Міністерство освіти і науки України

Сумський державний університет

Навчально-науковий інститут економіки, бізнесу та менеджменту

Кафедра економічної кібернетики

КВАЛІФІКАЦІЙНА МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА

на тему «МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕДІНКИ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ»

Виконав студент 2 курсу, групи ЕКм.-91н.а.

(номер курсу) (шифр групи)

Спеціальності 051 «Економіка»

(Економічна кібернетика)

Дініц Р.О.

(прізвище, ініціали студента)

Керівник доцент, к.ф.-м.н. Коломієць С.В.

(посада, науковий ступінь, прізвище, ініціали)

Суми – 2021 рік

РЕФЕРАТ

кваліфікаційної магістерської роботи на тему

«МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕДІНКИ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ»

студента ________Дініца Руслана Олександровича____________

(прізвище, ім’я, по батькові)

Актуальність теми, обраної для дослідження, визначається тим, що об’єктивні цивілізаційні зміни та тенденції розвитку сучасних економічних процесів, перехід від індустріального виробництва до інформаційного суспільства, до суспільства знань потребує нових підходів до моделювання та дослідження соціально-економічних систем. Досвід останніх років свідчить, що соціально-економічні системи все частіше демонструють непрогнозовану поведінку та непередбачувані властивості. За таких умов виникає нагальна потреба глибокого осмислення законів розвитку сучасного складного нелінійного світу, пошуку нових методів дослідження соціально-економічних систем, що базуються на іншій парадигмі – парадигмі нелінійності. Найбільш затребуваними методами дослідження складних соціально-економічних систем є методи нелінійної динаміки, пов'язані з пошуком єдиних механізмів розвитку нелінійних систем будь-якої природи – від фізичних і біологічних до економічних і соціальних.

Мета кваліфікаційної магістерської роботи полягає у моделюванні конкурентних процесів в економіці на основі моделі Лотки-Вольтерри та її модифікацій.

Об’єктом дослідження є моделювання конкурентних процесів в економіці на основі моделі Лотки-Вольтерри та її модифікацій.

Предметом дослідження є модель Лотки-Вольтерри та її модифікації.

Задачами дослідження є:

– вивчити сучасні підходи до моделювання та прогнозування поведінки соціально-економічних систем;

– дослідити поведінку моделі Лотки-Вольтерри в особливих точках;
– адаптувати метод Ейлера для розв'язання систем нелінійних диференціальних рівнянь;
– побудувати фазові портрети досліджуваних систем;
– описати модель типу «хижак-жертва» для конкуренції за фінансування між основними видами наукової діяльності;
– дослідити конкурентні процеси між основними видами наукової діяльності за допомогою моделі типу «хижак-жертва».

Для досягнення поставленої мети та задач дослідження були використані методи дослідження: методи системного аналізу, методи якісної теорії диференціальних рівнянь, чисельні методи розв'язування нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь та методи комп'ютерного моделювання.

Основний науковий результат кваліфікаційної магістерської роботи полягає у розроблені алгоритму застосування удосконаленого методу Ейлера для чисельного розв'язання систем нелінійних диференціальних рівнянь типу «хижак-жертва», побудові моделі конкурентної взаємодії між економічними суб'єктами за фінансування наукових досліджень.

Одержані результати можуть бути використані для моделювання конкурентної взаємодії економічних суб'єктів, дослідження нелінійних моделей соціально-економічних систем.

Результати апробації основних положень кваліфікаційної магістерської роботи розглядалися на V Міжнародній науковій конференції «Сучасні трансформації в економіці та управлінні», м. Клайпеда (Литва), 26-27 березня 2021 р. Опубліковано тези доповіді:

Коломієць С.В., Дініц Р.О. Нелінійна парадигма моделювання соціально-економічних систем. *Modern transformations in economics and management: V International scientific-practical conference*, Klaipeda, Lithuania, March 26-27, 2021. Riga, Latvia: «BALTIJA Publishing», 2021. С. 161–165.

Опублікована стаття:

Коломієць С.В., Дініц Р.О. Зміна парадигми моделювання та прогнозування соціально-економічних систем. *Причорноморські економічні студії*. 2021. Вип. 64. С. 169 – 175.

Ключові слова: нелінійність, соціально-економічні системи, системи нелінійних диференціальних рівнянь, модель Лотки-Вольтерри.

Зміст кваліфікаційної магістерської роботи викладено на 55 сторінках. Список використаних джерел із 70 найменувань, розміщений на 7 сторінках. Робота містить 3 таблиць, 12 рисунків, а також 3 додатків, розміщених на 7 сторінках.

Рік виконання кваліфікаційної роботи – 2021 рік.

Рік захисту роботи – 2021 рік.

Міністерство освіти і науки України

Сумський державний університет

Навчально-науковий інститут економіки, бізнесу та менеджменту

Кафедра економічної кібернетики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
д.е.н., професор
____________ О.В. Кузьменко
"__" ____________ 20__ р.

ЗАВДАННЯ НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ МАГІСТЕРСЬКУ РОБОТУ
(спеціальність 051 Економіка «Економічна кібернетика»)
студенту 2 курсу, групи ЕК.м-91.н.а

Дініц Руслан Олександрович
(прізвище, ім'я, по батькові студента)

1. Тема роботи Моделювання соціально-економічних систем методами нелінійної динаміки

затверджена наказом по університету від «19» лютого 2021 року № 0274-III

2. Термін подання студентом закінченої роботи «25 » травня 2021 року

3. Мета кваліфікаційної роботи моделювання конкурентних процесів в економіці на основі моделі Лотки-Вольтерри та її модифікацій

4. Об'єкт дослідження моделювання конкурентних процесів в економіці на основі моделі Лотки-Вольтерри та її модифікацій

5. Предмет дослідження модель Лотки-Вольтерри та її модифікації

6. Кваліфікаційна робота виконується на матеріалах

7. Орієнтовний план кваліфікаційної роботи, терміни подання розділів керівникові та зміст завдань для виконання поставленої мети

Розділ 1 Теоретичні основи нелінійного моделювання соціально-економічних систем. 23 квітня, 2021 року

(назва – термін подання)

У розділі 1 охарактеризувати сучасну парадигму моделювання та прогнозування соціально-економічних систем, методи вивчення різних режимів в поведінці нелінійних моделей соціально-економічних систем, надати класифікацію динамічних моделей, обрати модель для моделювання конкурентних процесів в економіці

(зміст конкретних завдань до розділу, які повинен виконати студент)

Розділ 2 Чисельні методи розв'язання систем диференціальних рівнянь
30 квітня 2021 року

(назва – термін подання)

У розділі 2 Вивчити існуючі чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь: метод Ейлера, метод Рунґе-Кутти, удосконалити метод Ейлера, адаптувати модифікований метод Ейлера для розв'язання систем диференціальних рівнянь. Провести аналіз моделі «Лотки-Вольтерри». Побудувати алгоритм дослідження нелінійних моделей на основі модифікованого методу Ейлера

(зміст конкретних завдань до розділу, які має виконати студент)

Розділ 3 Моделювання конкурентної взаємодії економічних суб'єктів
7 травня, 2021 року

(назва – термін подання)

У розділі 3 На основі моделі «Лотки-Вольтери» побудувати модель конкурентної взаємодії економічних суб'єктів та дослідити її

(зміст конкретних завдань до розділу, які повинен виконати студент)

8. Консультації з роботи:

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
1			
2			
3			

9. Дата видачі завдання: «19» лютого 2021 року

Керівник кваліфікаційної роботи ______________ С.В. Коломієць
(підпис) (ініціали, прізвище)

Завдання до виконання одержав ______________ Р.О. Дініц
(підпис) (ініціали, прізвище)

ЗМІСТ

ВСТУП

Об'єктивні цивілізаційні зміни та тенденції розвитку сучасних економічних процесів, перехід від індустріального виробництва до інформаційного суспільства, до суспільства знань потребує нових підходів до моделювання та дослідження соціально-економічних систем. Досвід останніх років свідчить, що соціально-економічні системи все частіше демонструють непрогнозовану поведінку та непередбачувані властивості. За таких умов виникає нагальна потреба глибокого осмислення законів розвитку сучасного складного нелінійного світу, пошуку нових методів дослідження соціально-економічних систем, що базуються на іншій парадигмі – парадигмі нелінійності. Найбільш затребуваними методами дослідження складних соціально-економічних систем є методи нелінійної динаміки, пов'язані з пошуком єдиних механізмів розвитку нелінійних систем будь-якої природи – від фізичних і біологічних до економічних і соціальних.

Більшість реальних економічних процесів і відповідних їм математичних моделей є нелінійними. Нелінійні рівняння можуть мати декілька якісно різних розв'язків, чим пояснюється наявність різних шляхів еволюції відповідної соціально-економічної системи.

Сучасне конкурентне економічне середовище характеризується нерівноважністю та значною нелінійністю. Дослідити конкурентну взаємодію можна на основі існуючих математичних моделей – систем диференціальних рівнянь. Найбільш відомою моделлю, яка описує конкуренцію як динамічний процес, є модель конкурентної взаємодії Лотки-Вольтерри «хижак-жертва».

Об'єктом дослідження є моделювання поведінки соціально-економічних систем на базі моделі Лотки-Вольтерри та її модифікацій.

Предметом дослідження є модель Лотки-Вольтерри та її модифікації.

Мета дослідження полягає у моделюванні конкурентних процесів в економіці на основі моделі Лотки-Вольтерри та її модифікацій.

Мета роботи обумовила наступні завдання:

– вивчити сучасні підходи до моделювання та прогнозування поведінки соціально-економічних систем;
– дослідити поведінку моделі Лотки-Вольтерри в особливих точках;
– адаптувати метод Ейлера для розв’язування систем нелінійних диференціальних рівнянь;
– побудувати фазові портрети досліджуваних систем;
– описати модель типу «хижак-жертва» для конкуренції за фінансування між основними видами наукової діяльності;
– дослідити конкурентні процеси між основними видами наукової діяльності за допомогою моделі типу «хижак-жертва».

Для виконання поставлених завдань були використані методи системного аналізу, методи якісної теорії диференціальних рівнянь, чисельні методи розв’язання нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь та методи комп’ютерного моделювання.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ НЕЛІНІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

1.1 Сучасна парадигма моделювання соціально-економічних систем

Глобалізація, становлення інноваційного типу економіки, значна конкуренція, проникнення інтернет-технологій в усі соціально-економічні сфери, зростання обсягів інформації, ускладнення бізнес-процесів – всі ці фактори вимагають зміни парадигми моделювання соціально-економічних систем, яка повинна базуватись на сучасних фундаментальних наукових дослідженнях.

Наприкінці XX століття відбулася зміна наукової парадигми. Класична наукова картина абсолютизувала поступовий та поступальний розвиток, який обумовлений причинно-наслідковими зв’язками, що не залежать від незначних випадкових впливів на систему. Реакція системи вважалася обов’язково пропорційною впливу. Процеси навколишнього світу розглядалися як передбачувані на необмежено великі проміжки часу, Вважалося, що сьогодення визначається лише минулим, а майбутнє – теперішнім та минулим.

Всі дослідження і висновки класичної науки базувались на стереотипах лінійного мислення:

- розуміння хаосу виключно як деструктивного явища;
- розглядання випадковості як другорядного фактору, який не має принципового значення у розвитку;
- розуміння нестійкості та нерівноважних станів виключно як негативних та руйнівних факторів;

- розуміння процесів оточуючого світу та суспільства, як процесів, зворотних за часом, які можуть бути передбачуваними на необмежені проміжки часу;
- уявлення про жорсткі причинно-наслідкові зв'язки між процесами та явищами;
- розуміння розвитку лише як лінійного та поступального;
- розуміння зовнішнього впливу як однозначного та лінійного, що передбачає отримання бажаного результату лише за умови зовнішнього впливу: вплив – бажаний результат.

Додатковим підґрунтям для застосування лінійних стереотипів мислення до дослідження систем різної природи був досконалий лінійний математичний апарат, який розглядався як частина математичної культури.

Сучасні міждисциплінарні дослідження складних систем будь-якої природи демонструють принципову відмінність законів, що визначають поведінку цих систем, від законів класичної науки. Об'єкти дослідження класичної наукової парадигми – стійкість, рівновага, порядок, замкнені системи, лінійні залежності.

Лінійні залежності та рівноважні стани, які є характерними для неокласичної економічної теорії, не є адекватними для моделювання та прогнозування поведінки сучасних складних соціально-економічних систем.

Сучасна парадигма моделювання та прогнозування поведінки соціально-економічних систем – це парадигма нелінійності.

Нелінійність є об'єктивним загальним законом розвитку складних систем будь-якої природи, що означає, перш за все, відсутність принципу суперпозиції:

- неможливість зведення функціонування всієї системи до функціонування її елементів, ціла система не є просто сумою частин системи, вона якісно інша через встановлення загального темпу розвитку частин систем;

– непропорційне співвідношення між причинами та наслідками, між величиною впливу та реакцією системи на цей вплив.

Сучасний світ виявився хаотичним, катастрофічним, непередбачуваним. За таких умов однозначна детермінованість є лише частковим випадком, а передбачуваність – принципово обмеженою. Реальні системи, як правило відкриті та нелінійні. Замкненість та лінійність – виключення з правил, спрощення дійсності.

Аналіз наукових публікацій [1–31] засвідчив, що особливістю багатьох економічних процесів є нелінійність, внаслідок чого вказані процеси та відповідні динамічні моделі можуть мати кілька станів рівноваги, як стійких, так і нестійких. За вказаних умов моделювання та дослідження поведінки складних соціально-економічних систем повинно базуватися на методах нелінійної динаміки. Лінійне моделювання не дозволяє адекватно дослідити поведінку соціально-економічної системи в умовах порушення стійкості стаціонарного стану, в умовах динамічних змін.

Питанням моделювання соціально-економічних систем методами нелінійної динаміки присвячено роботи С Демберела, В.-Б. Занга, Е. Петерса, Т. Пу, Д.С. Чернавського, В.В. Лебедєва, М.Ю. Малкова, В.П. Милованова, Л.Ф. Петрова, В.І. Маєвського, Д.І. Трубецького, Г.Г Малинецького, А.Б. Потапова, В.В. Вітлінського, В.Д. Дербенцева, Ю.В. Коляди, Т.С. Клєбанової, В.М. Соловйова, О.І. Черняка та багатьох інших науковців.

