}{c^2} \frac{\Omega_B}{k_z u_{||}} \tag{2.36}$$

Можемо обчислити електронний ККД як відношення зміни густини кінетичної енергії електронного пучка до вихідної густини електронів.

$$n_{\max} = \frac{\left(\frac{\alpha |E_0|^2}{8\pi}\right)_{\max}}{n_b m c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_{\parallel}^2}{c^2}}} - 1\right)} = \frac{n_b m c^2 \gamma^3 \frac{u_{\parallel}^2}{c^2} \frac{\Omega_B}{k_z u_{\parallel}}}{n_b m c^2 (\gamma - 1)} = \frac{\gamma^3 u_{\parallel}^2 \Omega_B}{\gamma - 1 c^2 k_z u_{\parallel}} \quad (2.37)$$

Рівняння (2.35) свідчить про те, що стабілізація нестійкості відбувається за рахунок захвату електронів хвилею пучкових коливань з частотою  $\Omega_B$ . Дослідження [3] показують, що можливий й інший механізм стабілізації нестійкості – нелінійний зсув частоти.

Нелінійний зсув частоти відбувається поки пучок гальмується, або коли змінюється частота плазмових осциляцій.

Це відбувається, коли

$$v = \frac{\delta\omega}{\Omega_B} < 0,1 \leq 1 \quad (2.38)$$

Таким чином, для не дуже малих  $v$  ( $\geq 0,1$ ) стабілізація обумовлена захватом електронів пучка пучковою хвилею та наступним розвитком сильної турбулентності. Коли ж  $v$  – малі, турбулентність не виникає і захват відсутній, оскільки через нелінійний зсув частоти амплітуда пучкової хвилі до захватного значення дорости не встигає.

## РОЗДІЛ 3

### РЕАЛІЗАЦІЯ КОМП'ЮТЕРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

#### 3.1. Методика чисельного експерименту

Перевіримо правильність математичної моделі, що описує раманівське розсіювання електромагнітної хвилі на електронному пучку. Для цього використаємо метод великих частинок [6-7]. При цьому, також, врахуємо взаємодію електронів між собою, тобто пучкові хвилі.

Рух великих частинок описуємо за допомогою рівняння руху

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{e\beta}{m} \left(1 - \frac{v_z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} E(z, t) - \Omega_B^2 (z - z_H). \quad (3.1)$$

Координату знаходимо з співвідношення

$$\frac{dz}{dt} = v_z. \quad (3.2)$$

Права частина рівняння (3.1) містить два доданки: перший описує коливання частинок у полі електромагнітної хвилі, а другий – описує коливання частинок під дією пучкової хвилі, тобто в цій системі має місце два різних осциляторних процеси.

Вважаємо, що в початковий момент часу частинки розподілені за координатою рівномірно, початкова швидкість у них однакова.

Параметри системи, яку досліджуємо чисельно, наступні

$\gamma_0 = 2$  - початковий релятивістський фактор.

$u_{||} = c\sqrt{1 - (1/\gamma_0)^2}$  - початкова швидкість.

$\omega = 1 \cdot 10^{12}$  - частота електромагнітної хвилі.

$\Omega = \omega/2$  - частота пучкових коливань.

$\Delta\omega = \Omega/5$  - інкремент зростання електромагнітної хвилі.

$T = 2\pi/\omega$  – період електромагнітної хвилі.

$t_0 = 0$  – початковий момент часу.

$t_1 = 15 \cdot T$  – кінцевий момент часу.

Далі обчислюємо швидкості координати великих частинок, а потім знаходимо усереднені за частинками параметри системи, в тому числі і середню релятивістську кінетичну енергію. За законом збереження енергії зміна цієї енергії дорівнює зміні енергії електромагнітного поля, що взята з протилежним знаком.

Через те, що система досліджувана система є періодичною, то достатньо розглянути частинки, що містяться на одній довжині хвилі.

Електричне поле модулюємо виразом

$$E_z(z, t) = \frac{1}{2} [E_0 \exp(\Delta\omega t) \cdot \exp(-i\omega t + ik_z z) + c. c.] \quad (3.3)$$

В цьому рівнянні врахували, що за рахунок вимушеного раманівського розсіювання електричне поле зростає експоненціально.

### 3.2. Комп'ютерний код

Програма написана на мові python та виконується в середовищі Jupiter Notebook. В програмі ми імпортуємо необхідні бібліотеки визначаємо константи, формуємо функції для розрахунку системи рівнянь (3.1) та (3.2) та кінетичної енергії. Далі за вхідними даними для кожного  $i$ -го електрона з початковою координатою  $z_{0i}$  розраховуємо середню швидкість в кожен момент часу від  $t_0$  до  $t_1$ . Зберігаємо результат в масив, та розраховуємо середню швидкість та середню кінетичну енергію пучка за всіма електронами. Блок-схема комп'ютерного коду подана на рисунку 3.1



