

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Кафедра прикладної математики та моделювання складних систем

Допущено до захисту

Завідувач кафедри ПМ та МСС

_____ Коплик І.В.
(підпис)

«__» _____ 2022 р.

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття освітнього ступеня «бакалавр»

спеціальність 113 «Прикладна математика»

освітньо-професійна програма «Прикладна математика»

тема роботи «**МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРІОДИЧНОГО РЕЖИМУ
РОЗМ'ЯКШЕННЯ ПОВЕРХНІ ЛЬОДУ ПРИ ТЕРТІ**»

Виконавець

студент факультету ЕлІТ

Чернущенко Роман Романович _____
(прізвище, ім'я, по батькові) (підпис)

Науковий керівник

професор, доктор фіз.-мат. наук
(науковий ступінь, вчене звання)

Хоменко Олексій Віталійович _____
(прізвище, ім'я, по батькові) (підпис)

Суми – 2022 р

СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет	електроніки та інформаційних технологій
Кафедра	прикладної математики та моделювання складних систем
Рівень вищої освіти	бакалавр
Галузь знань	11 Математика та статистика
Спеціальність	113 Прикладна математика
Освітня програма	освітньо-професійна «Прикладна математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри ПМ та МСС

Коплик І.В. _____

«__» _____ 2022 р.

ЗАВДАННЯ НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ ЗДОБУВАЧУ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Чернущенко Роману Романовичу

1. Тема роботи Моделювання періодичного режиму розм'якшення поверхні льоду при терті

Керівник роботи Хоменко О.В., професор, доктор фіз.-мат. наук
затверджено наказом по факультету ЕлІТ від «16» лютого 2022 р. №1046-VI

2. Термін подання роботи студентом «17» червня 2022 р.

3. Вихідні данні до роботи 1) Методи аналізу нелінійних систем; 2) Теоретичні та експериментальні відомості про періодичний режим тертя льоду.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, що їй належить розробити) Дослідження впливу параметрів системи на комп'ютерну модель розм'якшення льоду, опис експериментів та періодичного режиму тертя на поверхні льоду. Написання програм для математичних моделей.

5. Перелік графічного матеріалу

Капілярні мостики, що контактують між нерівностями поверхонь під час ковзання; Режими тертя, що пов'язані з тертям льоду, в залежності від товщини мастильного шару; Фазові портрети деформації; Часові ряди деформації без шуму; Часові ряди деформації з шумом; Спектральні щільності сигналу з шумом;

6. Консультанти до проекту (роботи), із значенням розділів проекту, що стосується їх

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		Завдання видав	Завдання прийняв

7. Дата видачі завдання «02» травня 2022 р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ п/п	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Термін виконання роботи	Примітка
1	Вивчити типові моделі, які використовуються у фізиці тертя льоду.	24.05 - 29.05	Виконано
2	Провести аналіз літератури на тему: «Тертя льоду».	30.05 - 3.06	Виконано
3	Побудувати математичну модель, яка описує періодичний режим розм'якшення льодової поверхні при терті.	4.06 - 10.06	Виконано
4	За допомогою математичних моделей написати комп'ютерні програми в середовищі Matlab.	11.06 - 14.06	Виконано
5	Проаналізувати отриману модель в середовищі Matlab.	15.06 - 17.06	Виконано

Здобувач вищої освіти

(підпис)

Чернущенко Р.Р.

Керівник роботи

(підпис)

Хоменко О.В.

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота: 41 с., 10 рисунків і 33 джерела.

Мета роботи: побудувати математичну модель, яка описує періодичний режим розм'якшення поверхні льоду при терті з використанням Matlab.

Об'єкт дослідження: розм'якшення поверхні льоду при терті.

Предмет дослідження: комп'ютерна модель розм'якшення поверхні льоду і реалізована програма на Matlab.

Методи навчання: рівняння математичної фізики, математичні моделі, що описують періодичний режим розм'якшення льодової поверхні при терті.

У результаті досліджень розглянуто комп'ютерно змодельовану систему, яка розраховує характеристики змащувальної рідини між льодовими поверхнями.

Проведені експерименти, що досліджують модель за різними початковими умовами системи. Проаналізована поведінка під час початку руху поверхонь і через деякий час, коли характеристики системи не змінюються, що відповідає стаціонарному стану. Порівняно отримані графіки фазових портретів деформації, часові ряди деформації з шумом і без, а також їх спектральні щільності. Досліджено вплив початкових умов моделі на подальшу її поведінку.

Ключові слова: ЗМАЩУВАЛЬНИЙ МАТЕРІАЛ, ПЕРІОДИЧНИЙ РЕЖИМ ТЕРТЯ, БІЛИЙ ШУМ, МОДУЛЬ ЗСУВУ, АДІАБАТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ, СИСТЕМА ЛОРЕНЦА, КОЛИВАННЯ, ЗСУВ.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ 1. ФІЗИКА ТЕРТЯ ЛЬОДУ.....	7
1.1 Режими тертя льоду.....	7
1.2 Основні фактори, що впливають на тертя льоду.....	11
РОЗДІЛ 2. НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ РОЗМ'ЯКШЕННЯ ПОВЕРХНІ ЛЬОДУ ПРИ ТЕРТІ.....	15
2.1 Загальна постановка задачі.....	15
2.2 Випадок $\tau_T \ll \tau_\varepsilon, \tau_\sigma$	17
2.3 Випадок $\tau_\sigma \ll \tau_\varepsilon, \tau_T$	22
ВИСНОВКИ.....	26
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	27
ДОДАТОК А.....	30
ДОДАТОК Б.....	33
ДОДАТОК В.....	36
ДОДАТОК Г.....	39

ВСТУП

Лід зазвичай вважається надзвичайно слизьким матеріалом, оскільки його коефіцієнт тертя на порядок нижче, ніж в інших кристалічних твердих тіл, з якими взаємодіє більшість людей. Історично склалося так, що мікроскопічні спостереження за крижаними поверхнями були проблематичними, тому процеси, пов'язані з тертям льоду, були визначені з використанням аналітичного підходу (Боуден, Еванс) [1, 2] або були виведені з залежності між силою тертя і рядом параметрів, використовуваних в трибологічних експериментах (Барнс, Табор, Кеннеді) [3, 2].

Тертя на льоду є предметом наукових досліджень понад 100 років (Жолі, Рейнольдс) [3], і давно було визнано, що коефіцієнт тертя для льоду сильно залежить від температури та швидкості ковзання (Боуден, Хьюз) [3].

Актуальність роботи полягає в тому, що вивчення періодичного режиму розм'якшення поверхні льоду при терті має фундаментальне значення для трибології, а також може бути використано для прогнозування зменшення або збільшення тертя та ліквідації негативного впливу переривчастого режиму.

Завдання:

1. Вивчити типові моделі, які використовуються в фізиці тертя льоду;
2. Провести аналіз літератури за темою: «Тертя льоду»;
3. Побудувати математичну модель, яка описує періодичний режим розм'якшення поверхні льоду при терті, та програми в середовищі Matlab.