Як зазначено в [2], проблема пошуку стійких й безпечних траєкторій розвитку соціально-економічних систем має безпосереднє відношення до нелінійної динаміки. Соціально-економічні системи – це складні ієрархічні системи, ступінь нестійкості та межі передбачуваності яких – різні. В сучасних умовах горизонт прогнозування розвитку соціально-економічних систем значно скоротився, в той же час, сталий розвиток суспільства вимагає повільно мінливих стратегічних цілей, суспільних цінностей, норм, культури та ідеології. Все це вимагає використання відповідної теорії та методів, які б дозволяли аналізувати можливу динаміку систем, швидкість розвитку яких різна, та, базуючись на цих висновках, передбачати та направляти розвиток вказаних систем. Вказані задачі можуть бути розв’язані в рамках використання методів нелінійної динаміки, метою якої є вивчення законів розвитку та еволюції нелінійних систем найрізноманітнішої природи.

На думку науковців [3], нелінійна динаміка – це єдиний методологічний підхід, який дозволяє на основі об’єктивних законів досліджувати розвиток найрізноманітних динамічних систем різної складності – від механічних до соціально-економічних. Саме застосування методів нелінійної динаміки для аналізу поведінки складних соціально-економічних систем надає можливість зрозуміти механізми еволюції та механізми виникнення кризових явищ в таких системах. Ефекти нелінійної динаміки можуть бути використані для підвищення економічної ефективності, стійкості розвитку соціально-економічних систем, а також в якості інструментів антикризового управління.

На переконання дослідників [4], XX століття та початок XXI століття можна розглядати як століття панування лінійних законів, на яких будувалися прогнози та моделі функціонування ринків, підприємств і організацій, характерних для пануючої в економічній теорії неокласичної економічної думки. Головний постулат лінійної теорії економічних систем – прагнення економічних систем до рівноваги, тобто все в світі та в економічній сфері прагне до рівноваги: рівноважна ціна, рівновага попиту і пропозиції тощо. Згідно до лінійної теорії, реакція системи на влив є пропорційною величині цього впливу. Крім того, ринок «не має пам’яті», окрема подія не може його змінити, реакція економічної системи на зовнішній вплив завершується за умови завершення дії зовнішнього впливу. В рамках лінійної парадигми, динаміка розвитку ринків та підприємств, поведінка споживачів описувалась лінійними залежностями. На даний час все більше вчених підтримують думку щодо абстрактності лінійного підходу, його нездатності наблизитися до реальної економічної дійсності, ігнорування нової економічної реальності, яка не вписується в лінійну парадигму дослідження складних систем.

На думку В.В. Вітлінського [16], використання економетрики для розв’язання проблем економічного аналізу є успішним в умовах лінійної парадигми. Але сучасний економічний світ виявився дуже динамічним, катастрофічним, що демонструє нелінійність соціально-економічних систем, вимагає адекватного відображення радикалізації відносин між об’єктами і суб’єктами господарювання.

Як підкреслюється в [17], «… епоха лінійної парадигми науки загалом, економічної зокрема, завершилася. Прийшов час глибокого системного вивчення нелінійної динаміки процесів, бо в цьому проявляється сутність поведінки і природи речей навколишнього світу. Саме нелінійністю з урахуванням необоротності економічних процесів, сумісного функціонування швидких і повільних складових економіки, змінюваності її мети існування детермінується широкий спектр шляхів можливого економічного розвитку. Попередньо пізнати особливості траєкторій економічної еволюції можна на підґрунті математичного та комп’ютерного моделювання».

Аналіз літературних джерел показав, що сучасна економіка характеризується наявністю нестабільних, нерівноважних, нестаціонарних процесів, які відбуваються в умовах невизначеності. Соціально-економічні системи відрізняються значною мінливістю поведінки, різноманіттям зв’язків між елементами систем, що не дозволяє адекватно досліджувати сучасні економічні системи та процеси, базуючись лише на принципах лінійної парадигми. В сучасних умовах постійних змін та криз необхідне глибоке осмислення нелінійної динаміки економічних процесів.

1.2 Математичне моделювання нелінійних динамічних систем

Динамічна система – математичний об’єкт, що відповідає реальним фізичним, хімічним, біологічним, економічним системам, еволюція яких у часі визначається початковим станом системи. Закон еволюції стану динамічної системи в часі може бути заданий системою диференціальних рівнянь.

Існують різні класифікації процесів в динамічних системах, зокрема [7]:

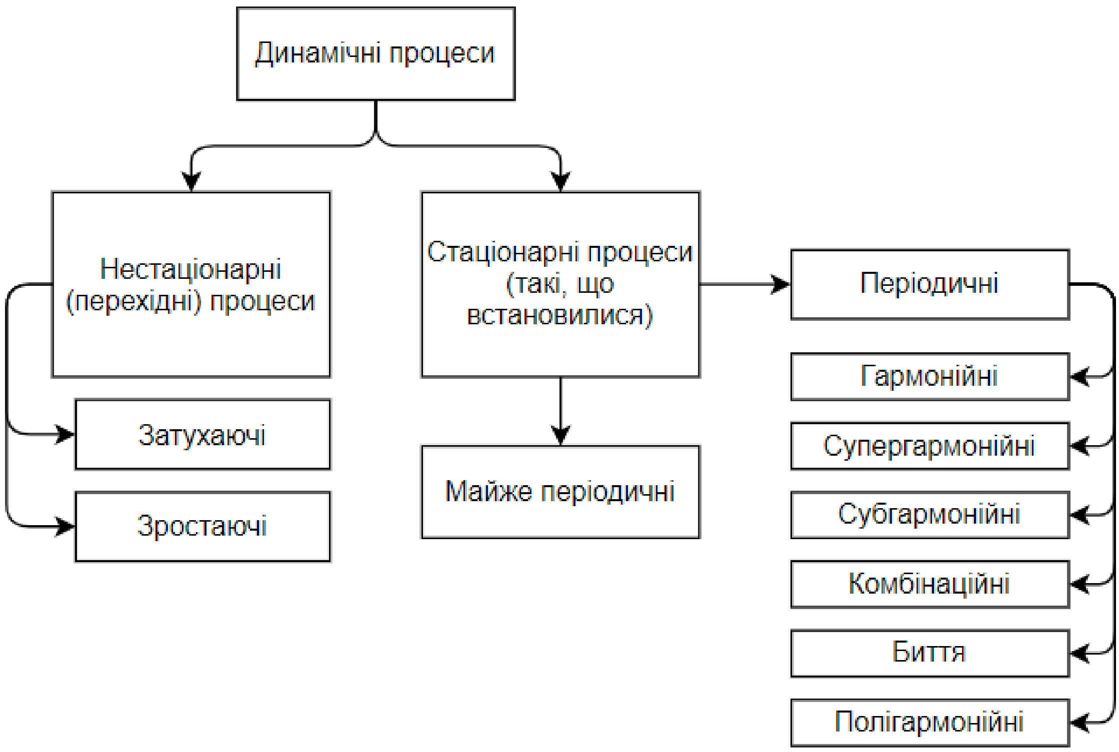

Рисунок 1.1 – Класифікація процесів в динамічних системах

За характером нелінійності розрізняють лінійні, квазілінійні, істотно нелінійні моделі. Динамічні моделі використовують для моделювання перехідних, циклічних процесів; автоколивань, вимушених коливань, параметричних коливань. За ознакою збереження енергії системи розрізняють консервативні, неконсервативні, автоколивальні та дисипативні динамічні системи; за стохастичними ознаками – детерміновані та недетерміновані системи; за взаємодією з оточуючим середовищем – автономні та неавтономні.

Математичне моделювання нелінійних динамічних систем є міждисциплінарним інструментом дослідження різноманітних процесів в природі і суспільстві, який базується на єдиному методологічному підході, що дозволяє на основі об'єктивних законів аналізувати рух різноманітних динамічних систем різного рівня складності – від механічних до соціальних.

Перші математичні моделі динамічних систем – це системи лінійних диференціальних рівнянь, які дозволили отримати перші принципові результати (ефекти резонансу при вимушених коливаннях, взаємодії різних мод коливань в багатовимірних динамічних системах тощо). Лінійні моделі досить швидко досягли межі свого застосування, оскільки продемонстрували випадки принципової невідповідності деяких результатів, отриманих за допомогою лінійних моделей, результатам експериментів навіть для нескладних механічних і електромеханічних систем. Наступний етап розвитку динамічного моделювання – врахування нелінійних залежностей в математичній моделі.

Історично спочатку нелінійні складові моделі сприймалися як нескінченно малі величини в порівнянні з лінійними складовими моделі. Такі системи отримали назву квазілінійних, для аналізу квазілінійних систем застосовувались асимптотичні методи. Використання асимптотичних методів продемонструвало наявність стійких та нестійких динамічних режимів при однакових параметрах динамічної системи та величині зовнішнього впливу, біфуркації рішень, існування стійких автоколивань з обмеженою амплітудою тощо.

Для простих механічних систем існують доступні для дослідження моделі на основі нелінійних диференціальних рівнянь, які повністю відображають динаміку процесу з урахуванням складних нелінійних ефектів.

При цьому нелінійні ефекти – втрата динамічної стійкості, біфуркація розв’язків системи, перехід до хаосу, дивний аттрактор, підтверджуються експериментально.

Для моделювання поведінки складних соціально-економічних систем поряд з математичними методами значне місце займає комп’ютерне моделювання. В якості математичних моделей найчастіше використовуються системи диференціальних рівнянь, які відображають нелінійні зв’язки між елементами систем. Нелінійні системи диференціальних рівнянь, в порівнянні з лінійними системами, демонструють різні режими функціонування складних соціально-економічних процесів, оскільки навіть незначна зміна параметрів нелінійної системи може призвести до різкої зміни динаміки системи.

Оскільки загальних методів отримання аналітичного розв’язку систем нелінійних диференціальних рівнянь не існує, а використання сучасних програмних продуктів дозволяє знайти лише частинний розв’язок для конкретних значень параметрів, важливу роль відіграють методи якісного аналізу систем диференціальних рівнянь.

Дослідження та прогнозування різних режимів поведінки нелінійної моделі соціально-економічної системи може базуватись на вивченні фазового портрету системи – сукупності всіх її можливих траєкторій, побудованих у просторі фазових змінних. Аналіз фазового портрету системи дозволяє передбачити всю сукупність режимів, які можуть виникнути при певних значеннях параметрів. Зокрема, серед траєкторій є ті, що визначають якісні властивості системи: точки рівноваги, які відповідають стаціонарним режимам системи, граничні цикли, що відповідають режимам періодичних коливань тощо.

Реальні соціально-економічні системи, технічні та біологічні системи демонструють спільні ефекти – циклічний розвиток, кризи, хаос, зародження нових станів, що дозволяє застосовувати моделі, розроблені для технічних та біологічних систем для дослідження та прогнозування складних соціально-економічних систем.

Принципова відмінність моделей механіки від економічних моделей полягає в тому, що функціональні залежності та величина коефіцієнтів для моделей механіки повністю визначається постановкою завдання, в той же час для побудови аналогічних моделей економіки необхідні додаткові дослідження для визначення параметрів моделей. Саме через невирішеність проблем визначення функціональних залежностей та коефіцієнтів рівнянь математичний апарат теорії нелінійних коливань, синергетики, теорії катастроф, достатньо складно використовувати для кількісного аналізу економічної динаміки [7].

Один з методів визначення функціональних залежностей та коефіцієнтів в моделях нелінійної економічної динаміки запропоновано в [7]. Основний апарат дослідження – чисельні методи, при застосуванні яких неважливим є конкретний вигляд функціональної залежності та величина коефіцієнтів. Форма залежності, величини коефіцієнтів визначаються за статистичними даними. Якщо така залежність наближається до відомої залежності, то задача значно спрощується. Якщо ж реальні залежності не можуть бути апроксимовані відомими функціями, то можуть бути використані сплайни, що дозволяє застосувати методи моделювання, які використовуються в теорії нелінійних коливань, теорії катастроф до задач нелінійної економічної динаміки.

1.3 Модель Лотки-Вольтерри в моделюванні динаміки економічних процесів

Сучасне конкурентне економічне середовище характеризується нерівноважністю та значною нелінійністю. Досліджувати конкурентну взаємодію можна на основі вже побудованих математичних моделей – систем диференціальних рівнянь. Найбільш відомою моделлю, яка описує конкуренцію як динамічний процес, є модель конкурентної взаємодії Лотки-Вольтерри «хижак-жертва». Модель Лотки-Вольтерри дає змогу дослідити динаміку економічних процесів та спрогнозувати основні параметри моделі, дозволяє дослідити зміну станів економічної системи за умови зміни параметрів системи диференціальних рівнянь.

Модель Лотки-Вольтерри – система двох звичайних диференціальних рівнянь, що описує динаміку чисельності популяції з одним типом хижаків і одним типом жертв. Вказані рівняння запропоновано незалежно вченими Альфредом Лоткою та Вітто Вольтеррою в 1925 та 1926 роках. Характерна особливість системи «хижак-жертва» – розв'язком рівнянь є автоколивання.

Модель Лотки-Вольтерри знайшла широке застосування для моделювання конкурентних процесів в економіці, зокрема цей клас моделей застосовується для аналізу ринку праці з урахуванням чисельності потенційних робітників як «хижаків» та кількості робочих місць – «жертв». Роль «хижака» та «жертви» можуть відігравати державний бюджет та ВВП; взаємовідносини країн; чисельність працівників, зайнятих у приватному секторі економіки та державному; кількість споживачів та виробників; попит і пропозиція тощо [32].

Різноманітні модифікації моделі Лотки-Вольтерри застосовуються для моделювання та прогнозування динамічних економічних процесів, зокрема, в роботах [33, 34] модель Лотки-Вольтерри використовується для опису дуопольно-дуопсонієвої конкуренції, в роботі [35] – для аналізу стійкості інвестиційних та інноваційних процесів, в роботі [36] – для дослідження конкурентної взаємодії на ринку послуг мобільного зв'язку, в роботі [37] модель «хижак-жертва» використовується для моделювання динаміки міського населення США. В роботі [38] модель Лотки-Вольтерри використовується для моделювання конкуренції на фондовій біржі, де існують два види конкуренції: між компаніями, що тогрують на біржі, та між інвесторами.

Дослідженню моделі Лотки-Вольтерри при моделюванні різних соціально-економічних процесів присвячено роботи [39–56].

Аналіз наукових джерел показав, що соціально-економічні системи є складно передбачуваними. Для моделювання та прогнозування таких систем актуальним є дослідження математичних моделей таких систем. В економіці знаходить застосування значна кількість математичних моделей, залежно від об’єкта моделювання та сфери дослідження. При цьому різні об’єкти моделювання мають однаковий математичний опис та відносяться до класу нелінійних, відкритих систем. Модель Лотки-Вольтерри або модель типу «хижак-жертва» широко використовується для моделювання динаміки економічних процесів.