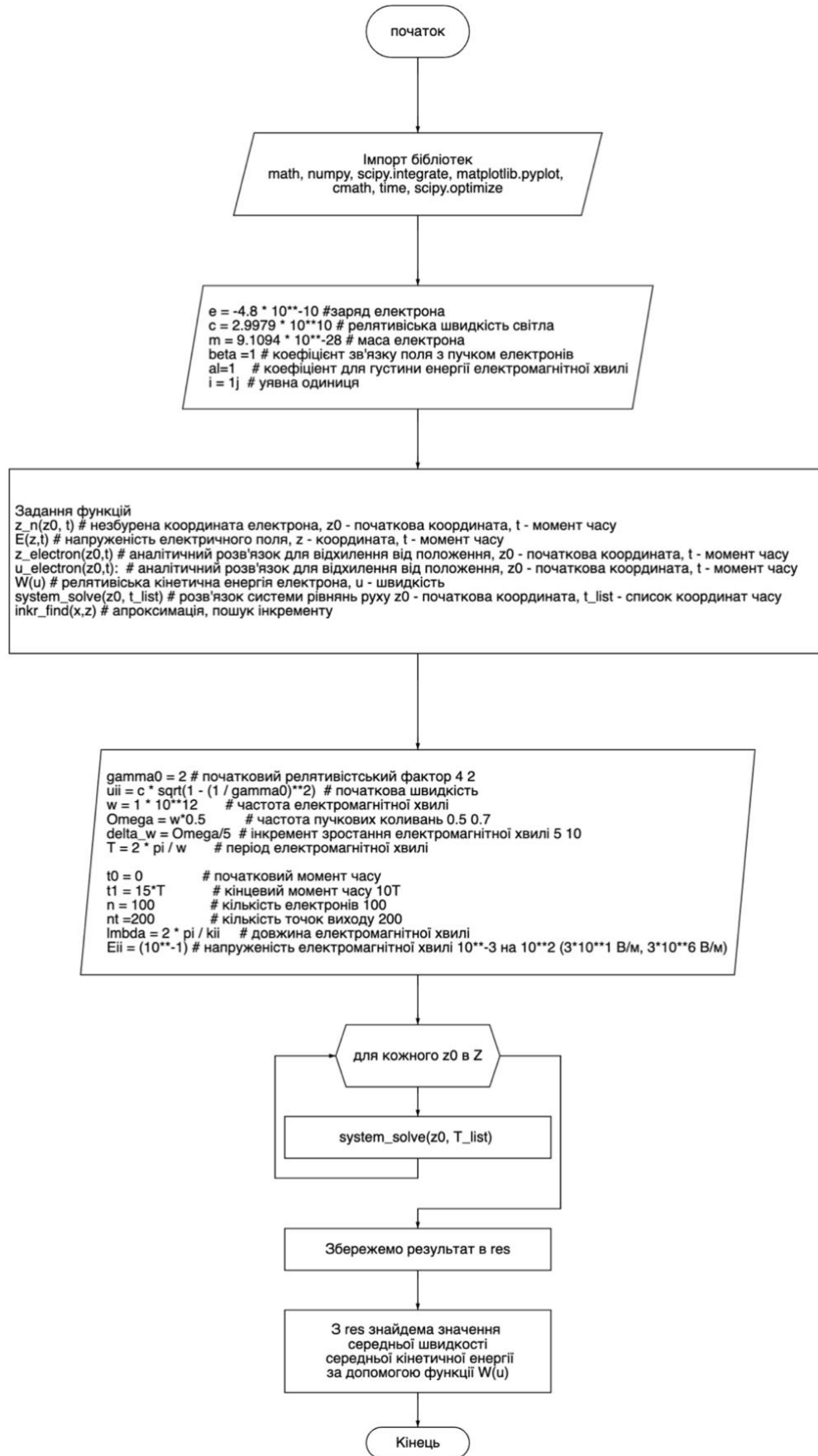


Рис 3.1 – Блок-схема комп'ютерного коду

### 3.3. Аналіз результатів комп'ютерного моделювання

Розглянемо два режими розвитку системи: з максимальним енергообміном, коли

$$\omega - k_z u_{||} = -\Omega_B \quad (3.4)$$

та коли

$$\omega - k_z u_{||} = 0. \quad (3.5)$$

У випадку (3.5) обмін енергією електромагнітної хвилі та релятивістського електронного пучка буде відсутнім.

#### 3.3.1. Випадок $\omega - k_z u_{||} = -\Omega_B$

На рисунку 3.2 подані залежності швидкості двох окремих електронів, які мають різні початкові координати, від нормованого часу. Початкові швидкості електронного пучка та електромагнітної хвилі близькі, тому в системі відліку електрона на нього діє з боку електромагнітного поля квазістала сила. Тому для електрона, який знаходиться в прискорювальній фазі електромагнітного поля швидкість електрона монотонно зростає протягом 15 періодів електромагнітної хвилі, а для електрона який знаходиться в гальмівній фазі його швидкість монотонно зменшується. Слід зазначити, що в цьому випадку коливання як під дією електромагнітного поля, так і під дією пучкових хвиль є узгодженими і в цьому випадку є відсутніми.

На рисунку 3.3 подана залежність усередненої швидкості релятивістського електронного пучка за усіма електронами від нормованого часу. Бачимо, що незважаючи на те, що у частини електронів швидкість збільшується, середня швидкість електронного пучка експоненційно зменшується.