РОЗДІЛ 1

ФІЗИКА ТЕРТЯ ЛЬОДУ

1.1 Режими тертя льоду

Розглянемо основні фізичні поняття сухого, граничного, змішаного і гідродинамічного тертя щодо товщини мастильного рідиноподібного шару на льоду.

Сухе тертя описує ковзний контакт між двома поверхнями за відсутності будь-якого мастильного шару. Тверда поверхня ніколи не буває повністю плоскою, але показує виразний профіль поверхневих нерівностей і западин. Коли дві шорсткості різних поверхонь стикаються, то між ними утворюються адгезійні зв'язки хімічної або фізичної природи.

Якщо поверхні переміщуються відносно один одного, то клейові з'єднання поділяються. Сила, необхідна для розриву адгезійних зв'язків між нерівностями, що контактують, являє собою тангенціальну силу тертя F_T що задається формулою:

$$F_T = \tau_c A_c, \quad (1.1)$$

де

τ_c - міцність на зсув, необхідна для зсуву контакту з шорсткістю,

A_c - площа реального контакту між шорсткостями поверхонь, що сполучаються.

Боуден [4] припустив, що реальна площа контакту (A_c) між двома поверхнями прямо пропорційна прикладеному навантаженню (F_N) і твердості більш м'якого матеріалу (H):

$$A_c = \frac{F_N}{H}. \quad (1.2)$$

Відповідно, коефіцієнт тертя можна записати у вигляді:

$$\mu = \frac{\tau_c}{H}. \quad (1.3)$$

Таким чином, сухе тертя характеризується роботою, яка необхідна для розриву адгезійних зв'язків твердої поверхні. Це залежить від прикладеного

навантаження і твердості поверхонь, але не залежить від швидкості ковзання [5, 6, 2].

Реального сухого тертя на льоду в атмосферних умовах існувати не може. Навіть при дуже низьких температурах з'являється надтонка рідка плівка що змащує поверхню ковзання. Ця плівка має товщину в кілька молекулярних шарів.

Граничне змащування характеризується мастильним шаром товщиною всього в кілька молекулярних шарів між поверхнями ковзання [5]. Граничне мастило на льоду характеризується тим, що температура (T) в зоні контакту скрізь нижче температури плавлення (T_m), а товщина мастильного рідиноподібного шару (h) набагато менше шорсткості поверхні (R) [7], тобто $T < T_m$ і $h < R$.

Цей поверхневий шар зменшує контакт твердих тіл між поверхнями. Загалом коефіцієнт тертя при граничному змащенні зазвичай нижче, ніж при сухому терті [5].

Змішане тертя виникає, коли температура поверхні підіймається вище температури танення (T_m) льоду в деяких точках зони контакту, а товщина рідкого шару (h) все ще менше, ніж характерна шорсткість поверхонь (R) [7], тобто $T > T_m$ і $h < R$.

У цьому режимі навантаження на блок частково підтримується нерівностями поверхні та частково мастильним шаром. Очевидно, що збільшена товщина мастильного шару знижує адгезію «тверде тіло - тверде тіло».

Відповідно, зменшення сили тертя в порівнянні з граничним змащенням може бути продемонстровано за формулою:

$$F_T = A_c \left[\alpha \tau_c + (1 - \alpha) \eta \frac{v}{h} \right]. \quad (1.4)$$

де

α - частка незмазаної площини,

τ_c - міцність на зсув твердого контакту,

v - швидкість блока,

η - в'язкість,

h - товщина мастильного шару.

Однак у той же час змащування посилює утворення капілярних водних мостів між нерівностями, рис. 1.1 [5].

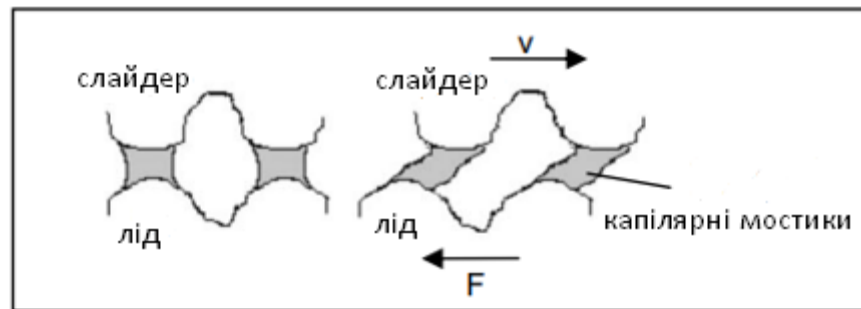


Рис. 1.1. Капілярні мостики що контактують між нерівностями поверхонь під час ковзання

Капілярні мостики діють як зв'язок між блоком та крижаною поверхнею та надають на блок силу опору [8]. Однак капілярні мостики не витримують прикладеного навантаження. Вони діють як рідкі зв'язки та призводять до додаткового опору тертя. Отже, капілярні мости мають бути враховані для розрахунків, але проблема полягає в тому, що не існує фізичної чи експериментальної моделі для опису вкладу капілярних мостів через тертя.

Гідродинамічне тертя. Якщо скрізь у зоні контакту температура вища за температуру плавлення (T_m), а товщина мастильного шару між двома поверхнями більше висоти нерівностей, то тертя називається гідродинамічним, тобто $T > T_m$ і $h > R$.

У цьому режимі тертя в прикладеному навантаженні відіграє роль мастильний шар, а не шорсткість поверхні. Якщо навантаження дуже високе, то частина мастильного шару може бути видавлена між поверхнями. Також відомо, що площа реального контакту між поверхнями ідентична площі поверхні (A) блока [5]. Під час ковзного руху немає контакту твердого тіла з

твердим тілом. Отже, зсув адгезійних зв'язків «тверде тіло – тверде тіло» більше не сприяє силі тертя. Силу тертя можна описати як

$$F_T = \tau_l A, \quad (1.5)$$

де

τ_l - міцність на зсув мастильного рідкого шару або «ефективна» напруга зсуву, що виникає в результаті зсуву рідкого шару. Це можна просто висловити як

$$\tau_l = \eta \frac{v}{h}. \quad (1.6)$$

Як і у випадку змішаного тертя, також треба враховувати сили капілярного опору.

Фаулер і Бежан [9] відзначили, що мастильна плівка під блоком на льоду стає товще на задньому кінці.