В математичній формі модель Лотки-Вольтерри має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha - \beta)x$$
$$\frac{dy}{dt} = (-\gamma + \delta x)y$$

де x – кількість жертв;

y – кількість хижаків;

t – час;

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – коефіцієнти, що відображають взаємодію між двома видами.

2 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1 Метод Ейлера

Найчастіше немає можливості знайти аналітичний розв'язок систем диференціальних рівнянь, тому використовують так звані чисельні методи. Чисельні методи базуються на знаходженні значень, що є найбільш близькими до розв'язків систем диференціальних рівнянь.

Досить широко використовується метод Ейлера, який базується на відомій в математиці наближеній рівності

$$\Delta f \approx df,$$

де Δf – приріст функції;

df – диференціал функції.

Оскільки диференціал функції визначається як

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$$

то приріст функції можна подати у вигляді добутку похідної функції та приросту аргументу. Для диференціального рівняння будемо позначати приріст аргументу літерою h (hop). Отже, для знаходження наближеного значення функції використовується наступна рекурентна формула:

$$\mathrm{x}_{\mathrm{k}+1} = \mathrm{x}_{\mathrm{k}} + \mathrm{h}\dot{\mathrm{x}}_{\mathrm{k}}$$

Очевидно, що розрахунок значення функції буде тим точніший, чим менший крок приросту аргумент.

Крім того, формула є рекурентною, тобто, на вимірювання поточного значення накладаються похибки у вимірюванні всіх попередніх значень функції.

Для демонстрації використання методу Ейлера наведемо приклад, задавши систему, поведінка якої відома наперед. Систему розглядаємо в загальному вигляді, без конкретизації значень змінних, оскільки для моделювання соціально-економічних систем використовуються базові математичні моделі, які надають можливість моделювати та досліджувати різні соціально-економічні процеси.

Стосовно використання базових математичних моделей для моделювання соціально-економічних процесів, необхідно підкреслити, що базових математичних моделей існує не велика кількість, а використання навіть нескладних нелінійних моделей дозволяє передбачати різні режими функціонування відповідних соціально-економічних систем.

Розглянемо систему, параметрична форма має вигляд

$$(x, y) = (r\cos t\,, r\sin t) \qquad (2.1)$$

З плином часу (збільшенням параметра t) система рухатиметься циклічно по колу радіуса r. Перетворимо систему (2.1) на систему диференціальних рівнянь. Враховуючи значення похідних функцій,

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (-r\sin t\,, r\cos t)$$

отримаємо

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} \qquad (2.2)$$

Нехай початкове положення системи (2.2) є точка $(x_0, y_0) = (3{,}4)$. Тоді радіус обертання має дорівнювати 5. Розв'язуючи систему (2.2) методом Ейлера, отримаємо наступні формули

$$x_{k+1} = x_k - hy_k$$
$$y_{k+1} = y_k + hx_k$$

Дослідимо систему (2.2) на часовому проміжку $t = \overline{(0; 100)}$ з кроком $h = 0{,}1$. Таким чином, досліджуваний проміжок буде пройдено за 1000 кроків. Результати моделювання показано на рисунку 2.1.

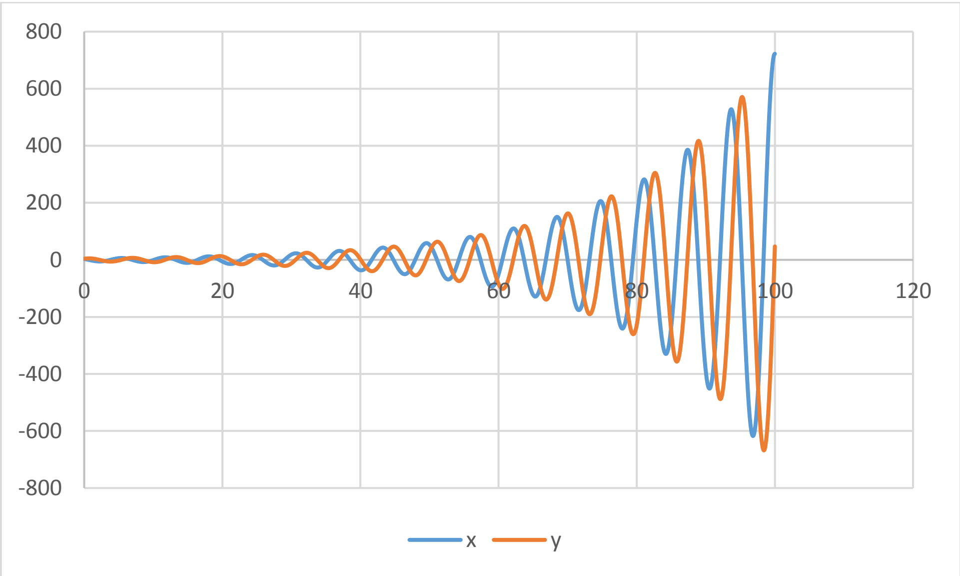

Рисунок 2.1 – Динаміка показників системи 2.2 (метод Ейлера, $h = 0.1$)

Фазовий портрет системи (2.2) на часовому проміжку $t = \overline{(0; 100)}$ з кроком $h = 0{,}1$ продемонстровано на рисунку 2.2. Аналіз рисунку 2.2 вказує на наявність постійно зростаючих коливань (нестійкий фокус), що не відповідає дійсності, оскільки відомо, що система має утворювати цикл.

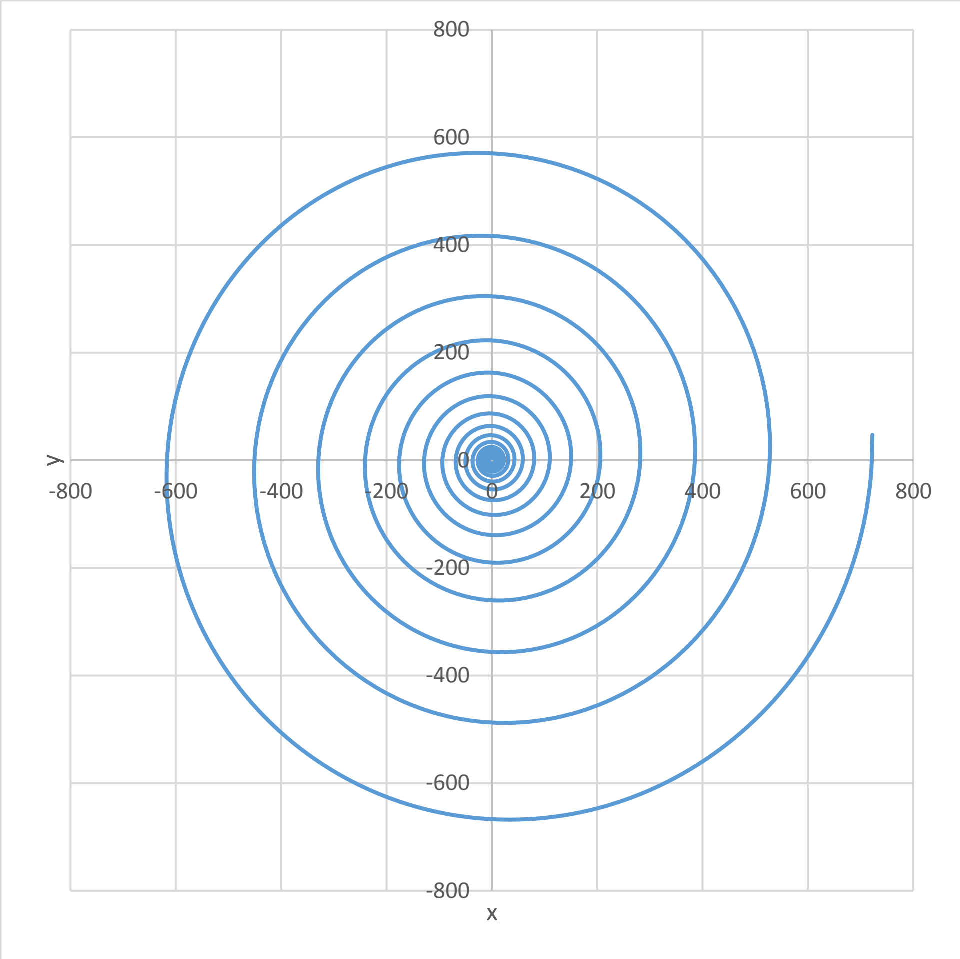

Рисунок 2.2 – Фазовий портрет системи (метод Ейлера, $h = 0.1$)

Якщо зменшити крок у 20 разів ($h = 0.005$), то досліджуваний проміжок буде пройдено за 20000 кроків. Це дозволило зробити результат більш точним. Результати дослідження динаміки моделі (2.2) крок якої дорівнює 0.005 показано на рисунку 2.3. Відповідний фазовий портрет системи показано на рисунку 2.4.

Аналіз результатів показує, що застосування методу Ейлера з кроком $h = 0.005$, не дозволяє отримати розв'язки системи (2.2), які відповідають теоретичним результатам. Все ще має місце збільшення амплітуди коливань з часом. Якщо надалі користуватися методом Ейлера, то виникає необхідність значно зменшити крок і підвищити навантаження на комп'ютер. Відтак, необхідно використовувати більш дієву альтернативу для чисельного розв'язування системи диференціальних рівнянь.

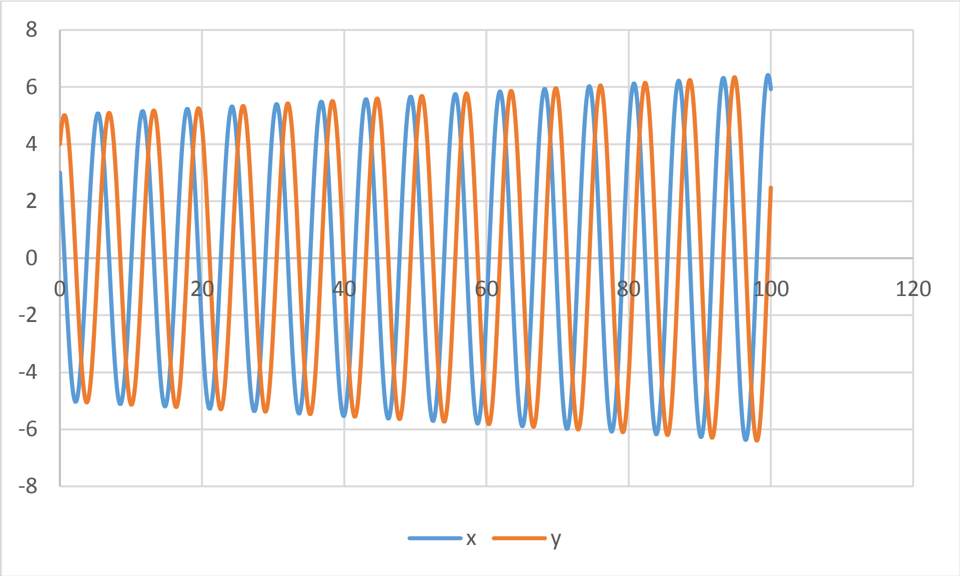

Рис. 2.3 – Динаміка показників системи (метод Ейлера, $h = 0.005$)

З цією метою було досліджено досить багато джерел і знайдено такі методи як модифікований метод Ейлера, метод Рунґе-Кутти 4-го порядку та деякі інші. Але у джерелах зазвичай вказується, як застосувати дані методи для розв'язування одного рівняння, а не для системи диференціальних рівнянь. Головна мета подальшого дослідження – застосувати модифікований метод Ейлера для чисельного інтегрування системи нелінійних диференціальних рівнянь

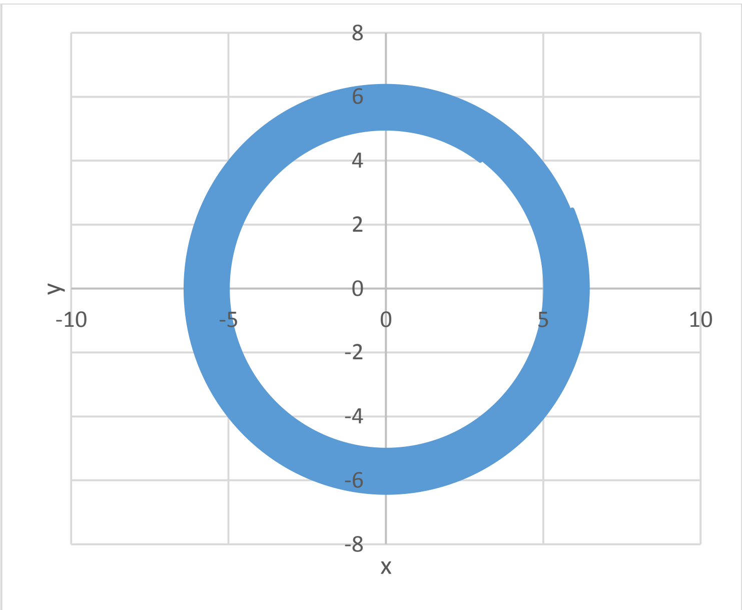

Рис. 2.4 – Фазовий портрет системи (метод Ейлера, $h = 0.005$)

2.1 Модифікований метод Ейлера

В роботі з метою чисельного дослідження систем диференціальних рівнянь використовується модифікований метод Ейлера. Він є не таким точним, як метод Рунґе-Кутти, але є простішим для використання та дозволяє отримати коректні результати.

Метод Ейлера, модифікований метод Ейлера та метод Рунґе-Кутти n-го порядку являють собою, по суті, один клас методів, фундаментальною ідеєю для яких є розкладання функції в ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i \tag{2.3}$$

Якщо звичайний метод Ейлера використовує лише похідну першого порядку, то модифікований метод Ейлера використовує похідні першого і другого порядків:

$$x_{k+1} = x_k + h\dot{x}_k + \frac{h^2}{2}\ddot{x}_k \tag{2.4}$$

Варто зазначити, що для застосування ряду Тейлора (2.3) для розв'язування систем диференціальних рівнянь є справедливим наступне твердження:

$$x - x_0 = t_{k+1} - t_k = h \tag{2.5}$$

Для використання модифікації методу Ейлера в системах диференціальних рівнянь необхідно знати похідну другого порядку від часу. При цьому, кожне рівняння системи не має прямої залежності від часу, лише через інші функції.

Нехай дано систему в загальному вигляді:

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y)\end{cases} \tag{2.5}$$

Для знаходження похідних другого порядку використаємо формулу для похідної складеної функції:

$$\ddot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot g(x, y) \tag{2.6}$$

$$\ddot{y} = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot f(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot g(x, y) \tag{2.7}$$

Формули для розрахунку других похідних можна подати і в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix}\ddot{x} \\ \ddot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt}\end{pmatrix} = J \begin{pmatrix}\frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt}\end{pmatrix}$$

де матриця J – якобіан.