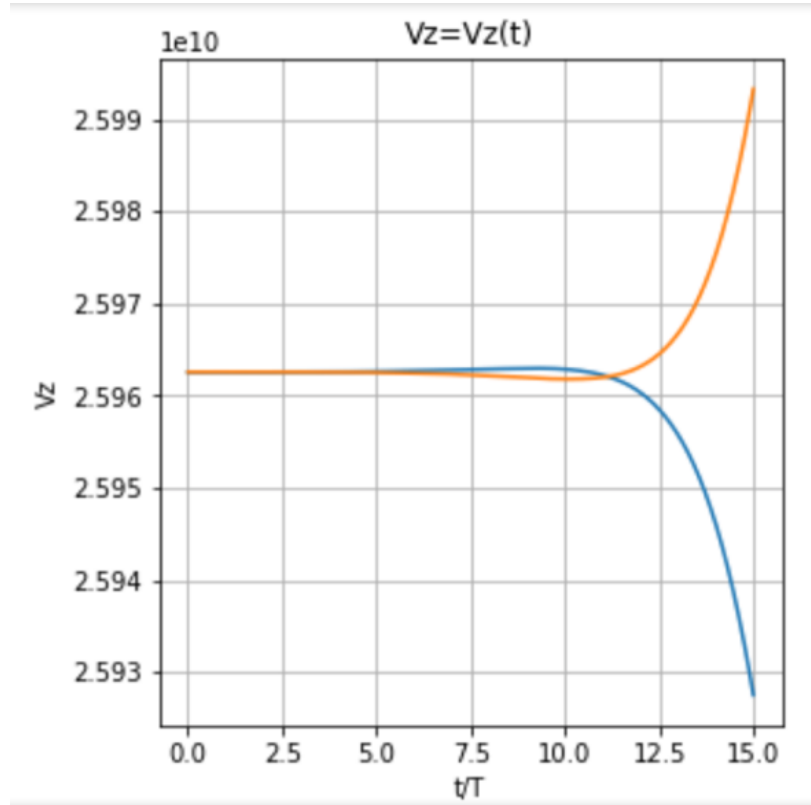


Рис. 3.2 – Залежність швидкості двох окремих електронів, які мають різні початкові координати, від нормованого часу

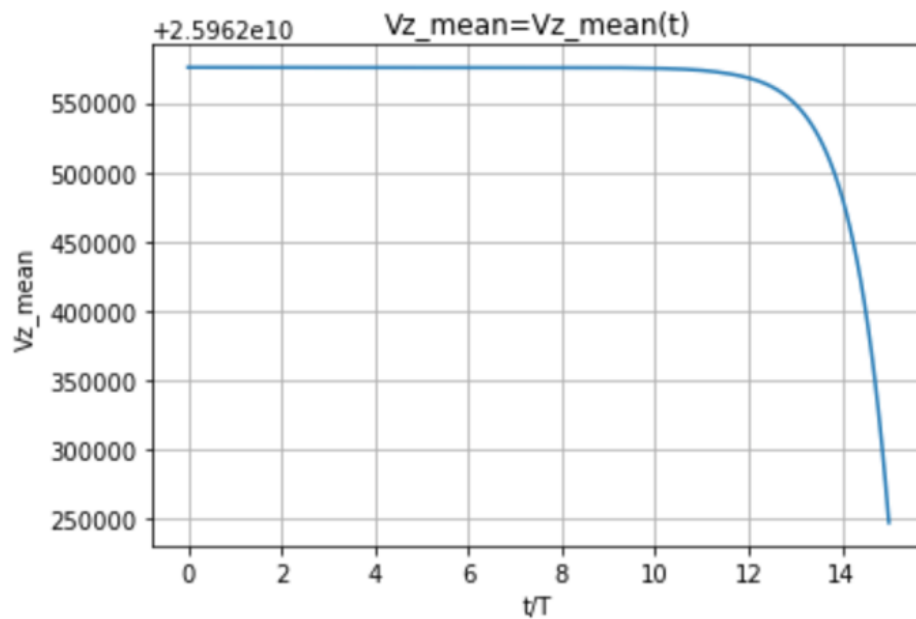


Рис. 3.3 – Залежність середньої швидкості релятивістського електронного пучка від нормованого часу

На рисунку 3.4 подано залежність середньої кінетичної енергії релятивістського електронного пучка від нормованого часу. Бачимо, що середня кінетична енергія пучка електронів зменшується експоненціально. З цього та з закону збереження енергії випливає, що середня енергія електромагнітної хвилі експоненціально збільшується, як це і було передбачено в розділі 2.

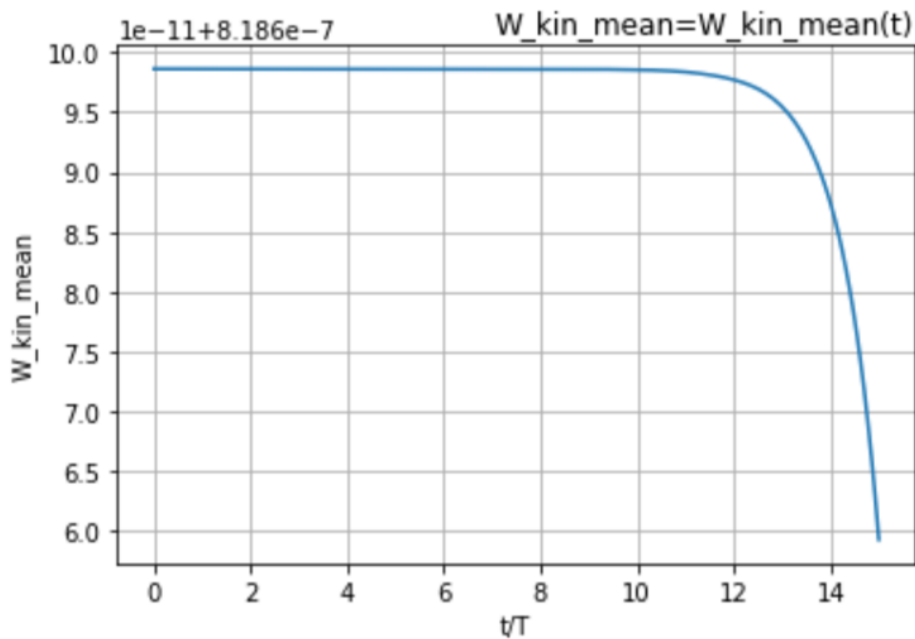


Рис. 3.4 – Залежність середньої кінетичної енергії електронного пучка від нормованого часу

На рисунку 3.5 зображено фазовий портрет електронів пучка в момент часу  $t = 0$ . Бачимо, що в початковий момент часу усі електрони мають однакову початкову швидкість та рівномірно розподілені за координатою.

На рисунку 3.6 зображено фазовий портрет електронів пучка в кінцевий момент часу  $t = 15T$ . Бачимо, що електрони пучка мають різні швидкості. В центральній частині фазового портрету вони знаходяться в прискорювальній фазі електромагнітного поля і тому мають більшу швидкість порівняно з електронами, які знаходяться в гальмівній фазі. В середньому ж як це випливає з рисунка 3.3 швидкість електронного пучка зменшується.