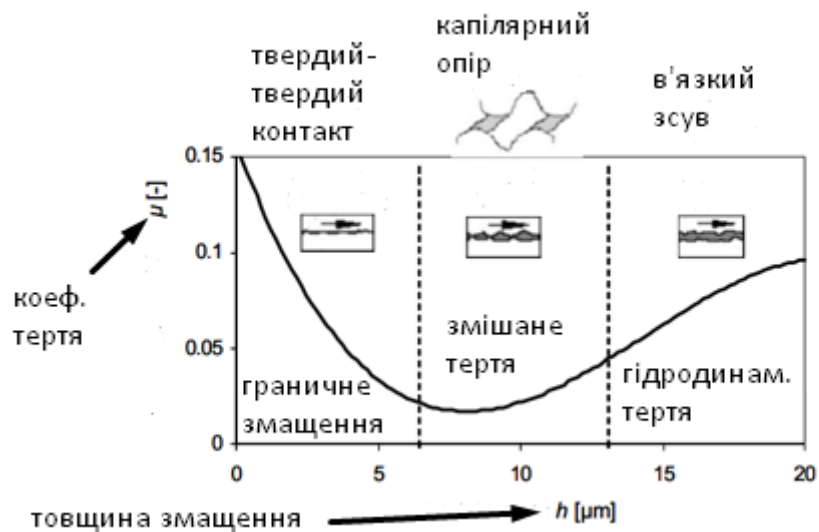


Рис. 1.2. Режими тертя, пов'язані з тертям льоду, в залежності від товщини мастильного шару

На рис. 1.2 показані різні режими тертя льоду. Слід зазначити, що на падіння коефіцієнта тертя з товщиною плівки в режимі граничного тертя відбувається за допомогою зменшеного контакту «тверде тіло-тверде тіло». З іншого боку, коефіцієнт тертя збільшується із товщиною плівки, оскільки вона стає повністю гідродинамічною. Відповідно існує оптимальна товщина плівки, пов'язана з мінімальним тертям для кожної системи блоків. Також

відзначається плавний перехід між різними режимами, позначеними пунктирними лініями.

1.2 Основні фактори, що впливають на тертя льоду

З інформації, отриманої в результаті експериментів з тертям льоду, проведених різними дослідниками, розглянемо вплив різних параметрів на коефіцієнт тертя.

Температура. З перших досліджень тертя льоду Боуденом і Хьюзом [10] багато дослідників підтвердили залежність коефіцієнта тертя від температури [11, 12, 13]. Деякі дослідники просто повідомляють про зниження коефіцієнта тертя із підвищенням температури [1, 14]. Це той випадок, коли у терті переважають умови граничного тертя.

Швидкість ковзання. Боуден першим зауважив, що тертя льоду зменшується зі збільшенням швидкості. Еванс та інші [15], які першими математично змоделювали тертя льоду, підтвердили ці висновки як експериментально, так і теоретично. Багато інших дослідників виявили ту саму залежність, використовуючи різні експериментальні установки та матеріали [3, 16].

При більш високих швидкостях виділяється більше тепла від тертя, ніж при нижчих швидкостях, що призводить до більшого виділення талої води.

І при цьому більше мастила, що полегшує рух ковзання. Це має місце в режимі граничного тертя, а також у режимі змішаного тертя до того, як сили опору переважають переваги більш товстішого мастильного шару.

Коефіцієнт тертя збільшується зі швидкістю, як вперше було помічено Оксаненом і Кейноненом [17] в їх експериментах з льодом проти льоду при температурах вище -5°C . Вони виявили, що збільшення тертя зі швидкістю можна пояснити збільшенням сил опору від зсуву мастильного шару в режимі гідродинамічного тертя.

Початок цього збільшення, очевидно, значною мірою залежить від розміру, ваги та матеріалу конструкції блока, а також експериментальної температури.

Підсумовуючи, можна сказати, що при широкій зміні температури або швидкості всі режими тертя від граничного до гідродинамічного можуть бути ідентифіковані при терті льоду.

Нормальна сила. Прикладена нормальна сила та видима площа контакту між корпусом блока та поверхнею льоду відіграють значну роль в значенні коефіцієнта тертя.

У літературі прийнято вважати, що коефіцієнт тертя блока об лід зменшується зі збільшенням нормальної сили при заданій температурі та швидкості. Дерягін [18] у своїх експериментах, проведених зі сталевим блоком, показав, що при збільшенні навантажень при температурах, близьких до температури плавлення, коефіцієнт тертя стає незалежним від нормальної сили. Експерименти Калабрезе [19] зі сталевим блоком та навантаженнями вище 400 Н призвели до коефіцієнта тертя, яке повністю не залежить від прикладеного навантаження.

Розглядаючи різні матеріали блока, Аккок та інші [20] показали, що коефіцієнт тертя скляного блока дійсно зменшується за нормальної сили, тоді як відповідні результати зі сталевим блоком не показують залежності.

Цікаво, що незалежність нормальної сили була виявлена для блоків з високим навантаженням, виготовлених з матеріалів з високою поверхневою енергією, в експериментах, проведених при більш високих швидкостях та/або температурах, близьких до температури плавлення льоду. Це свідчить про те, що ці результати належать до режиму гідродинамічного тертя, де повне змочування блока диктує результати.

Видима площа контакту. Боуден і Хьюз [10] вперше провели експерименти щодо впливу геометричної площини поверхні блока на коефіцієнт тертя. Їхні експериментальні результати показали незначну залежність від геометричної площини контакту. Проте Берле [21] виявив вплив геометричного розміру блока у більш контрольованих умовах. Коефіцієнт тертя збільшується зі збільшенням геометричної площини контакту блока.

Криві експоненційного зростання показують, що коефіцієнт тертя має тенденцію ставати незалежним від прикладеної сили при великих площах контакту.

Берле та інші [21, 22] виявили, що для дуже малої геометричної площини контакту нерівності розташовані ближче один до одного так, що на одиницю площини виділяється більша кількість енергії тертя. Це призводить до більш товстішого мастильного шару на одиницю площини та фактичного контакту. Чим більша геометрична область блока, то тим більше точок дотику розкидано. Отже, домінуючий режим тертя для дуже маленького блока для заданої температури, швидкості та нормальної сили буде гідродинамічний, а для більшого зразка коефіцієнт тертя при тих же експериментальних умовах все ще може контролюватись взаємодіями по шорсткості.

Шорсткість. Калабрезе [19] виміряв коефіцієнт тертя для сталі в залежності від швидкості ковзання з різним ступенем шорсткості та підтвердив, що шорсткість збільшує коефіцієнт тертя. Ітагакі та інші [13] дійшли до аналогічного висновку після порівняння різних типів сталі з грубим і гладким поліруванням.

Як правило, збільшення шорсткості поверхні призводить до збільшення взаємопов'язаних нерівностей під час руху ковзання, що збільшує швидкість зносу та загального тертя.

Крім того, Мармо та інші [23] вказують, що шорсткість призводить до зменшення фактичної товщини мастильної плівки.

Змащення. Боуден [15] провів експерименти зі змащенням різних матеріалів та виявив, що тертя було найвищим для поверхонь, які легко змащуються, особливо близько до температури плавлення.

Це можна пояснити посиленням утворенням капілярних мостиків між поверхнями ковзання, що стає особливо важливим у режимі змішаного та гідродинамічного тертя. Однак слід враховувати, що зміна гідрофобності була досягнута лише при використанні іншого матеріалу. Тому вплив

гідрофобності не може бути досліджено незалежно від інших параметрів, властивих матеріалу, таких як теплопровідність та твердість матеріалу.

Змащення поверхні відіграє важливу роль у терті льоду, особливо поблизу точки плавлення. Змащення, що є властивістю матеріалу, а також функцією шорсткості поверхні, є важливим фактором, який слід враховувати під час проведення експериментів з тертя льоду.