Записуючи формулу 2.4 у матричному вигляді, отримаємо:

$$\begin{pmatrix}x_{k+1} \\ y_{k+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_k \\ y_k\end{pmatrix} + h \begin{pmatrix}\dot{x}_k \\ \dot{y}_k\end{pmatrix} + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix}\ddot{x}_k \\ \ddot{y}_k\end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Розв'яжемо систему 2.2 за допомогою модифікованого методу Ейлера на тому ж проміжку, з кроком $h = 0.1$. Відповідні результати показано на рисунку 2.5 і рисунку 2.6.

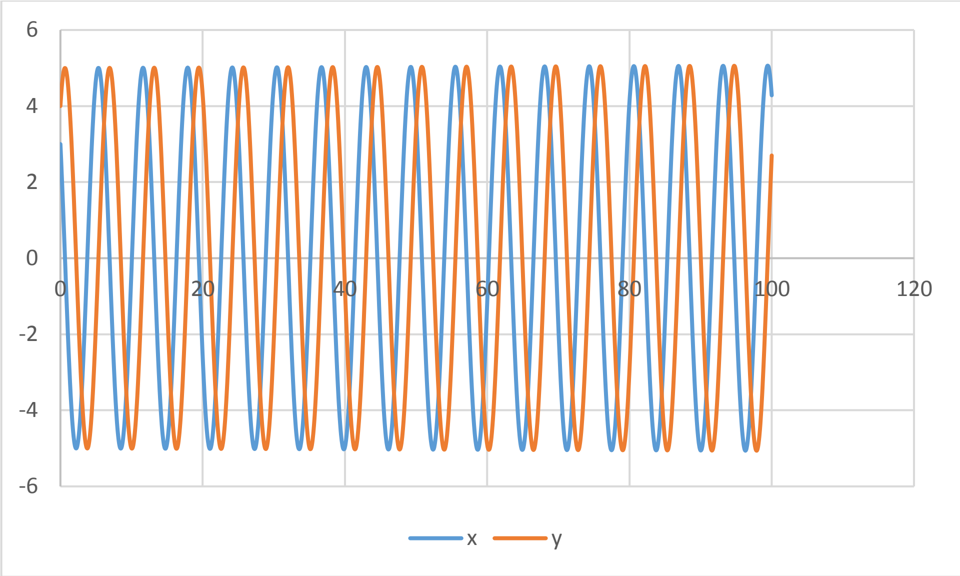

Рис. 2.5 – Динаміка показників системи (метод Ейлера, $h = 0.1$)

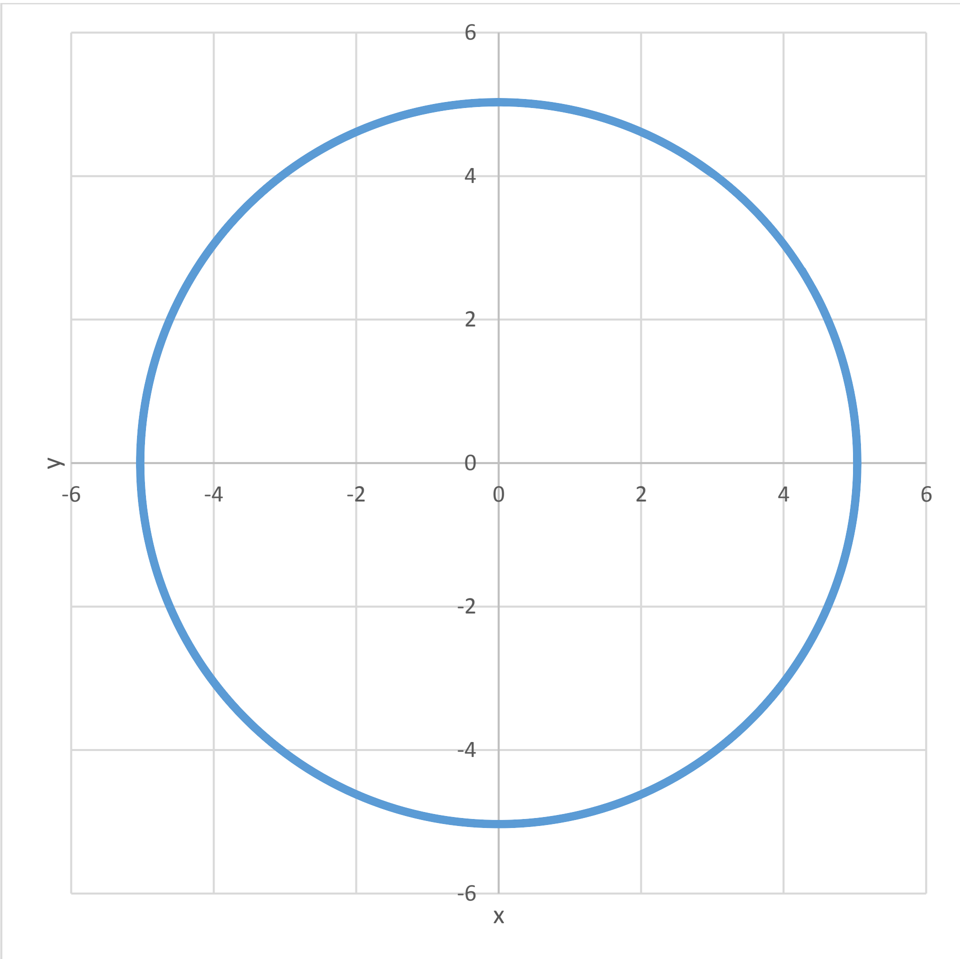

Рис. 2.6 – Фазовий портрет системи (метод Ейлера, $h = 0.1$)

Чисельні методи завжди дають наближений результат, незалежно від використовуваного порядку похідної. Попри це, модифікований метод Ейлера значно покращив моделювання системи. Незважаючи на те, що амплітуда коливань з часом дещо зменшується, ці відхилення є в порядку допустимого, система є майже циклічною.

2.3 Дослідження моделей типу «хижак-жертва»

Найпростіша модель Лотки-Вольтерри має наступний вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy \end{cases} \tag{2.9}$$

де x – кількість жертв;

y – кількість хижаків;

t – час;

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – коефіцієнти, що відображають взаємодію між двома видами.

Всі коефіцієнти системи більші за нуль.

Знайдемо точки рівноваги, розв’язавши систему:

$$\begin{cases} x(\alpha - \beta y) = 0 \\ y(\delta x - \gamma) = 0 \end{cases}$$

Маємо дві точки рівноваги: $(0; 0)$ і $\left(\frac{\gamma}{\delta}; \frac{\alpha}{\beta}\right)$.

Дослідимо ці точки на стійкість. Для цього скористаємося теоремою Ляпунова. Знайдемо якобіан системи:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & -\gamma + \delta x \end{pmatrix}$$

Тоді для точки $(0;0)$ якобіан матиме наступний вигляд:

$$J_{(0;0)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix}$$

Знайдемо власні значення матриці:

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 0 \\ \delta & -\gamma-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-\alpha)(\lambda+\gamma)-\delta = \lambda^2-(\alpha-\gamma)\lambda-(\alpha\gamma+\delta)=0$$

Розв'язавши рівняння отримаємо:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\alpha-\gamma) \pm \sqrt{(\alpha-\gamma)^2+4(\alpha\gamma+\delta)}}{2}$$

Власні числа матриці є дійсними числами різних знаків, отже точка рівноваги $(0;0)$ є нелінійним сідлом.

Цікавішою є точка $\left(\frac{\gamma}{\delta};\frac{\alpha}{\beta}\right)$. Якобіан для неї матиме наступний вигляд:

$$J_{\left(\frac{\gamma}{\delta};\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta\alpha}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

Знайдемо власні значення матриці:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta\alpha}{\beta} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\alpha\gamma=0$$

Розв'язавши рівняння отримаємо:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha\gamma}$$

Власні числа матриці є суто уявними. Це так званий критичний випадок, коли неможливо дослідити точку на стійкість, лінеаризувавши в ній систему. Оскільки перший інтеграл цієї системи можна знайти, то можливо однозначно визначити фазові траєкторії, розв'язавши наступне рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(\alpha - \beta y)}{y(\delta x - \gamma)}$$

Розділивши змінні та проінтегрувавши ліву і праву частини, отримаємо рівняння для фазового портрету системи

$$|x|^{\gamma}|y|^{\alpha} = Ce^{\delta x + \beta y},$$

де

C – певна константа, яка може бути визначена із початкового стану системи $(x_0; y_0)$

$$C = \frac{|x_0|^{\gamma}|y_0|^{\alpha}}{e^{\delta x_0 + \beta y_0}}.$$

Досліджуючи графік фазової траєкторії у першій координатній чверті, отримаємо наступну тотожність

$$x^{\gamma}e^{-\delta x} \cdot y^{\alpha}e^{-\beta y} = C \text{ або } f(x) \cdot g(y) = C.$$

При цьому, добуток функцій $f(x)$ і $g(y)$ має єдиний максимум у точці $\left(\frac{\gamma}{\delta};\frac{\alpha}{\beta}\right)$. Обидві функції диференційовні на проміжку $(0;+\infty]$, отже, в певному околі від точки максимуму лінії фазових траєкторій є замкнутими.

Фазовий портрет системи показано на рисунку 2.7.

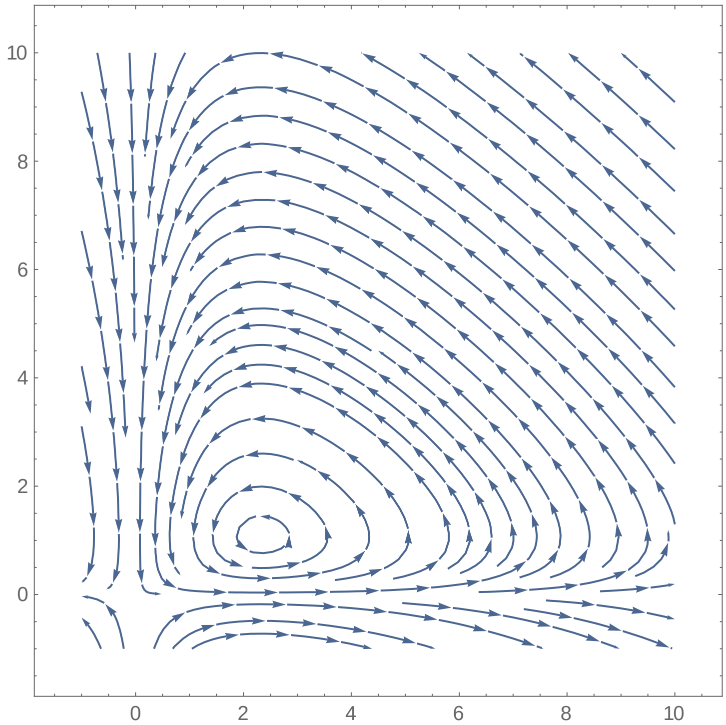

Рисунок 2.7 – Фазовий портрет системи (модель Лотки-Вольтерри)

Отже, найпростіша модель Лотки-Вольтерри є моделлю коливань зі сталою амплітудою в замкнутій системі з незмінною «енергією».

Моделюючи динаміку системи, що описується моделлю Лотки-Вольтерри (2.9), отримуємо наступні результати (рисунок 2.8, рисунок 2.9):

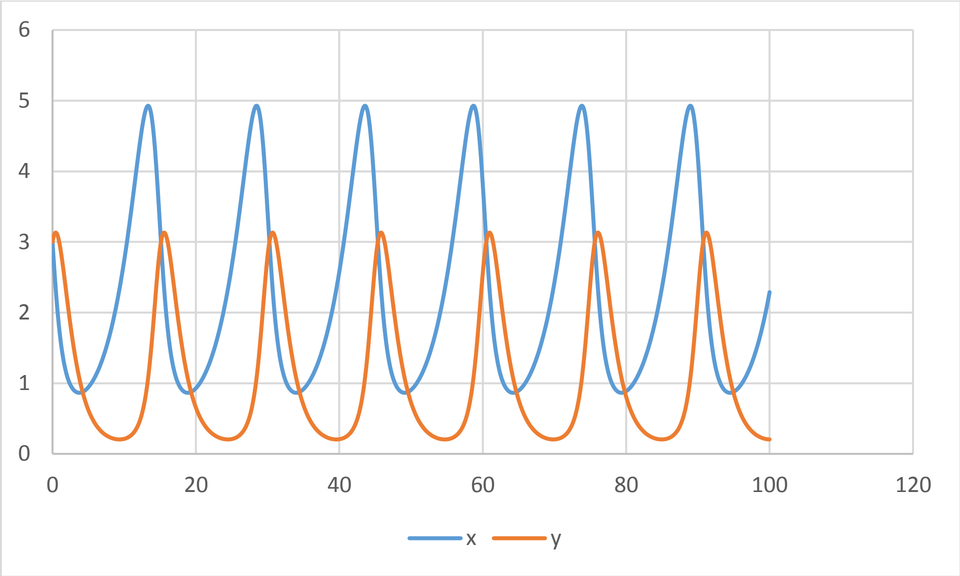

Рисунок 2.8 – Динаміка показників в моделі Лотки-Вольтерри

$(\alpha = 0.3, \beta = 0.28, \gamma = 0.7, \delta = 0.3, x_0 = 3, y_0 = 3, h = 0.1)$