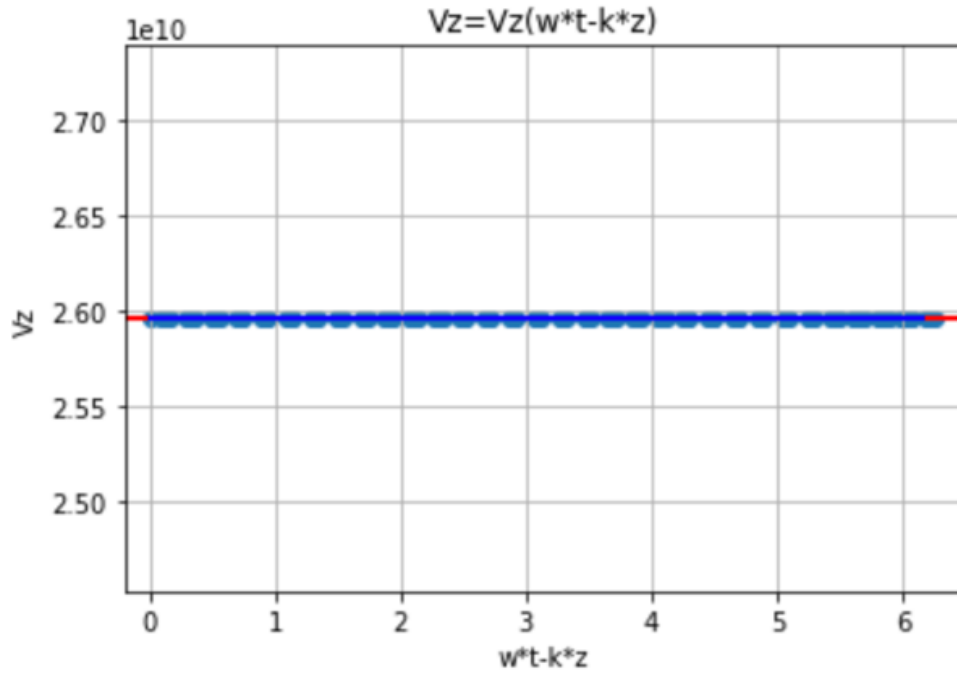


Рис. 3.5 – Фазовий портрет електронів пучка в момент часу  $t = 0$

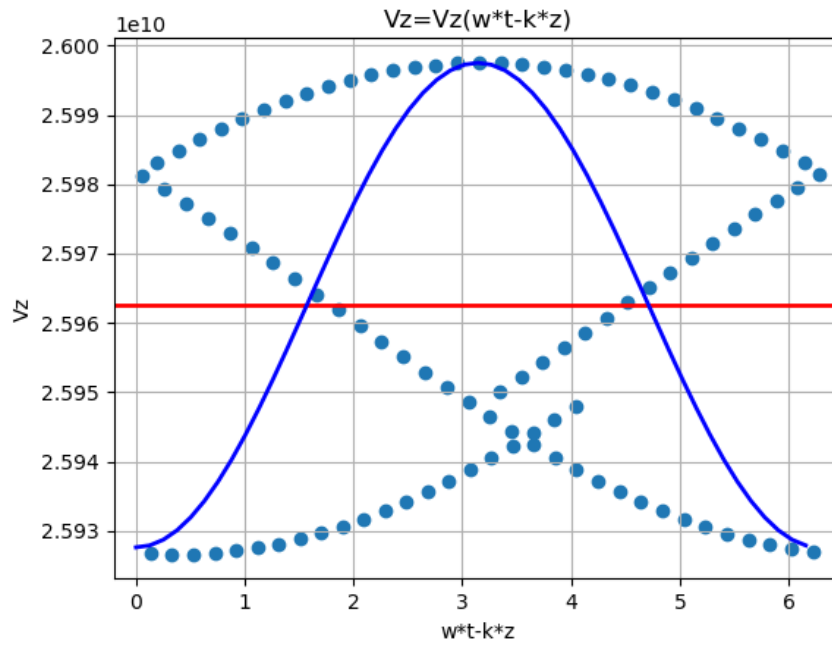


Рис. 3.6 – Фазовий портрет електронів пучка в кінцевий момент часу  $t = 15T$

### 3.3.2. Випадок $\omega - k_z u_{||} = 0$

Тепер розглянемо випадок, коли  $\omega - k_z u_{||} = 0$ . На рисунку 3.7 подані залежності швидкості двох окремих електронів, які мають різні початкові координати, від нормованого часу. Як бачимо, тут на відміну від рис. 3.2 має місце осциляторний рух електронів, незважаючи на однакову початкову швидкість електронного пучка та електромагнітної хвилі. Такий осциляторний рух обумовлений пучковими полями. З рисунку випливає, що період таких осциляцій дорівнює двом періодам коливань електромагнітної хвилі. Це узгоджується з тим, що досліджуваній системі частота пучкових коливань в два рази менше частоти електромагнітної хвилі  $\Omega = \omega/2$ . Також зазначимо, що амплітуда цієї осциляторної швидкості набагато менша з швидкість у випадку рис. 3.2.

На рисунку 3.8 подана залежність усередненої швидкості релятивістського електронного пучка за усіма електронами від нормованого часу. Бачимо, що тут є характерними осциляторний рух, а не монотонне зменшення середньої швидкості, як у випадку рис. 3.3.

На рисунку 3.9 подано залежність середньої кінетичної енергії релятивістського електронного пучка від нормованого часу. Бачимо, що тут є характерним осциляторний рух, а не монотонне зменшення середньої швидкості, як у випадку рис. 3.4. Звертає на себе увагу також досить мала величина цих осциляцій порівняно з зміною кінетичної енергії у випадку 3.4. Тобто фактично обмін енергією між пучком та електромагнітною хвилею в цьому випадку відсутній.