Структура поверхні. Ітагакі та інші [13] виявили у своїх експериментах, що їх зразки з полірованими канавками в напрямку ковзання показали таке ж низьке тертя, як і поліровані блоки.

Відносна вологість має великий вплив на початок ковзного руху. Бо чим вище вологість, тим більше змащується поверхня ковзання і тим нижчий опір тертю. На жаль, подальших експериментальних даних про вплив вологості за більш високих температур не існує. Можливо, при більш високих температурах, де існує товстіший шар рідини, очікується, що вологість вплине на коефіцієнт тертя.

РОЗДІЛ 2

НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ РОЗМ'ЯКШЕННЯ ПОВЕРХНІ ЛЬОДУ ПРИ ТЕРТІ

2.1 Загальна постановка задачі

У своїй роботі я розгляну розм'якшення льоду з урахуванням адитивних некорельованих коливань деформації зсуву та напруги, а також температури. Режим ковзання також має періодичний характер. Також є побудована стохастична модель, що описує коливальне розм'якшення поверхні льоду при терті, що допоможе з'ясувати причини цього режиму та його особливості [24, 25, 26].

Запишемо систему безрозмірних рівнянь:

$$\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} = -\varepsilon + g(\varepsilon)\sigma, \quad (2.1)$$

$$\tau_\sigma \dot{\sigma} = -\sigma + g(T-1)\varepsilon, \quad (2.2)$$

$$\tau_T \dot{T} = (T_e - T) - \sigma\varepsilon, \quad (2.3)$$

де

ε - зсувна складова деформацій, що виникає на льоду поверхневого шару,

σ - зсувна складова напруги,

T - температура поверхні льоду,

$\tau_{\varepsilon, \sigma, T}$ - час релаксації,

$g = G_0/G_\varepsilon < 1$ - постійна, яка є відношенням типового значення модуля зсуву льоду G_0 до його релаксованого значення G_ε ,

T_e - температура термостата.

$g(\varepsilon) \equiv G(\varepsilon)/G_0$ - відношення дефекту модуля зсуву ММ (мастильних матеріалів), яке залежить від деформації до типового значення модуля зсуву

В систему рівнянь ми включили дефект модуля зсуву ММ

$$G(\varepsilon) = \Theta + \frac{G_\varepsilon - \Theta}{1 + (\varepsilon/\varepsilon_p)^\beta}. \quad (2.4)$$

Після підстановки в рівняння (2.1) відношення (2.4) залежність $g(\varepsilon)$ буде виражатися рівністю

$$g(\varepsilon) = \frac{1+(\varepsilon/\alpha)^\beta}{\theta \cdot (\varepsilon/\alpha)^{\beta+1}}, \quad (2.5)$$

в якому введений параметр $\theta = \Theta/G < 1$, який виявляє відношення кутів нахилу кривої деформації на пластичних і гуківських ділянках, та коефіцієнт $\alpha = \varepsilon_p/\varepsilon_s$.

Виявлено, що нульові стаціонарні деформації ε_0 відповідають звичайному кристалічному льоду, а при $\varepsilon_0 \neq 0$ лід розм'якшується.

У встановленому стані всі похідні в рівняннях (2.1) - (2.3) рівні нулю і параметри льоду залишаються незмінними в часі. Прирівнювання похідних до нуля призводить до рівняння

$$\varepsilon \left[\frac{\theta \cdot (\varepsilon/\alpha)^{\beta+1}}{1+(\varepsilon/\alpha)^\beta} - g \left(T_e - \varepsilon^2 \cdot \frac{\theta \cdot (\varepsilon/\alpha)^{\beta+1}}{1+(\varepsilon/\alpha)^\beta} \right) \right] = 0, \quad (2.6)$$

яке при довільних постійних аналітично не розв'язується відносно ε і може бути досліджено тільки чисельно. Однак це рівняння представляє аналітичну залежність $T_e(\varepsilon)$ і може бути використана для побудови графічних залежностей стаціонарних деформацій від температури $\varepsilon_0(T_e)$ із залежності $T_e(\varepsilon_0)$.

Згідно із запропонованим підходом, плівка розм'якшеного льоду являє собою сильно в'язкою рідиною, яка може поводитися аналогічно твердому тілу і має високу ефективну в'язкість.

Рівняння (2.1) - (2.3) є характеристиками розм'якшеного стану льоду при $\varepsilon \neq 0$. Передбачається, що сила тертя зменшується зі зростанням температури за допомогою ослаблення водневих зв'язків між молекулами льоду. Крім того, сила тертя також зменшується зі збільшенням швидкості на контакті $v = l \partial \varepsilon / \partial t$, бо виділяється теплота, а отже, розм'якшувальна товщина шару збільшується [26, 27, 28, 29].

Кінетика встановлення стаціонарного стану значною мірою визначається часом релаксації [30, 31, 32].

2.2 Випадок $\tau_T \ll \tau_\varepsilon, \tau_\sigma$

Підставимо $\tau_T \dot{T} \approx 0$ в рівняння (2.3), після цього виразимо T і підставимо його в рівняння (2.2) та прийдемо до двопараметричної системи (2.1) і (2.2).

Тоді два вихідних диференціальних рівнянь першого порядку відносно деформації ε та напруги σ можна звести до рівняння другого порядку через ε . Для цього виразимо σ з рівняння (2.1) та знайдемо похідну за часом. Підставляючи ці залежності $\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ і $\dot{\sigma}(\dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon})$ в рівняння (2.2), приходимо до шуканого рівняння. Якщо час вимірюється в τ_ε , то це рівняння можна записати у вигляді

$$\ddot{\varepsilon} + \left(1 - A(\dot{\varepsilon} + \varepsilon) + \frac{(1+g\varepsilon^2)}{\tau}\right) \dot{\varepsilon} + B\varepsilon = \xi(t), \quad (2.7)$$

$$A = \frac{\beta(\varepsilon/\alpha)^{\beta-1} \alpha^{-1} [1-\theta]}{(\theta \cdot (\varepsilon/\alpha)^{\beta+1}) (1+(\varepsilon/\alpha)^\beta)}, \quad B = \frac{1}{\tau} \left(1 - g(g(\varepsilon) \cdot T_e - \varepsilon^2 - g(\varepsilon))\right)$$

де $\tau = \tau_\sigma / \tau_\varepsilon$

У рівняння (2.7) вводиться випадкова сила $\xi(t)$ та додатково чії моменти визначаються

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2D \delta_{ij} \delta(t - t'), \quad (2.8)$$

де

D - діє як інтенсивність джерела Ланжевена,

δ_{ij} - символ Кронекера,

$\delta(t)$ - дельта-функція Дірака.

Причиною врахування адитивного шуму в моделі можна пояснити тим, що він є найпростішим способом для опису тертя переривчастого режиму ковзання [24, 25].

Канонічна форма рівняння (2.7) виглядає наступним чином

$$\ddot{\varepsilon} + 2\alpha\dot{\varepsilon} + \omega_0^2\varepsilon = \xi(t), \quad (2.9)$$

де

α - коефіцієнт згасання,

ω_0 - власна частота коливань, що залежить від деформації.