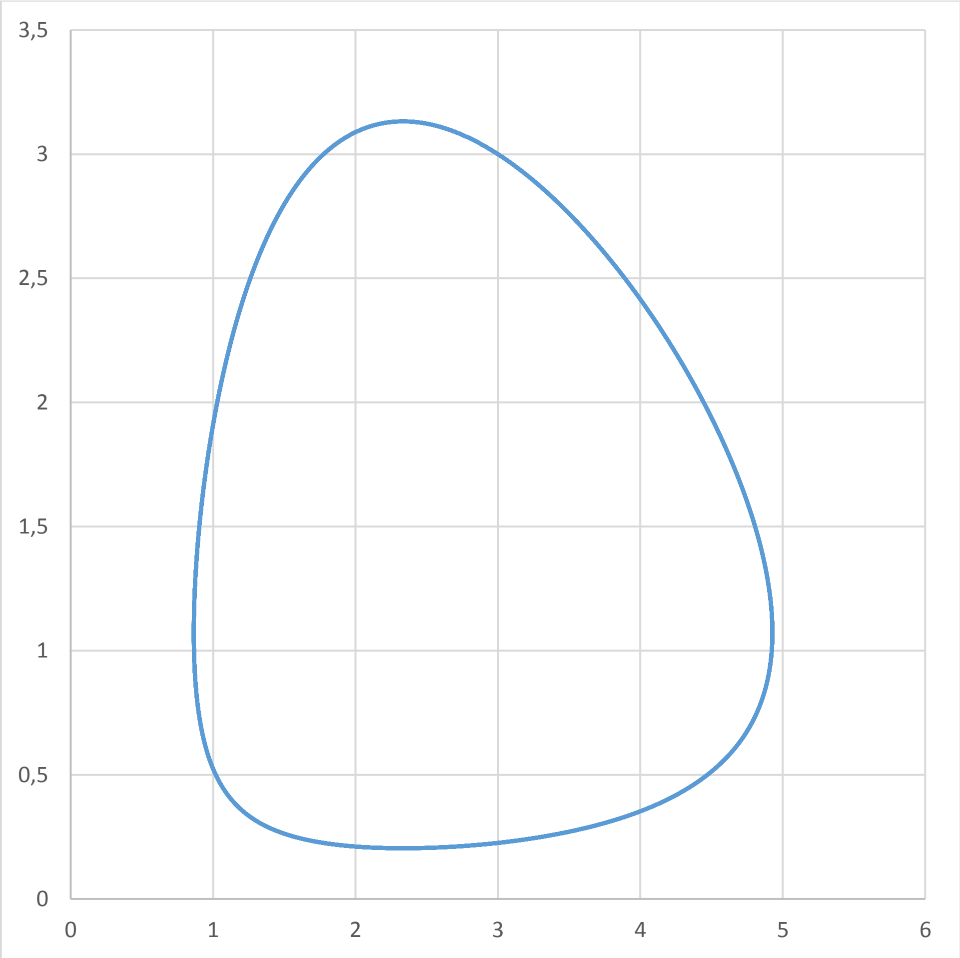

Рисунок 2.9 – Фазова траєкторія системи в моделі Лотки-Вольтерри

$(\alpha = 0.3, \beta = 0.28, \gamma = 0.7, \delta = 0.3, x_0 = 3, y_0 = 3, h = 0.1)$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів системи диференціальних рівнянь можна застосувати наступний метод:

1. Розраховуються фактичні різниці між значеннями ряду.

2. Розрахункові різниці визначаються за формулою:

$$\Delta x_i = h\frac{dx}{dt} + \frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\cdot\frac{dx_j}{dt}$$

Формула розраховується для попереднього значення ряду і має у своєму складі всі шукані коефіцієнти.

3. Мінімізується сума квадратів різниць фактичних і розрахованих значень засобами Excel «Пошук рішення».

3 МОДЕЛЮВАННЯ КОНКУРЕНТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ЕКОНОМІЧНИХ СУБ'ЄКТІВ

Модель типу «хижак-жертва» може бути використана для моделювання конкурентних процесів. Зокрема, вказана модель може бути використана для моделювання витрат на виконання наукових досліджень і розробок за видами робіт, при цьому три види робіт конкурують між собою за фінансування.

Нехай швидкість зміни обсягу витрат на певний вид діяльності залежить від результатів, що показав цей вид діяльності , тобто

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i x_i(t) \tag{3.1}$$

де x_i – обсяг витрат на i-й вид діяльності;

a_i – потенційно можливий приріст витрат на даний вид діяльності.

Модель (3.1) є прийнятною для «ідеального» світу, в якому існував би лише один вид діяльності і не було обмежень щодо максимальних витрат на нього.

Розглядається гіпотеза: для кожного з трьох видів наукової діяльності існує максимально можливий відсоток витрат, витрати для кожного з видів обмежуються також конкурентною дією інших видів. Формально вплив конкуренції на i-й вид діяльності (внаслідок вичерпування ресурсу) можна описати наступним чином

$$\frac{r_i - \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j}{r_i}, \tag{3.2}$$

де r_i – максимально можливий обсяг ресурсу для -го суб'єкта;

c_{ij} – коефіцієнти конкуренції за ресурс.

Вага конкурента тим більша, чим сильніше він поглинає ресурс.

Формула (3.2) описує частку від максимально можливого ресурсу, яку отримає i-те підприємство. Враховуючи вичерпування ресурсу, модель (3.2) можна подати у вигляді

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i x_i \left(\frac{r_i - \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j}{r_i}\right) \qquad (3.3)$$

Замінивши відношення констант коефіцієнтами, отримаємо рівняння

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i x_i - x_i \sum_{i=1}^{n} r_{ij} x_j \qquad (3.4)$$

Закономірно, що серед факторів, що зменшують частку ресурсу для певного виду діяльності, є споживання ресурсу цим видом. Узагальнюючи систему взаємодії конкуруючих видів діяльності як економічних суб'єктів, систему 3.4 запишемо у матричному вигляді

$$X' = X \times (A - RX) \qquad (3.5)$$

де X – сукупність функцій, що визначають динаміку насичення економічних суб'єктів ресурсом;

A – вектор-стовпець із потенційно можливих приростів витрат ресурсу на суб'єкт;

R – матриця коефіцієнтів, що відповідають за споживання суб'єктами ресурсу.

Дослідження системи (3.5) показало, що вона має дві точки рівноваги: перша – нульовий стовпець θ, друга – розв'язок системи лінійних рівнянь

$$A - RX = \theta \qquad (3.6)$$

Розв’язок системи (3.6) , у випадку невиродженої матриці R, має вигляд:

$$X = R^{-1}A \qquad (3.7)$$

Матриця частинних похідних для системи (3.5) матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} k_1 - r_{11}x_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & k_n - r_{nn}x_n \end{pmatrix} - R \times X$$

Побудуємо модель, взявши за основу дані про витрати на виконання наукових досліджень і розробок за видами робіт за 2010-2019 роки, які подано в таблиці Б.1.

В якості змінних системи (3.5) виступають фундаментальні і прикладні наукові дослідження, науково-технічні розробки. За одиниці виміру взято їхню частку із загального фінансування видів наукової діяльності.

Знайдені коефіцієнти моделі подано у таблиці 3.1 та таблиці 3.2.

Таблиця 3.1 – Коефіцієнти моделі (матриця R)

R	x_1	x_2	x_3
Рівняння 1	0,039951	0	0,01963
Рівняння 2	0,033894	0,056707	0
Рівняння 3	0,093924	0,07604	0,061766

Таблиця 3.2 – Коефіцієнти моделі (матриця A)

	x_1	x_2	x_3
A	1,997019	1,984244	7,202029

Можна зробити висновок про міру взаємного впливу фінансування видів наукової діяльності. Зокрема, фінансування прикладних досліджень не зменшує фінансування фундаментальних, а фінансування наукових розробок не зменшує фінансування прикладних наукових досліджень.

Динаміка показників відповідно до моделі (3.5) представлена на рисунку 3.1.

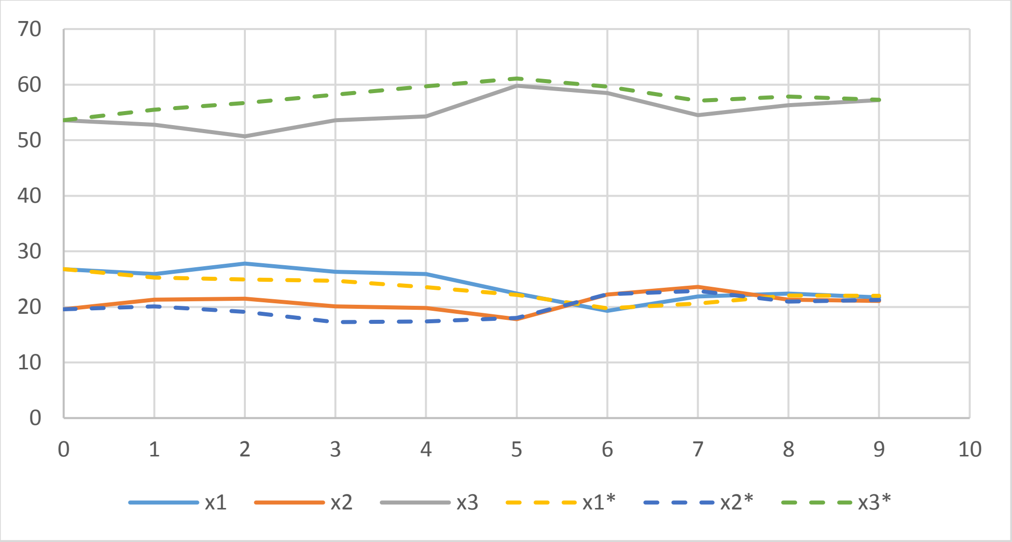

Рисунок 3.1 – Фактична і розрахована динаміки показників

Змінні x_1, x_2, x_3 – фундаментальні, прикладні наукові дослідження, науково-технічні розробки, відповідно. Зірочками позначено розрахункові дані.

Коефіцієнти детермінації подані в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3 – Коефіцієнти детермінації

R_1^2	R_2^2	R_3^2
0,856713	0,634959	0,427552

Розв'язання задачі знаходження невідомих коефіцієнтів системи нелінійних диференціальних рівнянь може бути покращене використанням більш специфічних чисельних методів. Незважаючи на це, поведінка системи з обраним меншим кроком показує схожість із реальними даними в плані наближення показників до стаціонарного стану, який зображено на рисунку 3.2

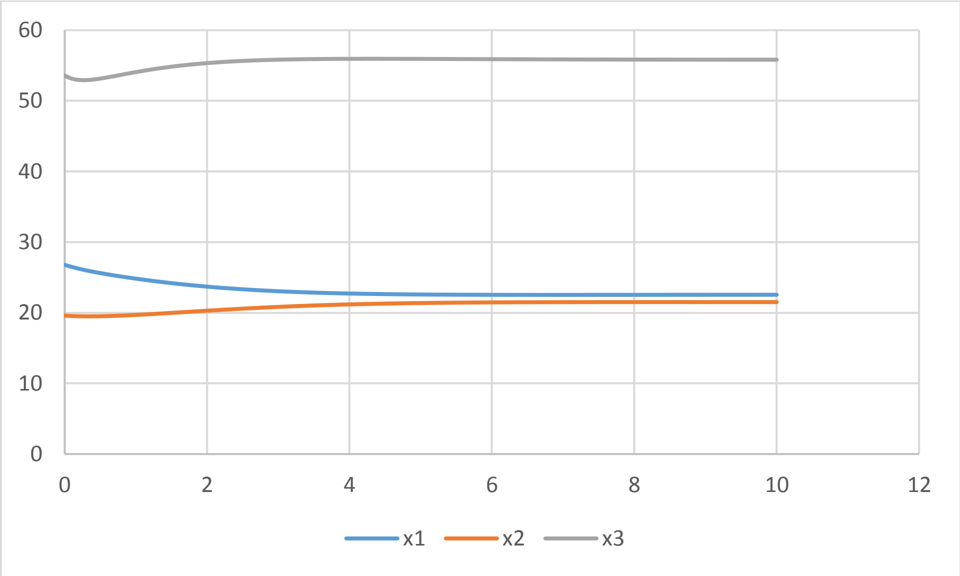

Рисунок 3.2 – Динаміка системи (3.5) з кроком 0,1

При цьому розраховані значення точки рівноваги

$$\begin{pmatrix} 22.559 \\ 21.508 \\ 55.819 \end{pmatrix}$$

Ці значення співпадають із фактичними значеннями фінансування видів наукової діяльності станом 2019 рік. Особливо це помітно для фундаментальних і прикладних наукових досліджень.

Зауважимо, що модель (3.4) ((3.5)) може використовуватись для моделювання конкурентної взаємодії будь-якої кількості економічних суб’єктів.

ВИСНОВКИ

Сучасні наддинамічні та нелінійні умови функціонування економіки потребують зміни парадигми моделювання та прогнозування соціально-економічних систем. Реальні соціально-економічні, технічні та біологічні системи демонструють спільні ефекти – циклічний розвиток, кризи, хаос, зародження нових станів, що дозволяє застосовувати методи нелінійної динаміки, які були розроблені в природничих науках, для вивчення складних соціально-економічних систем.

В якості математичних моделей соціально-економічних систем найчастіше використовуються системи диференціальних рівнянь, які відображають нелінійні зв'язки між елементами систем. Дослідження відповідних систем диференціальних рівнянь дозволяє аналізувати безліч потенційних шляхів розвитку соціально-економічної системи та обирати найбільш раціональний шлях.

У ході виконання кваліфікаційної роботи було проведено аналіз моделей типу «хижак–жертва» для моделювання конкурентної взаємодії економічних суб'єктів, розроблено алгоритм використання удосконаленого методу Ейлера для чисельного інтегрування систем нелінійних диференціальних рівнянь, на базі використання якого проведено аналіз та побудовано фазові портрети моделей типу ««хижак–жертва». На базі моделі Лотки-Вольтери побудована модель, яка описує конкурентну взаємодію між економічними суб'єктами за фінансування наукових досліджень.

Дослідження систем нелінійних диференціальних рівнянь та побудова їх фазових портретів проведено з використанням програмного забезпечення MS Excel та Wolfram Mathematica.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Малков С.Ю. Нелинейная динамика нелинейного мира. Сайт С.П. Курдюмова: веб-сайт. URL: http://spkurdyumov.ru/economy/nelinejnaya-dinamika-nelinejnogo-mira/

2. Козлов Д.А. Методы нелинейной динамики в моделировании макроэкономических процессов. URL: https://ideas.repec.org/a/scn/031151/14527934.html

3. Петров Л.Ф. Методы нелинейной динамики как инструменты управления экономической эффективностью. Эффективное антикризисное управление. 2011. №2. С. 58–67.

4. Епифанова Н.Ш. Особенности и тенденции развития нелинейной экономической парадигмы. Экономика и менеджмент в условиях нелинейной динамики: монография /под ред. д.э.н., проф. А.В. Бабкина. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2017. С. 9 – 49.

5. Данилов Ю.А. Нелинейность. Сайт С.П. Курдюмова: веб-сайт. URL: http://spkurdyumov.ru/introduction/znakomstvo/

6. Петров Л.Ф. Методы динамического анализа экономики: учеб. пособие. Москва : ИНФРА-М, 2010. – 239 с.

7. Петров Л.Ф. Проблемы построения моделей экономической динамики. Вестник РЭА. 2008. №4. С. 88–92.

8. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Основания синергетики: Синергетическое мировидение. Москва : Книжныйдом «ЛИБРОКОМ», 2010. 256 с.

9. Синергетичні та еконофізичні методи дослідження динамічних та структурних характеристик економічних систем: монографія / Дербенцев В.Д., Сердюк О.А., Соловйов В.М., Шарапов О.Д. Черкаси : Брама-Україна, 2010. 287 с.