На рисунку 3.10 зображено фазовий портрет електронів пучка в момент часу  $t = 0$ . Початкові умови в обох випадках однакові, тому фазові портрети в обох випадках однакові (рис. 3.5).

На рисунку 3.1 зображено фазовий портрет електронів пучка в кінцевий момент часу  $t = 15T$ . Цей портрет відрізняється від подібного рис. 3.6, як за величиною швидкостей електронів, так і за характером рух (осциляторний).

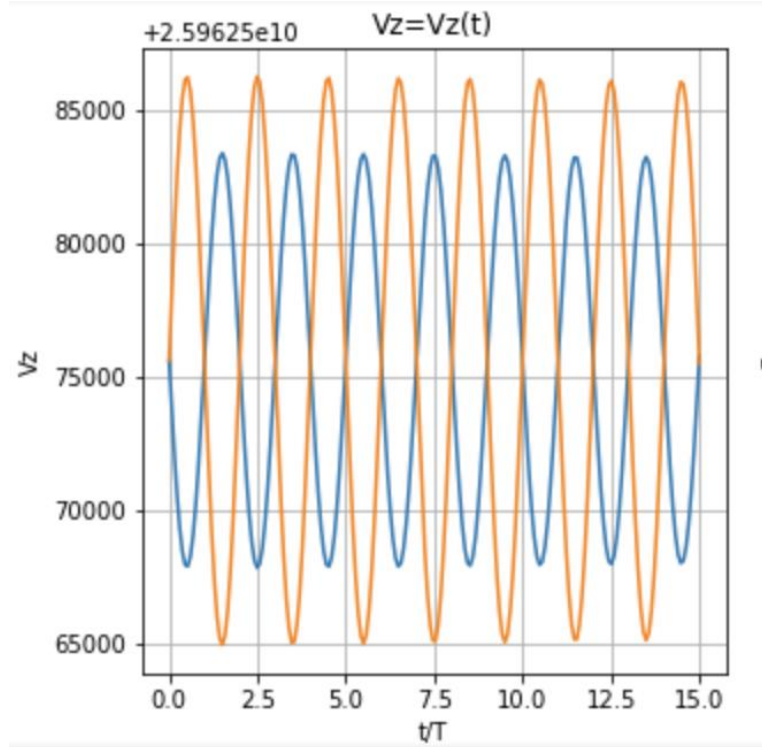


Рис. 3.7 – Залежність швидкості двох окремих електронів, які мають різні початкові координати, від нормованого часу

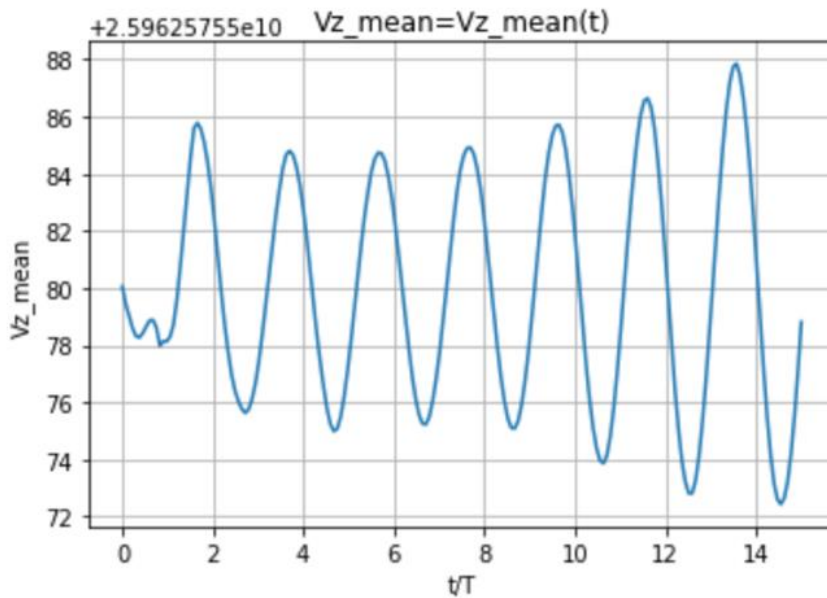


Рис. 3.8 – Залежність середньої швидкості релятивістського електронного пучка від нормованого часу

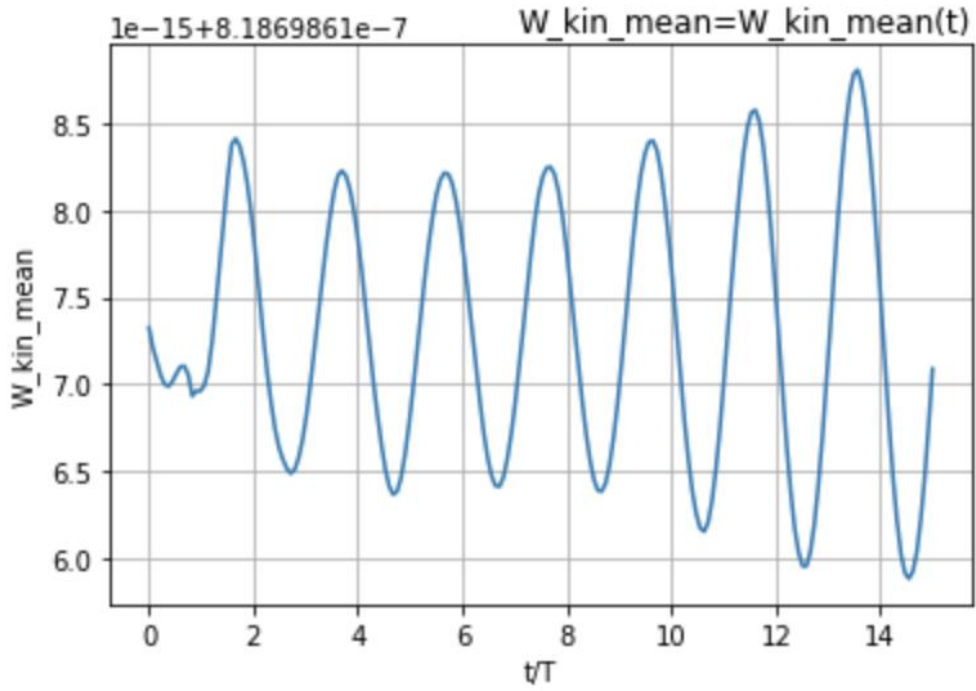


Рис. 3.9 – Залежність середньої кінетичної енергії електронного пучка від нормованого часу