Оскільки в стаціонарному стані ($D = 0$) в системі встановлюється постійне значення деформацій ($\dot{\varepsilon} = 0$), то воно може бути знайдено при прирівнюванні останнього доданку лівої частини (2.7) до нуля, що дає рівняння (2.6). Що відповідає коливанням з нульовою частотою ω_0 .

Для чисельного розв'язку рівняння (2.9) можна ввести позначення $x = \dot{\varepsilon}$, що переводить одне рівняння другого порядку (2.7) в два рівняння першого порядку

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= x, \\ \dot{x} &= -2\alpha x - \omega_0^2 \varepsilon + \xi(t).\end{aligned}\tag{2.10}$$

Явні вирази для α і ω_0 отримуються із порівнянь рівнянь (2.7) і (2.9).

Метод Ейлера та наступні ітераційні процедури використовуються для інтегрування [24, 25, 31, 32]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \varepsilon_1 + x_1 \Delta t, \\ x_2 &= x_1 + (-2\alpha x_1 - \omega_0^2 \varepsilon_1) \Delta t + \sqrt{\Delta t} W_n.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Для моделювання стохастичної сили W_n скористаємося генератором Боксу - Мюллера [26]

$$W_n = \sqrt{2D} \sqrt{-2 \ln r_1} \cos(2\pi r_2), r_i \in 0,1,\tag{2.12}$$

де

$r_{1,2}$ - псевдовипадкові числа з рівномірним розподілом.

Виконаємо моделювання для випадку $\tau_T \ll \tau_\varepsilon, \tau_\sigma$ з інтенсивністю шуму при $D = 0$, використовуючи формули (2.7) - (2.12).

Фазовий портрет на рис. 2.1 зображує результат чисельного розв'язку рівняння (2.7) на основі (2.11) та (2.12). Пунктирною з крапкою позначено ізокліну, на якій при $\dot{\varepsilon} = 0$ вказує точки, в яких фазові траєкторії мають вертикальну дотичну. Ізоклінальна лінія є віссю абсциси в розглянутих координатах. Також позначено ізокліну при $\ddot{\varepsilon} = 0$, яка демонструє точки, в яких фазові траєкторії мають горизонтальну дотичну. Очевидно, що спостерігається наявність 3 точок: сідлова точка на початку координат, яка є нестійкою, тому що вона відповідає максимуму синергетичного потенціалу і

дві інші точки, які розташовані симетрично щодо $\varepsilon = 0$. Також спостерігаємо схильність до коливального режиму при встановленні стаціонарного стану ε_0 . Однак, ця тенденція реалізується не повною мірою через велике значення постійного згасання.

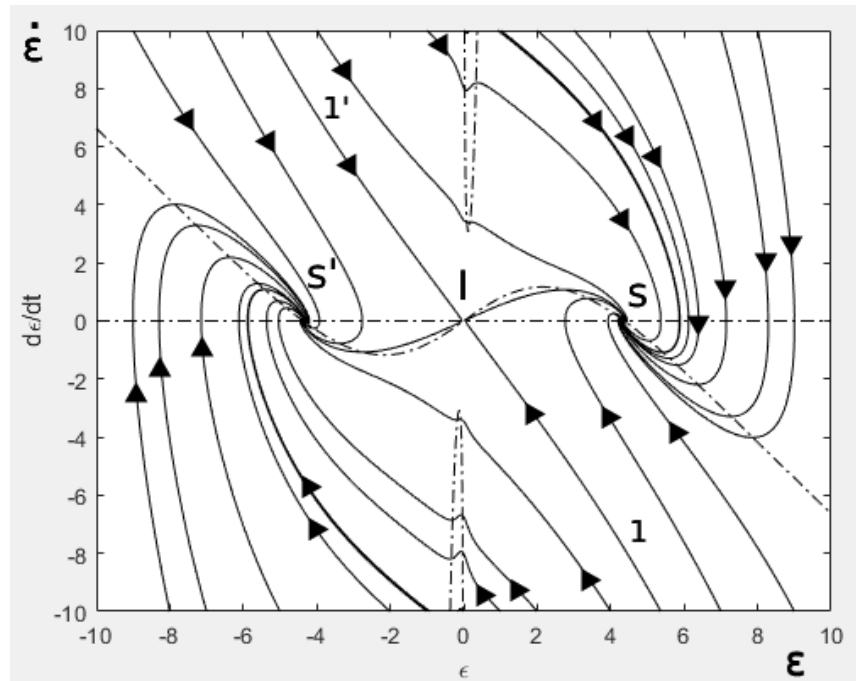


Рис. 2.1. Фазовий портрет при $\theta = 0,9$; $g = 0,5$; $\alpha = 0,2$; $\beta = 2$; $T_e = 20$ та $\tau = \tau_\sigma/\tau_\varepsilon = 10$ при $D = 0$.

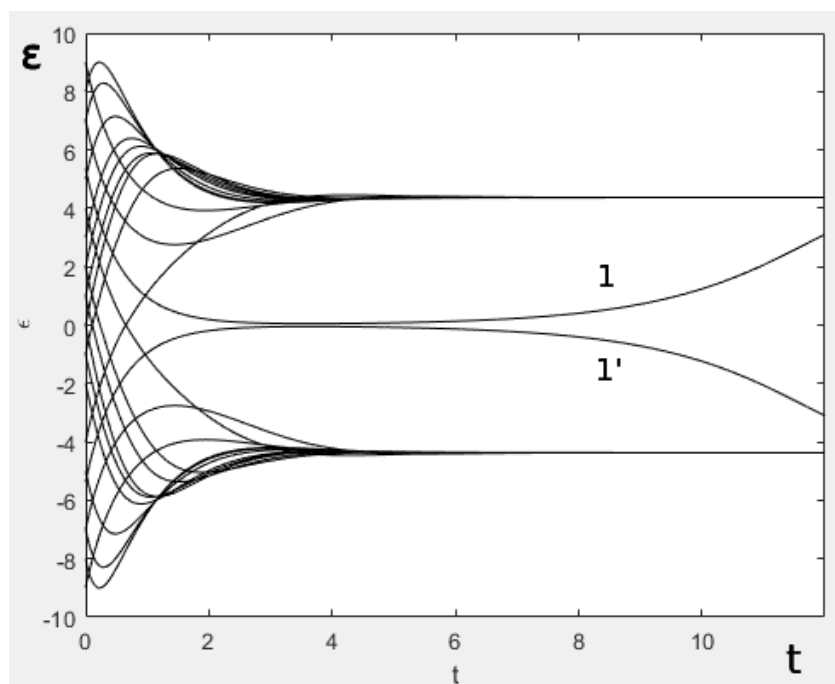


Рис. 2.2. Часовий ряд деформації ε при $D = 0$

На рис. 2.2 показано залежність деформації ε від часу. На ньому видно аперіодичний перехідний режим переривчастого ковзання при постійній швидкості зсуву ($\dot{\varepsilon} = const$).