10. Занг В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории / пер. с англ. Н.В. Островской и др. Москва : Мир, 1999. 335 с.

11. Нелинейная динамика глобальных процессов в природе и обществе / под ред. И.В. Ильина, Д.И. Трубецкова, А.В. Иванова. Москва : Издательство Московского университета, 2014. 456 с.

12. Лебедев В.В., Лебедев К.В. Математическое моделирование нестационарных экономических процессов. Москва, 2011. 336 с.

13. Лисичкина Н.В., Голоктионова Ю.Г. Синергетика как способ решения проблемы прогнозирования динамики развития сложных социально-экономических систем. Фундаментальные исследования. 2015. № 7-2. С. 413–417.

14. Якімцов В.В. Теоретико-методологічні засади синергетичної ефективності функціонування складних соціо-еколого-економічних систем: дис. … докт. екон. наук: 08.00.06. Львів, 2019. 435с.

15. Семенов А.С. Модель динамического хаоса как нелинейная экономическая система. Причорноморські економічні студії. 2018. Вип. 30-2. С. 166–169.

16. Вітлінський В.В., Коляда Ю.В., Семашко К.А. Проблеми моделювання динаміки економічних систем. URL: https://ir.kneu.edu.ua/bitstream/handle/2010/26767/Vitlinskyi_2013.pdf?sequence=1

17. Вітлінський В.В., Коляда Ю.В., Кравченко Т.В., Семашко К.А., Трохановський В.І. Моделювання нелінійної економічної динаміки у світлі підготовки економіста-науковця. URL: https://ir.kneu.edu.ua/bitstream/handle/2010/8298/481-482.pdf?sequence=1

18. Буяк Л.М. Современная парадигма моделирования и прогнозирования экономической динамики. Системные технологии. 2016. № 20. С. 84–95.

19. Андрейшина Н.Б. Аналіз сучасних підходів до моделювання економічної динаміки. Інвестиції: практика та досвід. 2015. №7. С. 96–99.

20. Хром’як Й.Я., Слюсарчук Ю.М., Цимбал Л.Л., Цимбал В.М. Нелінійна парадигма економічної динаміки. URL: http://ena.lp.edu.ua/bitstream/ntb/12386/1/027_Nel%D1%96n%D1%96jna_167

_173_704.pdf
21. Хром'як Й.Я., Слюсарчук Ю.М., Цимбал Л.Л., Цимбал В.М. Концепція самоорганізації сучасних економічних систем. URL: http://ena.lp.edu.ua/bitstream/ntb/29197/1/102_269_272.pdf
22. Chuprov S. Innovative prospects, nonlinear dynamics and the regional industry development. Journal of International Studies. 2016. Vol. 9, No 2. P. 65–78.
23. Caravaggio A., Sodini M. Nonlinear Dynamics in Coevolution of Economic and Environmental Systems. URL: https://doi.org/10.3389/fams.2018.00026
24. Ledenyov D., Ledenyov V. On the theory of firm in nonlinear dynamic financial and economic systems. URL: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1302/1302.6721.pdf
25. Barnett W., Serletis A., Serletis D. Nonlinear and complex dynamics in economics. Macroeconomic Dynamics. 2015. Vol. 19, Issue 8. pp. 1749–1779.
26. Gardini L., Gori L., Guerrini L., Sodini M. Introduction to the focus issue "nonlinear economic dynamics". Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2018 https://doi.org/10.1063/1.5039304
27. Dieci R. He X.Z., Hommes C. Nonlinear economic dynamics and financial modelling: essays in honour of Carl Chiarella. Berlin, 2014. 389 p.
28. Gori L., Guerrini L. Sodini M. Time delays, population, and economic development. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2018. https://doi.org/10.1063/1.5024397
29. Черняк О.І., Захарченко П.В., Клебанова Т.С. Теорія хаосу в економіці : підручник. Бердянськ : Видавець Ткачук О. В., 2014. 244 с.
30. Гордєєв Г. Г. Дослідження нелінійних моделей економічної динаміки. Зовнішня торгівля. Економіка, фінанси, право. 2012. № 2. С. 133–139.
31. Федулова С.О. Фундаментальна нелінійність розвитку в регіоналних дослідженнях. Проблеми системного підходу в економіці. 2017. Вип. 1(57). С. 125–131.
32. Ставицький О.В., Дятлова Н.О. Методологія застосування

математичної моделі Лотки-Вольтерри в економіці. Приазовський економічний вісник. 2017. Вип. 2 (02). С. 168–171.
33. Козик В.В., Сидоров Ю. І., Скворцов І. Б., Тарасовська О. Б. Застосування моделі Лоткі-Вольтерра для опису дуопольно-дуопсонієвої конкуренції. Актуальні проблеми економіки. 2010. №2 (104). С. 252–260.
34. Коляда Ю. В. Моделювання дуопольно-дуопсонієвої конкуренції з долученням режиму насичення. Актуальні проблеми економіки. 2011. №5 (119). С. 293–299.
35. Люльов О.В., Пімоненко Т.В. Модель Лотки-Вольтерри як інструмент аналізу стійкості інвестиційних та інноваційних процесів. Маркетинг і менеджмент інновацій. 2017. №1. С. 159–169.
36. Алілуйко А.М. Дослідження конкурентної взаємодії на ринку послуг мобільного зв'язку. Інноваційна економіка. 2013. № 2. С. 221–226.
37. Ahmadian A. System dynamics and technological innovation system. URL: https://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/74728.pdf
38. Comes C.-A. Banking system: Three level Lotka-Volterra model. Procedia Economics and Finance. 2012. № 3. P. 251–255.
39. Титов В.А., Вейнберг Р.Р. Анализ существующих динамических моделей на базе системы уравнений Лотки-Вольтерры «хищник-жертва». Фундаментальные исследования. 2016. №8. С. 409–413.
40. Алілуйко А.М. Дослідження динаміки взаємодії підприємств з використанням конкурентної моделі Лоткі-Вольтерра. Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2012. № 1/3 (61). С. 25–29.
41. Соколов Ю.Н., Соколов А.Ю., Илюшко В.М. компьютерные технологии в задачах природы и общества. Уравнения Лотки-Вольтерра. Компьютерное моделирование взаимодействия видов в природе. Комп'ютерні системи та інформаційні технології. 2010. №2 (43). С. 55–64.
42. Альджаафрех Мохаммад Ракан Абед Алнаби. Численное исследование устойчивости в системах Лотки-Вольтерра с возмущенной правой частью. Технологический аудит и резервы производства. 2014. №3/1(17). С. 20–22.

43. Воробьева Е.Ю., Пепеляева Т.Ф. Моделирование конкурентной борьбы компаний. Московский экономический журнал. 2020. №6. DOI 10.24411/2413-046x-2020-10470
44. Voroshilova A., Wafubwa J. Discrete Competitive Lotka-Volterra Model with Controllable Phase Volume. Systems 2020. Vol. 8(2). doi:10.3390/systems8020017
45. Ganguly S., Neogi U., Chakrabarti A., Chakraborti A. Reaction-Diffusion Equations with Applications to Economic System. Econophysics and Sociophysics: Recent Progress and Future Directions. Springer: Cham, Switzerland 2017. P. 131–144.
46. Guidolin M., Guseo R., Mortarino C. Regular and promotional sales in new product life cycles: Competition and forecasting. Comput. Ind. Eng. 2019. Vol. 130. P. 250–257.
47. Khan N.T., Jung G., Kim J., Kim Y.B. Evolving competition between low-cost carriers and full-service carriers: The case of South Korea. J. Transp. Geogr. 2019. Vol. 74. P. 1–9.
48. Wang Z., Zhu H. Testing the trade relationships between China, Singapore, Malaysia and Thailand using Grey Lotka-Volterra competition model. Kybernetes. 2016 Vol. 45. P. 931–945.
49. Ditzen, J. Cross-country convergence in a general Lotka-Volterra model. Spat. Econ. Anal. 2018. Vol. 13. P. 191–211.
50. Chakrabarti A. Stochastic Lotka-Volterra equations: a model of lagged diffusion of technology in an interconnected world. URL: https://web.iima.ac.in/assets/snippets/workingpaperpdf/4339215032015-08-05.pdf
51. Mohammad M. Amirian, Towers I.N., Jovanoski Z., Irwin A. Memory and mutualism in species sustainability: A time-fractional Lotka-Volterra model with harvesting. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405844020316595
52. Kingsland S. Alfred J. Lotka and the origins of theoretical population

ecology. PNAS. 2015. Vol. 112. № 31. P. 9493–9495.
53. Scalia1 M., Angelini A., Farioli F., Mattioli1 GF, Ragnisco O., Saviano M. An Ecology and Economy Coupling Model. A global stationary state model for a sustainable economy in the Hamiltonian formalism. Ecological Economics. 2020. Vol.172:1-9. URL: http://www.cirps.it/CIRPS/wp-content/uploads/2020/10/an-ecology-and-economy-coupling-model.pdf
54. Knuuttila T., Loettgers A. Modelling as Indirect Representation? The Lotka-Volterra Model Revisited. URL: https://www.researchgate.net/publication/299400754_Modelling_as_Indirect_Representation_The_Lotka-Volterra_Model_Revisited
55. Mafalda Oliveira Martins Bastos de Almeida. The lotka-Volterra Equations in Finance and Economics. Master's Final Work Dissertation: master mathematical finance. Lisbon School of Economics & Management. 2017. URL: https://www.repository.utl.pt/bitstream/10400.5/14240/1/DM-MOMBA-2017.pdf
56. Räz Tim. The Volterra Principle Generalized. Philosophy of Science. 2017. Vol. 84. № 1. P. 737– 760.
57. Boccara Nino. Modeling Complex Systems. Springer Science+Business Media LLC, 2010. 489 p.
58. Hirsch M., Smale S., Devaney R. Differential equations, Dynamical systems, and an Introduction to chaos. URL: https://thalis.math.upatras.gr/~bountis/files/def-eq.pdf
59. Gardini L., Gori L., Guerrini L. Sodini M. Introduction to the focus issue "nonlinear economic dynamics". Chaos. 2018. Vol. 28. https://doi.org/10.1063/1.5039304
60. Barnett W., Serletis A., Serletis D. Nonlinear and Complex Dynamics in Economics. Macroeconomic dynamics. 2015. Vol. 19. P.1749–1779.
61. Grüne L. Semmler W., Stieler M. Using nonlinear model predictive control for dynamic decision problems in economics. Journal of Economic Dynamics

and Control. 2015. Vol.60. P.112–133.
62. Гладка О. М., Карпович І. М., Сінчук А. М. Моделі економічної динаміки для фахівців з інформаційних технологій: навчальний посібник. Рівне: РДГУ, 2019. 158 с.
63. Доля П.Г. Mathematica для математиков. Решение дифференциальных уравнений : учебное пособие. Харьков, 2015. 84 с.
64. Прокопенко Ю. В., Татарчук Д. Д., Казміренко В. А. Обчислювальна математика : навчальний посібник. Київ, 2013. 224 с.
65. Лебедев В.В., Лебедев К.В. Математическое моделирование нестационарных экономических процессов. Москва, 2011. 336 с.
66. Трубецков Д.И. Феномен математической модели Лотки-Волтерры и сходных с ней. Известия вузов «ПНД». 2011. Т. 19, № 2. С. 69–88.
67. Башкирцева И.А., Рязанова Т.В., Ряшко Л.Б. Компьютерное моделирование нелинейной динамики : непрерывные модели : учебное пособие. Екатеринбург, 2017. 84с.
68. Lychkina N.N. Synergetics and development processes in socio-economic systems: Search for effective modeling constructs. Business Informatics. 2016. No. 1 (35). P. 66–79.
69. Вітлінський В. В., Коляда Ю. В., Кравченко Т. В. Моделі економічної динаміки : навчальний посібник. Київ : КНЕУ, 2018. 332 с.
70. Дмитрієва В. А. Економічні коливання незалежної України: нелінійний аналіз криз та стійкості: монографія. Дніпропетровськ, 2015. 116 с.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А
(обов’язковий)

SUMMARY

Dinits R.O. Modeling the behavior of socio-economic systems by methods of nonlinear dynamics. Qualifying master's thesis. Sumy State University, Sumy, 2021.

The specifics of modeling of social and economic systems by methods of nonlinear dynamics are investigated in the work. The algorithm for using the improved Euler's method for numerical integration of systems of nonlinear differential equations is developed. Two level Lotka-Volterra model is studied. The model of competitive interaction between economic entities for research funding is constructed.

Keywords: nonlinearity, socio-economic systems, systems of nonlinear differential equations, Lotki-Volterra model.

АНОТАЦІЯ

Дініц Р.О. Моделювання поведінки соціально-економічних систем методами нелінійної динаміки. – Кваліфікаційна магістерська робота. Сумський державний університет, Суми, 2021.

У роботі досліджено особливості моделювання соціально-економічних систем методами нелінійної динаміки. Розроблено алгоритм використання удосконаленого методу Ейлера для чисельного інтегрування систем нелінійних диференціальних рівнянь. На базі моделі Лотки-Вольтери побудована модель, яка описує конкурентну взаємодію між економічними суб’єктами за фінансування наукових досліджень.

Ключові слова: нелінійність, соціально-економічні системи, системи нелінійних диференціальних рівнянь, модель Лотки-Вольтерри.