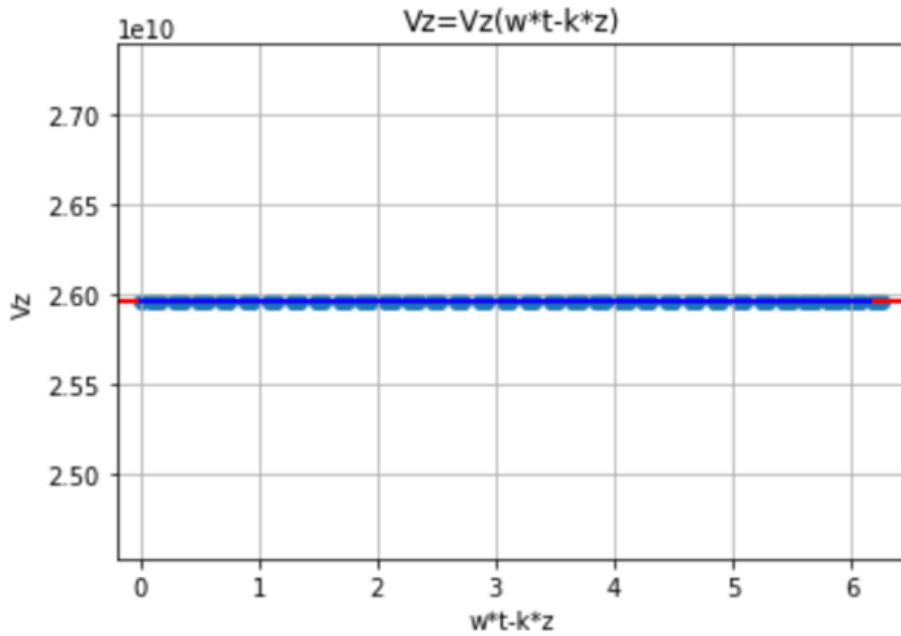


Рис. 3.10 – Фазовий портрет в момент часу  $t = 0$



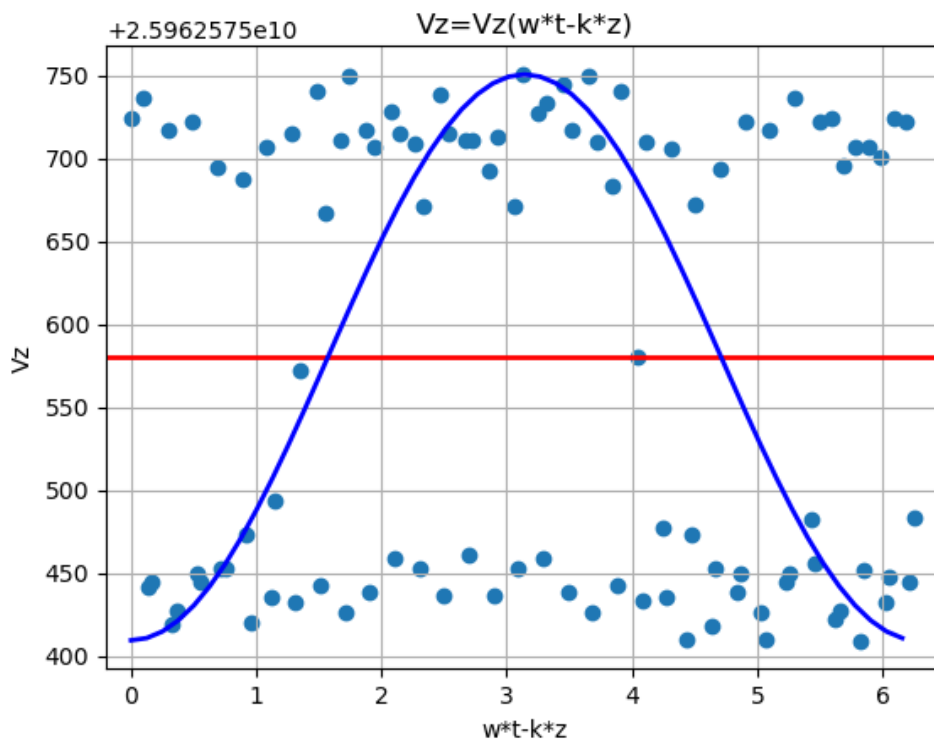


Рис. 3.11 – Фазовий портрет електронів пучка в кінцевий момент часу  $t = 15T$

## ВИСНОВКИ

В кваліфікаційній роботі проведено моделювання вимушеного раманівського розсіювання електромагнітних хвиль на сильнострумовому релятивістському електронному пучку у наближенні слабого сигналу, як аналітично, так і чисельно.

В рамках слабосигнального наближення отримано рівняння для густини енергії електромагнітної хвилі, яке визначає енергообмін між електромагнітною хвилею та електронним пучком під час раманівського розсіювання. Визначено, умови, за яких відбувається максимальне підсилення електромагнітної хвилі, інкременти зростання, проведено оцінку максимальних значень електромагнітної хвилі залежно від параметрів електронного пучка. Отримані критерії, виконання яких необхідно для існування досліджуваного ефекту.