Виконаємо моделювання для того ж самого випадку $\tau_T \ll \tau_\varepsilon, \tau_\sigma$ з інтенсивністю шуму $D \neq 0$, використовуючи формули (2.7) - (2.12).

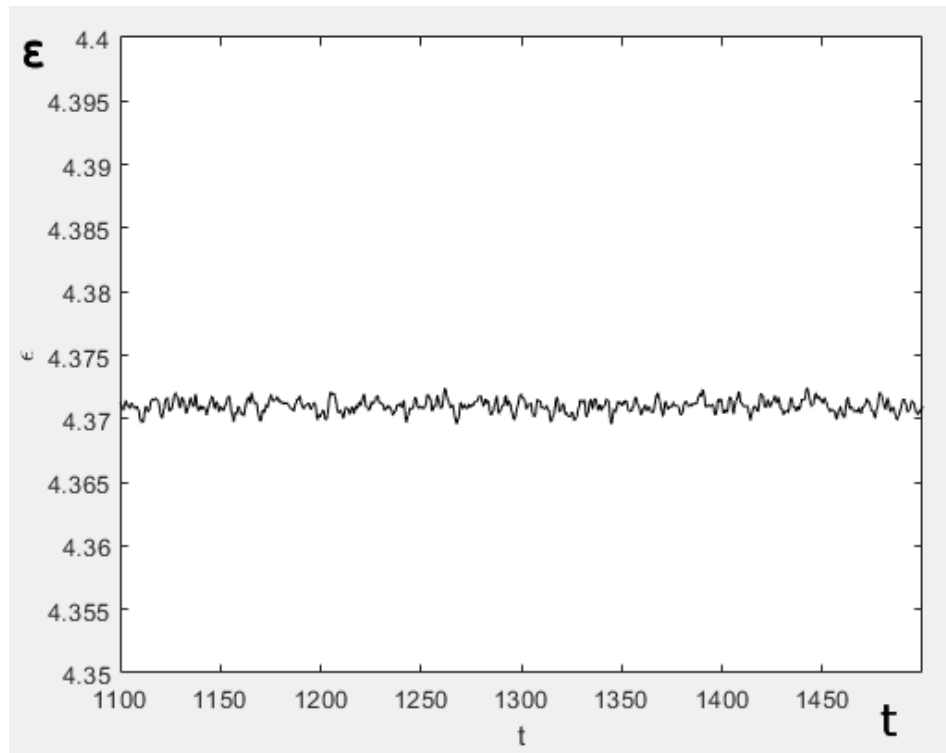


Рис. 2.3. Часовий ряд деформації ε при $D \neq 0$

На рис. 2.3 представлено теж саме рішення, що і в разі на рис. 2.2, але з малою інтенсивністю шуму, яка не дорівнює 0. Отже, при терті деформація коливається з невеликою амплітудою, що відповідає ковзному режиму при постійній швидкості. Розрахунки відображаються з $t = 1100$, тому що після цього встановлюється стаціонарний режим розтирання.

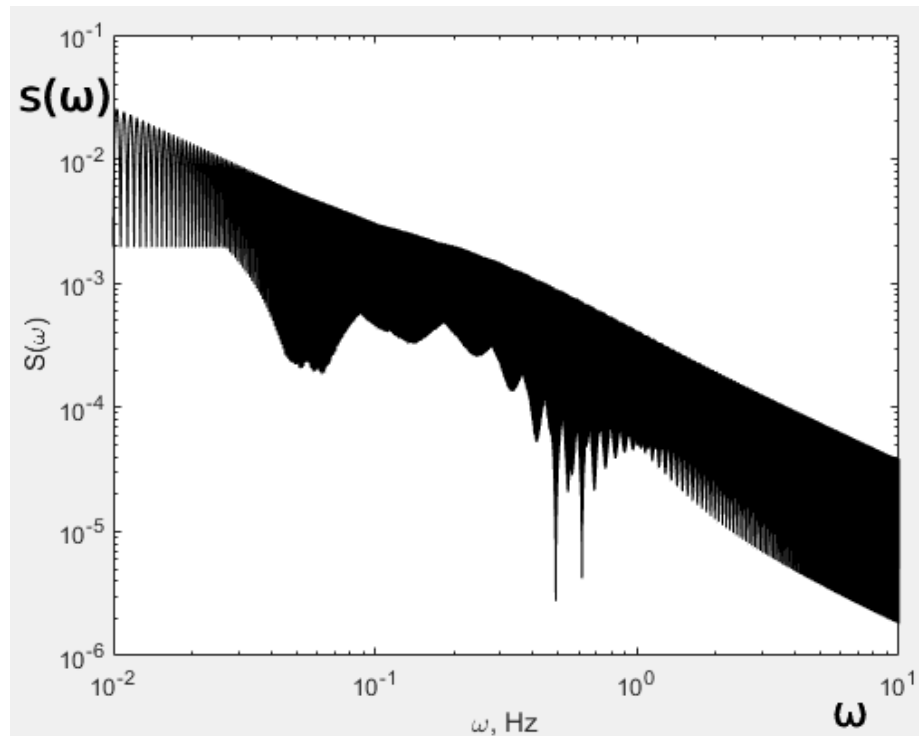


Рис. 2.4. Спектральна щільність сигналу $S(\omega)$ при інтенсивності шуму $D \neq 0$

Аналіз інтенсивності шуму $S(\omega)$ сигналу на рис. 2.4 показує, що піки відсутні. Отже, часова залежність деформації ε не характеризується періодичними складовими. Очевидно, що ця залежність в подвійному логарифмічному масштабі вказує на тенденцію до зниження зі збільшенням частоти коливань структурної компоненти на льоду. Це означає, що флуктуації мають високу енергію на низьких частотах ω . Таким чином, очевидно, що спектр (потужність) коливання еволюційних змінних обернено пропорційні частоті. Отже, існують різні часові кореляції в системі. Така поведінка протилежна властивостям білого шуму, оскільки в ньому спектральна щільність випадкового сигналу передбачає постійне значення $S(\omega) = const$. Зменшення спектра пов'язано з тим, що у вихідному рівнянні (2.7) нелінійні члени, що зображують взаємодії параметрів нерівноважного стану (деформації, напруги і температури), служать фільтром, що не пропускає високі частоти. В результаті відбувається перехід від білого шуму $\xi(t)$, властивого більшості фізичних систем, в кольорову з ненульовим часом кореляції.

2.3 Випадок $\tau_\sigma \ll \tau_\varepsilon, \tau_T$

Підставимо $\tau_\sigma \dot{\sigma} \approx 0$ в рівняння (2.2), після цього виразимо σ і підставимо його в рівняння (2.3) та прийдемо до двопараметричної системи (2.1) і (2.3).