ДОДАТОК Б

(Довідковий)

Фрагменти розв'язання систем диференціальних рівнянь і підбору параметрів в програмному середовищі Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	t	x	y	dx/dt	dy/dt	df/dx	df/dy	dg/dx	dg/dy			
2	0	3	4	-4	3	0	-1	1	0			
3	0,1	2,585	4,28	-4,28	2,585	0	-1	1	0			
4	0,2	2,144075	4,5171	-4,5171	2,144075	0	-1	1	0			
5	0,3	1,681644625	4,708922	-4,708922	1,681644625	0	-1	1	0			
6	0,4	1,202344202	4,853541853	-4,853541853	1,202344202	0	-1	1	0		x0	3
7	0,5	0,710978296	4,949508563	-4,949508563	0,710978296	0	-1	1	0		y0	4
8	0,6	0,212472548	4,99585885	-4,99585885	0,212472548	0	-1	1	0			
9	0,7	-0,2881757	4,992126811	-4,992126811	-0,2881757	0	-1	1	0		h	0,1
10	0,8	-0,7859475	4,938348607	-4,938348607	-0,785947503	0	-1	1	0			
11	0,9	-1,27585263	4,835062113	-4,835062113	-1,275852626	0	-1	1	0			
12	1	-1,75297957	4,68330154	-4,68330154	-1,752979574	0	-1	1	0			
13	1,1	-2,21254483	4,484587075	-4,484587075	-2,21254483	0	-1	1	0			
14	1,2	-2,64994081	4,240909657	-4,240909657	-2,649940813	0	-1	1	0			
15	1,3	-3,06078208	3,954711027	-3,954711027	-3,060782075	0	-1	1	0			
16	1,4	-3,44094927	3,628859264	-3,628859264	-3,440949267	0	-1	1	0			
17	1,5	-3,78663045	3,266620041	-3,266620041	-3,786630447	0	-1	1	0			
18	1,6	-4,0943593	2,871623896	-2,871623896	-4,094359299	0	-1	1	0			
19	1,7	-4,36104989	2,447829847	-2,447829847	-4,361049893	0	-1	1	0			
20	1,8	-4,58402763	1,999485709	-1,999485709	-4,584027628	0	-1	1	0			
21	1,9	-4,76105606	1,531085517	-1,531085517	-4,76105606	0	-1	1	0			
22	2	-4,89035933	1,047324484	-1,047324484	-4,890359332	0	-1	1	0			
23	2,1	-4,97063998	0,553051928	-0,553051928	-4,970639984	0	-1	1	0			
24	2,2	-5,00109198	0,05322267	-0,05322267	-5,001091976	0	-1	1	0			

Рисунок Б.1 – Розв'язання демонстраційної СДР

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	t	x	y	dx/dt	dy/dt	df/dx	df/dy	dg/dx	dg/dy		a	0,3
2	0	3	3	-1,62	0,6	-0,54	-0,84	0,9	0,2		b	0,28
3	0,1	2,839854	3,05331	-1,575911093	0,463969385	-0,5549268	-0,79515912	0,915993	0,1519562		c	0,7
4	0,2	2,68479082	3,092841836	-1,519580097	0,326100725	-0,565995714	-0,75174143	0,927852551	0,105437246		d	0,3
5	0,3	2,535907472	3,118574093	-1,453584055	0,189522738	-0,573200746	-0,710054092	0,935572228	0,060772242			
6	0,4	2,394042187	3,130784291	-1,380451652	0,057019898	-0,576619601	-0,670331812	0,939235287	0,018212656		x0	3
7	0,5	2,259785888	3,130008629	-1,302546046	-0,069061242	-0,576402416	-0,632740049	0,939002589	-0,022064234		y0	3
8	0,6	2,133503726	3,116994653	-1,2219824	-0,186860345	-0,572758503	-0,597381043	0,935098396	-0,059948882			
9	0,7	2,015363124	3,09265126	-1,140579348	-0,29501129	-0,565942353	-0,564301675	0,927795378	-0,095391063		h	0,1
10	0,8	1,905365077	3,057999717	-1,059840119	-0,392618042	-0,556239921	-0,533502222	0,917399915	-0,128390477			
11	0,9	1,803376005	3,014128468	-0,980957146	-0,479207841	-0,543955971	-0,504945281	0,904238541	-0,158987199			
12	1	1,709158146	2,962153528	-0,904833429	-0,55467082	-0,529402988	-0,478564281	0,888646058	-0,187252556			
13	1,1	1,622397139	2,90318538	-0,832114362	-0,619193869	-0,512891906	-0,454271199	0,870955614	-0,213280858			
14	1,2	1,542726036	2,838302631	-0,763224732	-0,673194831	-0,494724737	-0,43196329	0,851490789	-0,237182189			
15	1,3	1,469745471	2,768532103	-0,698406864	-0,717261216	-0,475188989	-0,411528732	0,830559631	-0,259076359			
16	1,4	1,403040029	2,694834765	-0,637757085	-0,752096021	-0,454553734	-0,392851208	0,80845043	-0,279087991			
17	1,5	1,342191104	2,618096693	-0,581258774	-0,778471858	-0,433067074	-0,375813509	0,785429008	-0,297342669			
18	1,6	1,286786648	2,539124184	-0,528811113	-0,7971936	-0,410954772	-0,360300261	0,761737255	-0,313964006			
19	1,7	1,236428269	2,458642199	-0,480253241	-0,809069124	-0,388419816	-0,346199915	0,73759266	-0,329071519			
20	1,8	1,190736143	2,377295339	-0,435383972	-0,814887292	-0,365642695	-0,33340612	0,713188602	-0,342779157			
21	1,9	1,149352163	2,295650687	-0,393977454	-0,815402156	-0,342782192	-0,321818606	0,688695206	-0,355194351			
22	2	1,111941717	2,21420195	-0,35579527	-0,811322309	-0,319976546	-0,311343681	0,664260585	-0,366417485			
23	2,1	1,078194422	2,133374429	-0,320595548	-0,803304378	-0,29734484	-0,301894438	0,640012329	-0,376541674			
24	2,2	1,04782407	2,053530454	-0,288139597	-0,791949726	-0,274988527	-0,293390739	0,616059136	-0,385652779			
25	2,3	1,020568039	1,974975014	-0,258196574	-0,777803597	-0,252993004	-0,285759051	0,592492504	-0,393829588			

Рисунок Б.2 – Розв'язання СДР моделі Лотки-Вольтерри

$(\alpha = 0.3, \beta = 0.28, \gamma = 0.7, \delta = 0.3, x_0 = 3, y_0 = 3, h = 0.1)$

Продовження додатку Б

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	t	x1	x2	x3	dx1/dt	dx2/dt	dx3/dt	df/dx1	df/dx2	df/dx3
2	0	26,8	19,6	53,6	-3,372876361	-0,69702052	-6,227398556	-0,144348141	-1,46953E-05	-0,526089164
3	1	25,9	21,3	52,8	-1,921639631	-2,161081614	-5,887507779	-0,072436554	-1,42018E-05	-0,508421991
4	2	27,8	21,5	50,7	-3,026807287	-3,809775772	-8,895894024	-0,224249904	-1,52436E-05	-0,545719357
5	3	26,3	20,1	53,6	-2,784602684	-0,94407104	-5,748094069	-0,104397259	-1,44211E-05	-0,516274068
6	4	25,9	19,8	54,3	-2,684251314	-0,32470331	-4,892162818	-0,072436554	-1,42018E-05	-0,508421991
7	5	22,4	17,8	59,8	-1,607780725	3,838440424	3,050202912	0,207219615	-1,22826E-05	-0,439716316
8	6	19,3	22,2	58,5	1,497460846	1,580730587	5,141722455	0,45491508	-1,05828E-05	-0,378862719
9	7	21,9	23,6	54,5	1,143976206	-2,272899717	-0,855776974	0,247170497	-1,20085E-05	-0,42990122
10	8	22,4	21,3	56,3	-0,068816607	0,365704287	0,059020521	0,207219615	-1,22826E-05	-0,439716316
11	9	21,7	21,1	57,2	0,156812517	1,102184826	1,510876148	0,263150849	-1,18988E-05	-0,425975181
12										
13		x1	x2	x3		h		16,95095407	11,17190203	42,86094264
14	k	1,997019101	1,984244315	7,202029251		1		70,98379874		
15	рів	0,039950881	5,48332E-07	0,019630193						
16	рів	0,033893842	0,056706716	0						
17	рів	0,093924346	0,07603985	0,061766017						
18										
19	1	0	0		1					
20	0	1	0		1					
21	0	0	1		1					
22										

	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	dg/dx1	dg/dx2	dg/dx3	dp/dx1	dp/dx2	dp/dx3				
2	-0,664319298	-0,238658942	0	-5,034344948	-4,075735974	0,580712209				
3	-0,721938829	-0,431461776	0	-4,959205471	-4,014904094	0,679537837	-0,9	1,7	-0,8	-1,491353573
4	-0,728717597	-0,454144462	0	-4,761964344	-3,855220409	0,938955109	1,9	0,2	-2,1	-0,355356596
5	-0,681266219	-0,295365658	0	-5,034344948	-4,075735974	0,580712209	-1,5	-1,4	2,9	-0,260066846
6	-0,671098066	-0,261341628	0	-5,10009199	-4,12896387	0,494239785	-0,4	-0,3	0,7	-1,155447479
7	-0,603310383	-0,034514765	0	-5,616675893	-4,547183046	-0,185186404	-3,5	-2	5,5	-1,343388471
8	-0,752443286	-0,533533864	0	-5,494574244	-4,448331241	-0,024594759	-3,1	4,4	-1,3	-2,444998143
9	-0,799894665	-0,692312668	0	-5,118876859	-4,14417184	0,469533378	2,6	1,4	-4	0,864057768
10	-0,721938829	-0,431461776	0	-5,287940682	-4,28104357	0,247175716	0,5	-2,3	1,8	1,469318219
11	-0,71516006	-0,408779089	0	-5,372472594	-4,349479435	0,135996886	-0,7	-0,2	0,9	-0,088925071

Рисунок Б.3 – Фрагменти розрахунку параметрів конкурентної моделі «хижак-жертва» (ч.1)

	T	U	V	W	X	Y
1				x1*	x2*	x3*
2				26,8	19,6	53,6
3	-1,491353573	0,506487997	1,874985597	25,30864643	20,106488	55,4749856
4	-0,355356596	-1,001216426	1,215270665	24,95328983	19,1052716	56,6902563
5	-0,260066846	-1,841837621	1,478220247	24,69322299	17,2634339	58,1684765
6	-1,155447479	0,143879912	1,516129105	23,53777551	17,4073139	59,6846056
7	-1,343388471	0,618423869	1,414194862	22,19438704	18,0257377	61,0988005
8	-2,444998143	4,257194391	-1,444079134	19,74938889	22,2829321	59,6547213
9	0,864057768	0,595666758	-2,551268782	20,61344666	22,8785989	57,1034526
10	1,469318219	-1,943651315	0,725021936	22,08276488	20,9349476	57,8284745
11	-0,088925071	0,311651266	-0,534534184	21,99383981	21,2465988	57,2939403
12						
13				0,925587745	0,796843	0,65387468
14				0,856712673	0,63495877	0,42755209

Рисунок Б.4 – Фрагменти розрахунку параметрів конкурентної моделі «хижак-жертва» (ч.2)

ДОДАТОК В

(Довідковий)

Формули розрахунків при розв'язанні систем диференціальних рівнянь і підборі параметрів системи

	K	L
1	a	0,3
2	b	0,28
3	c	0,7
4	d	0,3
5		
6	x0	3
7	y0	3
8		
9	h	0,1

Рисунок В.1 – Параметри моделювання СДР Лотки-Вольтерри

	A	B	C	D
1	t	x	y	dx/dt
2	0	=L6	=L7	=$L$1*B2-$L$2*B2*C2
3	=A2+$L$9	=B2+$L$9*D2+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(F2:G2;D2:E2)	=C2+$L$9*E2+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(H2:I2;D2:E2)	=$L$1*B3-$L$2*B3*C3
4	=A3+$L$9	=B3+$L$9*D3+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(F3:G3;D3:E3)	=C3+$L$9*E3+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(H3:I3;D3:E3)	=$L$1*B4-$L$2*B4*C4
5	=A4+$L$9	=B4+$L$9*D4+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(F4:G4;D4:E4)	=C4+$L$9*E4+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(H4:I4;D4:E4)	=$L$1*B5-$L$2*B5*C5
6	=A5+$L$9	=B5+$L$9*D5+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(F5:G5;D5:E5)	=C5+$L$9*E5+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(H5:I5;D5:E5)	=$L$1*B6-$L$2*B6*C6
7	=A6+$L$9	=B6+$L$9*D6+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(F6:G6;D6:E6)	=C6+$L$9*E6+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(H6:I6;D6:E6)	=$L$1*B7-$L$2*B7*C7
8	=A7+$L$9	=B7+$L$9*D7+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(F7:G7;D7:E7)	=C7+$L$9*E7+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(H7:I7;D7:E7)	=$L$1*B8-$L$2*B8*C8
9	=A8+$L$9	=B8+$L$9*D8+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(F8:G8;D8:E8)	=C8+$L$9*E8+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(H8:I8;D8:E8)	=$L$1*B9-$L$2*B9*C9
10	=A9+$L$9	=B9+$L$9*D9+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(F9:G9;D9:E9)	=C9+$L$9*E9+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(H9:I9;D9:E9)	=$L$1*B10-$L$2*B10*C10
11	=A10+$L$9	=B10+$L$9*D10+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(F10:G10;D10:E10)	=C10+$L$9*E10+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(H10:I10;D10:E10)	=$L$1*B11-$L$2*B11*C11
12	=A11+$L$9	=B11+$L$9*D11+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(F11:G11;D11:E11)	=C11+$L$9*E11+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(H11:I11;D11:E11)	=$L$1*B12-$L$2*B12*C12
13	=A12+$L$9	=B12+$L$9*D12+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(F12:G12;D12:E12)	=C12+$L$9*E12+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(H12:I12;D12:E12)	=$L$1*B13-$L$2*B13*C13
14	=A13+$L$9	=B13+$L$9*D13+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(F13:G13;D13:E13)	=C13+$L$9*E13+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(H13:I13;D13:E13)	=$L$1*B14-$L$2*B14*C14
15	=A14+$L$9	=B14+$L$9*D14+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(F14:G14;D14:E14)	=C14+$L$9*E14+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(H14:I14;D14:E14)	=$L$1*B15-$L$2*B15*C15
16	=A15+$L$9	=B15+$L$9*D15+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(F15:G15;D15:E15)	=C15+$L$9*E15+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(H15:I15;D15:E15)	=$L$1*B16-$L$2*B16*C16
17	=A16+$L$9	=B16+$L$9*D16+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(F16:G16;D16:E16)	=C16+$L$9*E16+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(H16:I16;D16:E16)	=$L$1*B17-$L$2*B17*C17
18	=A17+$L$9	=B17+$L$9*D17+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(F17:G17;D17:E17)	=C17+$L$9*E17+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(H17:I17;D17:E17)	=$L$1*B18-$L$2*B18*C18
19	=A18+$L$9	=B18+$L$9*D18+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(F18:G18;D18:E18)	=C18+$L$9*E18+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(H18:I18;D18:E18)	=$L$1*B19-$L$2*B19*C19
20	=A19+$L$9	=B19+$L$9*D19+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(F19:G19;D19:E19)	=C19+$L$9*E19+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(H19:I19;D19:E19)	=$L$1*B20-$L$2*B20*C20
21	=A20+$L$9	=B20+$L$9*D20+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(F20:G20;D20:E20)	=C20+$L$9*E20+($L$9^2)/2*СУММПРОИЗВ(H20:I20;D20:E20)	=$L$1*B21-$L$2*B21*C21

Рисунок В.2 – Формули для розв'язання СДР моделі Лотки-Вольтерри (ч.1)