З використанням метода великих частинок, використовуючи лише рівняння руху заряджених частинок, створена комп'ютерна програма, яка моделює процес раманівського розсіювання електромагнітної хвилі на сильнострумовому електронному пучку. Проведено комп'ютерний експеримент і з'ясована динаміка середніх значень швидкості, кінетичної енергії за ансамблем електронів пучка. Розглянуто різні випадки взаємодії електронного пучка та електромагнітної хвилі. Результати комп'ютерного експерименту підтвердили аналітичні розрахунки щодо умов та параметрів раманівського розсіювання електромагнітних хвиль на сильнострумовому електронному пучку.

**ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕЛІЛ**

1. Raman\_scattering [Електронний ресурс] . – Режим доступу : [https://en.wikipedia.org/wiki/Raman\\_scattering](https://en.wikipedia.org/wiki/Raman_scattering)
2. Kulish V. V. Hierarchic electrodynamics and free electron lasers: concepts, calculations, and practical applications / V. V. Kulish. — CRC Press, 2011. — 700 p.
3. Кузелев М.В. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника / М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе, П.С. Стрелков. – М. : Изд-во МГТУ им. Баумана, 2002. – 544 с.
4. Кузелев М. Нелинейные явления при электромагнитных взаимодействиях электронных пучков с плазмой / М. Кузелев, Ю. Бобылёв. — Физматлит, 2009. — 456 с.
5. Freund H. P. Principles of free electron lasers / H. P. Freund, T. M. A. Jr. — Springer, 2018. — 729 p.
6. Hockney R. W. Computer simulation using particles / R. W. Hockney, J. W. Eastwood. — CRC Press, 2021. — 540 p.
7. Birdsall C. K. Plasma physics via computer simulation / C. K. Birdsall, A. B. Langdon. — CRC Press, 2018. — 504 p.

**ДОДАТКИ****ДОДАТОК А**  
**Лістинг програми**

```
from math import sqrt, exp, cos, pi
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
from cmath import exp as cexp
import time
from scipy.optimize import curve_fit

# constants
e = -4.8 * 10**-10
c = 2.9979 * 10**10
m = 9.1094 * 10**-28
beta = 1 # коефіцієнт зв'язку поля з пучком електронів
a1=1 # коефіцієнт для густини енергії електромагнітної хвилі
i = 1j # уявна одиниця

# Функції

def z_n(z0, t): # z незбурена координата електрона, z0 - початкова координата
    return z0 + uii * (t - t0)
```

```
def E(z,t): # напруженість електричного поля
```

```
    return Eii * (cexp(delta_w2*t).real)*cos(-w * t + kii * z)
```

```
def z_electron(z0,t): # аналітичний розв'язок для відхилення від рівноважного положення
```

```
    return (( (e/m)*beta*gamma0**-3*0.5*Eii) / ( (-i*w + delta_w + kii* uii)**2 + Omega**2)) * 2* cexp(-i*w*t + delta_w*t + i*kii* (uii*t+z0)).real*2
```

```
def u_electron(z0,t): # аналітичний розв'язок для відхилення від рівноважної швидкості
```

```
    return (( (e/m)*beta*(gamma0**-3)*0.5*Eii) / ( (-i*w + delta_w + kii* uii)**2 + Omega**2)) * 2* (-i * w + delta_w + i * kii * uii)*cexp(-i*w*t + delta_w*t + i*kii* (uii*t+z0)).real*2
```

```
def W(u): # кінетична енергія електрона
```

```
    return (m * c**2)*(1 / (1 - (np.array(u)/c)**2)**0.5 - 1)
```

```
def system_solve(z0, t_list): #2 розв'язок системи рівнянь руху
```

```
    def F(s,t): # s - vector [z, v]
```

```
        u = s[1]
```

```
        dzdt = u
```

```
        dvdt = (e / m) *beta* ((1 - u**2 / c**2) ** 1.5) * E(s[0], t) - (Omega ** 2) * (s[0] - z_n(z0,t))
```

```
    return [dzdt, dvdt]
```

```
s0=[z0, uii]
s = odeint(F, s0, t_list, rtol=10**-10)
return s
```

# Апроксимація, пошук інкременту

```
def inkr_find(x,z):
    def func(X, a, b):
        x = X
        return x0+a*(1-np.exp(b*x))
    x0=z[0]
    return curve_fit(func, x, z)
```

# Вхідні параметри

```
gamma0 = 2 # початковий релятивістський фактор 4 2
uii = c * sqrt(1 - (1 / gamma0)**2) # початкова швидкість
w = 1 * 10**12 # частота електромагнітної хвилі
Omega = w*0.5 # частота пучкових коливань 0.5 0.7
delta_w = Omega/5 # інкремент зростання електромагнітної хвилі 5 10
T = 2 * pi / w # період електромагнітної хвилі

t0 = 0 # початковий момент часу
t1 = 15*T # кінцевий момент часу 10T
n = 100 # кількість електронів 100
nt =200 # кількість точок виходу 200
```

```

mode=1
if mode==1:
    kii = (w + Omega/10) / uii # хвильове число
    delta_w2= delta_w
elif mode==2:
    kii = (w + 0) / uii # хвильове число
    delta_w2= 0
elif mode==3:
    kii = (w - Omega/10) / uii # хвильове число
    delta_w2= delta_w*i

lmbda = 2 * pi / kii # довжина електромагнітної хвилі
Eii = (10**-1) # напруженість електромагнітної хвилі 10**-3 на 10**2 (3*10**1
В/м, 3*10**6 В/м)

# Критерії

criterium1 = kii * abs(((e / m) * beta * (gamma0**-3) * 0.5 * Eii) / ((-i * w + delta_w
+ i * kii * uii)**2 + Omega**2) )
print('kz=',criterium1, ' kz << 1' )
print('delta_w/Omega=',delta_w/Omega, ' delta_w/Omega << 1' )
print('зростання амплітуди за весь час,
cexp(delta_w2*t1).real=',cexp(delta_w2*t1).real)

Z = np.linspace(0, lmbda, n, endpoint=False) # generate z0 for n electrons