Тоді два вихідних диференціальних рівнянь першого порядку відносно деформації ε та температури T можна звести до рівняння другого порядку через ε . Для цього виразимо T з рівняння (2.2) та знайдемо похідну за часом. Підставляючи ці залежності $T(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ і $\dot{T}(\dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon})$ в рівняння (2.3), приходимо до шуканого рівняння. Якщо час вимірюється в τ_ε , то це рівняння можна записати у вигляді

$$\ddot{\varepsilon} + \left[\frac{(1+g\varepsilon^2)}{\tau} - \dot{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} + A \right) - A\varepsilon \right] \dot{\varepsilon} + B\varepsilon = \xi(t), \quad (2.13)$$

де час вимірюється в одиницях τ_ε і $\tau = \tau_T/\tau_\varepsilon$.

Виконаємо моделювання для випадку $\tau_\sigma \ll \tau_\varepsilon, \tau_T$ з інтенсивністю шуму при $D = 0$, використовуючи формули (2.8) - (2.13).

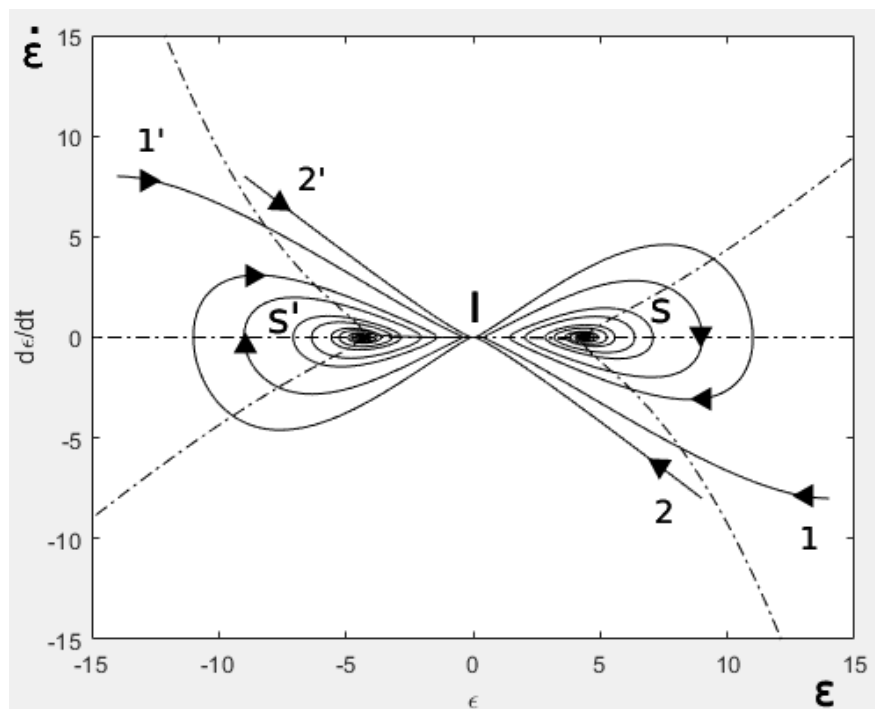


Рис. 2.5. Фазовий портрет при $\theta = 0,9$; $g = 0,5$; $\alpha = 0,2$; $\beta = 2$; $T_e = 20$ та $\tau = \tau_T/\tau_\varepsilon = 100$ при $D = 0$.

Очевидно, що реалізуються ті самі особливі точки, єдина різниця полягає в перетворенні точок вузла в стабільні фокуси і спостерігається більш

тривалий режим демпфування. Двозначний вираз $\dot{\varepsilon}(\varepsilon)$ для ізоклін отриманий як розв'язок квадратного рівняння.

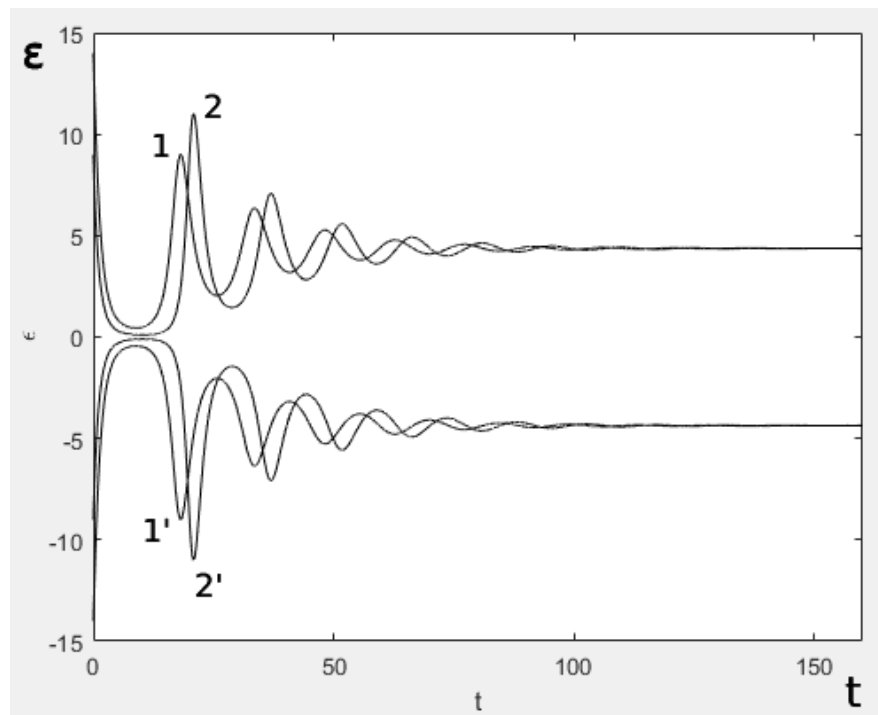


Рис. 2.6. Часовий ряд деформації ε при $D = 0$.

Залежності деформації ε від часу на рис. 2.6 мають довгі ділянки на якому $\varepsilon \approx 0$. Пояснюється таке явище повільним рухом поверхонь тертя. Це означає, що у фазовому портреті еволюція системи відбувається поблизу походження ($\varepsilon, \dot{\varepsilon} \approx 0$) з низькою швидкістю зміни деформації. Однак, відмінне від нуля значення деформації з'являється завжди при початку ковзання. Переміщення в двох напрямках не спостерігається через більший максимум ефективного потенціалу на початку координат.

На рис. 2.7 представлено теж саме рішення, що і в разі на рис. 2.6, але з малою інтенсивністю шуму, яка не дорівнює 0. Спостерігається періодичність зміни деформації з часом. Для перевірки видимої періодичності цієї залежності необхідний аналіз Фур'є.

Видно, що при $\omega \approx 0,08$ реалізується максимум наявності періодичної складової в ε . Отже, деформація періодично змінюється відповідно до рис. 2.7. Така поведінка відповідає коливальному переходу між кристалічним і

попередньо розплавленим льодом, що призводить до переривчастого режиму ковзання.