Продовження додатку В

	E	F	G	H	I
1	dy/dt	df/dx	df/dy	dg/dx	dg/dy
2	=-$L$3*C2+$L$4*B2*C2	=$L$1-$L$2*C2	=-$L$2*B2	=$L$4*C2	=-$L$3+$L$4*B2
3	=-$L$3*C3+$L$4*B3*C3	=$L$1-$L$2*C3	=-$L$2*B3	=$L$4*C3	=-$L$3+$L$4*B3
4	=-$L$3*C4+$L$4*B4*C4	=$L$1-$L$2*C4	=-$L$2*B4	=$L$4*C4	=-$L$3+$L$4*B4
5	=-$L$3*C5+$L$4*B5*C5	=$L$1-$L$2*C5	=-$L$2*B5	=$L$4*C5	=-$L$3+$L$4*B5
6	=-$L$3*C6+$L$4*B6*C6	=$L$1-$L$2*C6	=-$L$2*B6	=$L$4*C6	=-$L$3+$L$4*B6
7	=-$L$3*C7+$L$4*B7*C7	=$L$1-$L$2*C7	=-$L$2*B7	=$L$4*C7	=-$L$3+$L$4*B7
8	=-$L$3*C8+$L$4*B8*C8	=$L$1-$L$2*C8	=-$L$2*B8	=$L$4*C8	=-$L$3+$L$4*B8
9	=-$L$3*C9+$L$4*B9*C9	=$L$1-$L$2*C9	=-$L$2*B9	=$L$4*C9	=-$L$3+$L$4*B9
10	=-$L$3*C10+$L$4*B10*C10	=$L$1-$L$2*C10	=-$L$2*B10	=$L$4*C10	=-$L$3+$L$4*B10
11	=-$L$3*C11+$L$4*B11*C11	=$L$1-$L$2*C11	=-$L$2*B11	=$L$4*C11	=-$L$3+$L$4*B11
12	=-$L$3*C12+$L$4*B12*C12	=$L$1-$L$2*C12	=-$L$2*B12	=$L$4*C12	=-$L$3+$L$4*B12
13	=-$L$3*C13+$L$4*B13*C13	=$L$1-$L$2*C13	=-$L$2*B13	=$L$4*C13	=-$L$3+$L$4*B13
14	=-$L$3*C14+$L$4*B14*C14	=$L$1-$L$2*C14	=-$L$2*B14	=$L$4*C14	=-$L$3+$L$4*B14
15	=-$L$3*C15+$L$4*B15*C15	=$L$1-$L$2*C15	=-$L$2*B15	=$L$4*C15	=-$L$3+$L$4*B15
16	=-$L$3*C16+$L$4*B16*C16	=$L$1-$L$2*C16	=-$L$2*B16	=$L$4*C16	=-$L$3+$L$4*B16
17	=-$L$3*C17+$L$4*B17*C17	=$L$1-$L$2*C17	=-$L$2*B17	=$L$4*C17	=-$L$3+$L$4*B17
18	=-$L$3*C18+$L$4*B18*C18	=$L$1-$L$2*C18	=-$L$2*B18	=$L$4*C18	=-$L$3+$L$4*B18
19	=-$L$3*C19+$L$4*B19*C19	=$L$1-$L$2*C19	=-$L$2*B19	=$L$4*C19	=-$L$3+$L$4*B19
20	=-$L$3*C20+$L$4*B20*C20	=$L$1-$L$2*C20	=-$L$2*B20	=$L$4*C20	=-$L$3+$L$4*B20
21	=-$L$3*C21+$L$4*B21*C21	=$L$1-$L$2*C21	=-$L$2*B21	=$L$4*C21	=-$L$3+$L$4*B21

Рисунок В.3 – Формули для розв’язання СДР моделі Лотки-Вольтерри (ч.2)

	A	B	C	D	E
1	t	x1	x2	x3	dx1/dt
2	0	26,8	19,6	53,6	=ТРАНСП(ТРАНСП(B2:D2)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B2:D2))))
3	1	25,9	21,3	52,8	=ТРАНСП(ТРАНСП(B3:D3)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B3:D3))))
4	2	27,8	21,5	50,7	=ТРАНСП(ТРАНСП(B4:D4)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B4:D4))))
5	3	26,3	20,1	53,6	=ТРАНСП(ТРАНСП(B5:D5)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B5:D5))))
6	4	25,9	19,8	54,3	=ТРАНСП(ТРАНСП(B6:D6)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B6:D6))))
7	5	22,4	17,8	59,8	=ТРАНСП(ТРАНСП(B7:D7)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B7:D7))))
8	6	19,3	22,2	58,5	=ТРАНСП(ТРАНСП(B8:D8)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B8:D8))))
9	7	21,9	23,6	54,5	=ТРАНСП(ТРАНСП(B9:D9)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B9:D9))))
10	8	22,4	21,3	56,3	=ТРАНСП(ТРАНСП(B10:D10)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B10:D10))))
11	9	21,7	21,1	57,2	=ТРАНСП(ТРАНСП(B11:D11)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B11:D11))))
12					
13		x1	x2	x3	
14	k	1,99701910080979	1,98424431530645	7,20202925149957	
15	рівн 1	0,0399508813733462	5,48332277035677E-07	0,0196301926912648	
16	рівн 2	0,0338938417175345	0,0567067157513881	0	
17	рівн 3	0,0939243460437676	0,0760398502695925	0,0617660171850525	
18					
19	1	0	0		1
20	0	1	0		1
21	0	0	1		1

Рисунок В.4 – Формули для підбору параметрів конкурентної моделі Лотки-Вольтерри (ч.1)

Продовження додатку В

	F	G
1	dx2/dt	dx3/dt
2	=ТРАНСП(ТРАНСП(B2:D2)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B2:D2))))	=ТРАНСП(ТРАНСП(B2:D2)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B2:D2))))
3	=ТРАНСП(ТРАНСП(B3:D3)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B3:D3))))	=ТРАНСП(ТРАНСП(B3:D3)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B3:D3))))
4	=ТРАНСП(ТРАНСП(B4:D4)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B4:D4))))	=ТРАНСП(ТРАНСП(B4:D4)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B4:D4))))
5	=ТРАНСП(ТРАНСП(B5:D5)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B5:D5))))	=ТРАНСП(ТРАНСП(B5:D5)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B5:D5))))
6	=ТРАНСП(ТРАНСП(B6:D6)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B6:D6))))	=ТРАНСП(ТРАНСП(B6:D6)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B6:D6))))
7	=ТРАНСП(ТРАНСП(B7:D7)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B7:D7))))	=ТРАНСП(ТРАНСП(B7:D7)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B7:D7))))
8	=ТРАНСП(ТРАНСП(B8:D8)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B8:D8))))	=ТРАНСП(ТРАНСП(B8:D8)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B8:D8))))
9	=ТРАНСП(ТРАНСП(B9:D9)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B9:D9))))	=ТРАНСП(ТРАНСП(B9:D9)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B9:D9))))
10	=ТРАНСП(ТРАНСП(B10:D10)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B10:D10))))	=ТРАНСП(ТРАНСП(B10:D10)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B10:D10))))
11	=ТРАНСП(ТРАНСП(B11:D11)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B11:D11))))	=ТРАНСП(ТРАНСП(B11:D11)*(ТРАНСП(B$14:D$14)-МУМНОЖ(B$15:D$17;ТРАНСП(B11:D11))))
12		
13	h	
14	1	

Рисунок В.5 – Формули для підбору параметрів конкурентної моделі Лотки-Вольтерри (ч.2)

	H	I	J	K
1	df/dx1	df/dx2	df/dx3	dg/dx1
2	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B2;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B2)	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B2;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B2)	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B2;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B2)	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C2;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C2)
3	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B3;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B3)	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B3;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B3)	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B3;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B3)	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C3;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C3)
4	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B4;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B4)	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B4;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B4)	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B4;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B4)	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C4;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C4)
5	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B5;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B5)	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B5;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B5)	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B5;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B5)	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C5;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C5)
6	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B6;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B6)	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B6;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B6)	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B6;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B6)	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C6;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C6)
7	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B7;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B7)	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B7;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B7)	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B7;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B7)	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C7;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C7)
8	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B8;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B8)	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B8;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B8)	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B8;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B8)	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C8;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C8)
9	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B9;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B9)	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B9;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B9)	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B9;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B9)	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C9;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C9)
10	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B10;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B10)	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B10;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B10)	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B10;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B10)	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C10;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C10)
11	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B11;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B11)	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B11;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B11)	=МУМНОЖ(B$14-B$15*B11;A$19:C$19)-(B$15:D$15*B11)	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C11;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C11)
12				
13	=СУММКВРАЗН(Q3:Q11;T3:T11)	=СУММКВРАЗН(R3:R11;U3:U11)	=СУММКВРАЗН(S3:S11;V3:V11)	
14	=H13+I13+J13			

Рисунок В.6 – Формули для підбору параметрів конкурентної моделі Лотки-Вольтерри (ч.3)

	L	M	N	O
1	dg/dx2	dg/dx3	dp/dx1	dp/dx2
2	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C2;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C2)	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C2;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C2)	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D2;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D2)	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D2;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D2)
3	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C3;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C3)	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C3;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C3)	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D3;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D3)	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D3;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D3)
4	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C4;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C4)	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C4;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C4)	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D4;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D4)	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D4;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D4)
5	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C5;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C5)	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C5;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C5)	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D5;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D5)	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D5;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D5)
6	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C6;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C6)	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C6;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C6)	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D6;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D6)	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D6;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D6)
7	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C7;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C7)	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C7;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C7)	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D7;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D7)	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D7;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D7)
8	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C8;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C8)	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C8;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C8)	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D8;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D8)	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D8;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D8)
9	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C9;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C9)	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C9;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C9)	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D9;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D9)	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D9;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D9)
10	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C10;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C10)	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C10;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C10)	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D10;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D10)	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D10;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D10)
11	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C11;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C11)	=МУМНОЖ(C$14-C$16*C11;A$20:C$20)-(B$16:D$16*C11)	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D11;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D11)	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D11;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D11)

Рисунок В.7 – Формули для підбору параметрів конкурентної моделі Лотки-Вольтерри (ч.4)

	P	Q	R	S	T	U
1	dp/dx3					
2	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D2;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D2)					
3	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D3;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D3)	=B3-B2	=C3-C2	=D3-D2	=F$14*E2+(F$14^2)/2*(H2*E2+I2*F2+J2*G2)	=F$14*F2+(F$14^2)/2*(K2*E2+L2*F2+M2*G2)
4	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D4;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D4)	=B4-B3	=C4-C3	=D4-D3	=F$14*E3+(F$14^2)/2*(H3*E3+I3*F3+J3*G3)	=F$14*F3+(F$14^2)/2*(K3*E3+L3*F3+M3*G3)
5	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D5;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D5)	=B5-B4	=C5-C4	=D5-D4	=F$14*E4+(F$14^2)/2*(H4*E4+I4*F4+J4*G4)	=F$14*F4+(F$14^2)/2*(K4*E4+L4*F4+M4*G4)
6	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D6;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D6)	=B6-B5	=C6-C5	=D6-D5	=F$14*E5+(F$14^2)/2*(H5*E5+I5*F5+J5*G5)	=F$14*F5+(F$14^2)/2*(K5*E5+L5*F5+M5*G5)
7	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D7;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D7)	=B7-B6	=C7-C6	=D7-D6	=F$14*E6+(F$14^2)/2*(H6*E6+I6*F6+J6*G6)	=F$14*F6+(F$14^2)/2*(K6*E6+L6*F6+M6*G6)
8	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D8;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D8)	=B8-B7	=C8-C7	=D8-D7	=F$14*E7+(F$14^2)/2*(H7*E7+I7*F7+J7*G7)	=F$14*F7+(F$14^2)/2*(K7*E7+L7*F7+M7*G7)
9	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D9;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D9)	=B9-B8	=C9-C8	=D9-D8	=F$14*E8+(F$14^2)/2*(H8*E8+I8*F8+J8*G8)	=F$14*F8+(F$14^2)/2*(K8*E8+L8*F8+M8*G8)
10	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D10;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D10)	=B10-B9	=C10-C9	=D10-D9	=F$14*E9+(F$14^2)/2*(H9*E9+I9*F9+J9*G9)	=F$14*F9+(F$14^2)/2*(K9*E9+L9*F9+M9*G9)
11	=МУМНОЖ(D$14-D$17*D11;A$21:C$21)-(B$17:D$17*D11)	=B11-B10	=C11-C10	=D11-D10	=F$14*E10+(F$14^2)/2*(H10*E10+I10*F10+J10*G10)	=F$14*F10+(F$14^2)/2*(K10*E10+L10*F10+M10*G10)

Рисунок В.8 – Формули для підбору параметрів конкурентної моделі Лотки-Вольтерри (ч.5)

Продовження додатку В

	V	W	X	Y
1		x1*	x2*	x3*
2		=B2	=C2	=D2
3	=F$14*G2+(F$14^2)/2*(N2*E2+O2*F2+P2*G2)	=W2+T3	=X2+U3	=Y2+V3
4	=F$14*G3+(F$14^2)/2*(N3*E3+O3*F3+P3*G3)	=W3+T4	=X3+U4	=Y3+V4
5	=F$14*G4+(F$14^2)/2*(N4*E4+O4*F4+P4*G4)	=W4+T5	=X4+U5	=Y4+V5
6	=F$14*G5+(F$14^2)/2*(N5*E5+O5*F5+P5*G5)	=W5+T6	=X5+U6	=Y5+V6
7	=F$14*G6+(F$14^2)/2*(N6*E6+O6*F6+P6*G6)	=W6+T7	=X6+U7	=Y6+V7
8	=F$14*G7+(F$14^2)/2*(N7*E7+O7*F7+P7*G7)	=W7+T8	=X7+U8	=Y7+V8
9	=F$14*G8+(F$14^2)/2*(N8*E8+O8*F8+P8*G8)	=W8+T9	=X8+U9	=Y8+V9
10	=F$14*G9+(F$14^2)/2*(N9*E9+O9*F9+P9*G9)	=W9+T10	=X9+U10	=Y9+V10
11	=F$14*G10+(F$14^2)/2*(N10*E10+O10*F10+P10*G10)	=W10+T11	=X10+U11	=Y10+V11
12				
13		=КОРРЕЛ(B2:B11;W2:W11)	=КОРРЕЛ(C2:C11;X2:X11)	=КОРРЕЛ(D2:D11;Y2:Y11)
14		=W13^2	=X13^2	=Y13^2

Рисунок В.9 – Формули для підбору параметрів конкурентної моделі Лотки-Вольтерри (ч.6)