```

```

T_list = np.linspace(t0,t1, nt) # часовий інтервал для виводу даних

res=[system_solve(z0, T_list) for z0 in Z] # res[88][155][1] - 88- номер
електрона, 155 -номер моменту часу, 1 - швидкість
# res[88][:,1] -- швидкість 88 електрона від часу
res2=np.array(res).transpose() # res2[1][155][88] - 1 - швидкість, 155 -номер
моменту часу, 88- номер електрона
# res2[1][155,:] -- швидкості усіх електронів в момент часу 155

# Графіки
n_el_1=15;n_el_2=60
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(10,5))
ax1.plot(T_list/T,res[n_el_1][:,1], T_list/T,res[n_el_2][:,1])
ax1.set(xlabel="t/T", ylabel="Vz", title='Vz=Vz(t)')
ax1.grid(True)
ax2.plot(T_list/T,res[n_el_1][:,0], T_list/T,res[n_el_2][:,0])
ax2.set(xlabel="t/T", ylabel="z", title='z=z(t)')
ax2.grid(True)

plt.figure()
V_mean_t=[np.mean(u) for u in res2[1][:]]
plt.plot(T_list/T,V_mean_t)
plt.ylabel("Vz_mean")
plt.xlabel("t/T")
plt.title("Vz_mean=Vz_mean(t)")
plt.grid(True)

```



```

plt.figure()
W_kin_t=[np.mean(W(u)) for u in res2[1][:]]
plt.plot(T_list/T,W_kin_t)
plt.ylabel("W_kin_mean")
plt.xlabel("t/T")
plt.title("W_kin_mean=W_kin_mean(t)", loc='right')
plt.grid(True)

```

```

plt.figure()
g_mean_t2=[np.mean((1/(1-(np.array(u)**2/c/c)**0.5)) for u in res2[1][:])
plt.plot(T_list/T,g_mean_t2)
plt.ylabel("g_mean2")
plt.xlabel("t/T")
plt.title("g_mean2=g_mean2(t)")
plt.grid(True)

```

```
# Апроксимація, пошук інкременту
```

```
# Середня швидкість
```

```

print('Середня швидкість')
V_mean_t=[np.mean(u) for u in res2[1][:]]
AA=inkr_find(np.array(T_list)/T,V_mean_t)
inkr=AA[0][1]; print(AA)
print('інкремент_н=',inkr,inkr/T)
print('inkr/delta_w/T=',inkr/delta_w/T)

```

```
# Кінетична енергія
```

```
print('\n','Кінетична енергія' )
```

```
W_kin_t=[np.mean(W(u)) for u in res2[1][:]]
```

```
AA=inkr_find(np.array(T_list)/T,W_kin_t)
```

```
inkr=AA[0][1]; print(AA)
```

```
print('інкремент_n=',inkr,inkr/T)
```

```
print('inkr/delta_w/T=',inkr/delta_w/T)
```

```
# Для випадку, коли в систему диференціальних рівнянь входить рівняння для  
релятивістського фактору
```

```
plt.figure()
```

```
g_mean_t=[np.mean(g) for g in res2[1][:]]
```

```
plt.plot(T_list/T,g_mean_t)
```

```
plt.ylabel("g_mean")
```

```
plt.xlabel("t/T")
```

```
plt.title("g_mean=g_mean(t)")
```

```
plt.grid(True)
```

```
# Фазові портрети
```

```
##%matplotlib inline
```

```
plt.figure()
```

```
t_=-1
```

```
V_=[u for u in res2[1][t_]]
```

```
Vm=sorted(V_-1)
```

```
wt_kz=[(w*T_list[t_]-kii * z) % 2*pi for z in res2[0][t_ ]
```

```

plt.scatter(wt_kz,V_)
plt.plot([-0.2, 2*pi+0.2],[u11,u11], '-r', linewidth=2)
al=np.linspace(0, 2*pi, 50, endpoint=False)
plt.plot(al, u11+(Vm-u11)*(-1)*np.cos(al), '-b', linewidth=2)
plt.ylabel("Vz")
plt.xlabel("w*t-k*z")
plt.xlim (-0.2, 2*pi+0.2)
plt.title("Vz=Vz(w*t-k*z)")
plt.grid(True)
plt.show()

```

# Фазові портрети, анімація

```

Amin_max=sorted(np.array(res2[1]).flatten())
v_min=Amin_max[0];v_max=Amin_max[-1]

get_ipython().run_line_magic('matplotlib', '')
fig = plt.figure()

for t_ in range(0,len(res2[1]),1) :
    V_=[u for u in res2[1][t_]]
    wt_kz=[(w*T_list[t_]-kii * z) % 2*pi for z in res2[0][t_] ]

    plt.clf()
    plt.scatter(wt_kz,V_)
    plt.plot([-0.2, 2*pi+0.2],[u11,u11], '-r', linewidth=2)
    al=np.linspace(0, 2*pi, 50, endpoint=False)

```

```
plt.plot(al, uii+(v_max-uii)*(-1)*np.cos(al), '-b', linewidth=2)
plt.ylabel("Vz")
plt.xlabel("w*t-k*z")
plt.ylim (v_min, v_max)
plt.xlim (-0.2, 2*pi+0.2)
plt.title("Vz=Vz(w*t-k*z)")
plt.grid(True)
plt.draw()
plt.pause(0.005)

# %matplotlib inline
```