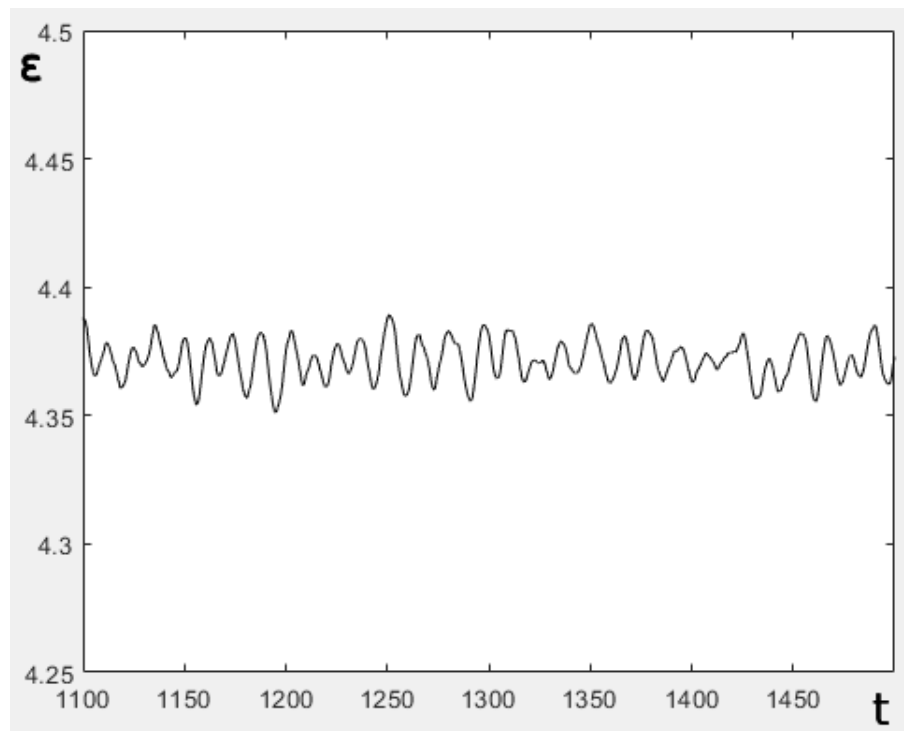


Рис. 2.7. Часовий ряд деформації ϵ при $D \neq 0$

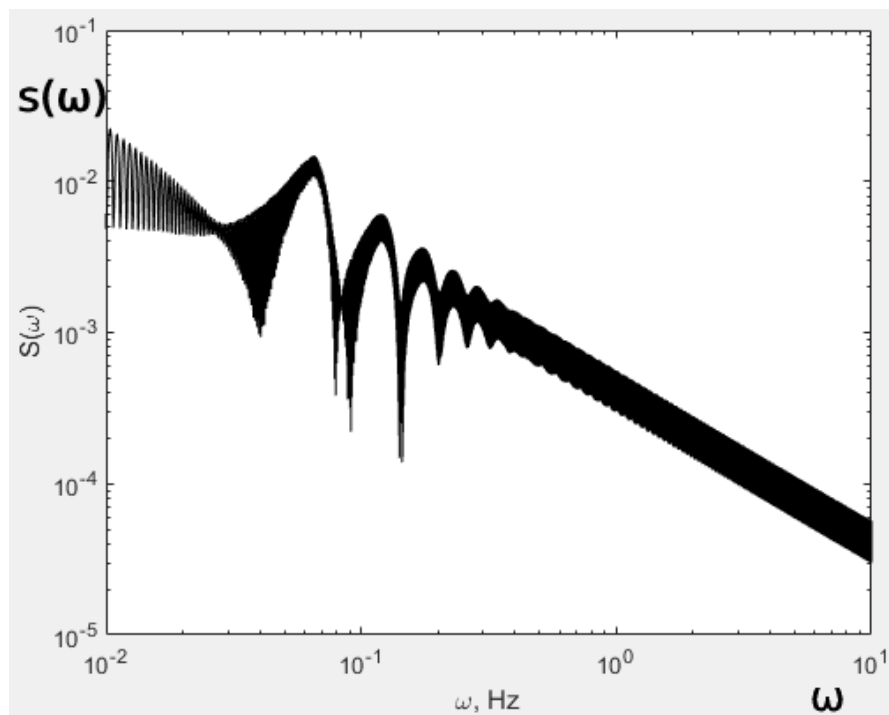


Рис. 2.8. Спектральна щільність сигналу $S(\omega)$ при інтенсивності шуму $D \neq 0$

Класифікація різних станів льоду заснована на властивостях. Коли деформація зсуву $\varepsilon = 0$, то лід не розтанув. А коли $\varepsilon \neq 0$, то відповідає його розм'якшенню при підйомі температури термостата при $T_e > T_{c0}$ [24, 25, 26]. Розтлумачимо це твердження докладніше. Припустимо, що деформації спочатку малі, що відповідають кристалічному льоду, як і раніше. Після цього починаючи переміщати поверхні, ми збільшуємо значення ε відповідно до будь-якого зростаючого перерізу на залежності, зображеної на рис. 2.7. При перевищенні деформаціями критичного значення відбувається розм'якшення, потім еластичний компонент ε_{el} розслабляється, і загальні навантаження також зменшуються відповідно до спадної ділянки кривої. Через розслаблення напруження досягаються занадто низькі значення. У цьому стані лід перетворюється на кристал, і процес відтворюється. Таким чином, попереднє плавлення відбувається при великих деформаціях, подібних до зазначених вище. Варто зазначити, що сценарій, наведений у цьому підрозділі, відрізняється від того, що тлумачилося в попередньому підрозділі. Тут періодичні перетворення спостерігаються у зв'язку між кристалічною та розм'якшеною формами льоду, а стохастичні варіації деформацій в них представляють флуктуації які не призводять до попереднього плавлення/затвердіння. Швидше за все, що ε на рис. 2.7 відповідає експериментам з прісноводним зернистим льодом і стовпчастим соляним льодом [33], які мають неупорядковану структуру зернистості і не характеризуються строго періодичними силовими рядами тертя. Отже, шуми закладаються на коливання та амплітуди і переходи прилипання до ковзання зараз непостійні. Крім того, коливання може призвести до нестабільності фокусів, тобто до постійного зростання амплітуди коливань деформації, що нагадує резонанс.

ВИСНОВКИ

У звіті переддипломної практики була розглянута і промодельована в середовищі Matlab нелінійна математична модель (2.1) - (2.3) з урахуванням шуму, яка дозволяє представити основні особливості періодичного режиму розм'якшення поверхні льоду при терті.

1 Наведений аналіз показує, що за відсутності шуму $D = 0$ в разі $\tau_T \ll \tau_\varepsilon, \tau_\sigma$ через невеликий проміжок часу система виходить в стаціонарний стан (розм'якшений лід).

2 При інтенсивності шуму $D \neq 0$ періодичний режим являє собою незначні коливання біля усталеного значення деформації, імовірно, через швидкі термічно активовані процеси.

3 Коли співвідношення між часами релаксації відповідають $\tau_\sigma \ll \tau_\varepsilon, \tau_T$ при $D = 0$, то система зазнає більше тривалі затухаючі коливання, тобто точка вузол перетворюється на фокус.

4 При інтенсивності шуму $D \neq 0$ періодичний режим являє собою більш виражені за амплітудою коливання біля стаціонарного значення деформації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Evans D.C.B. The kinetic friction of ice / D. C. B. Evans, J. F. Nye, K. J. Cheeseman // Proc. R. Soc. London, 1976. – Ser. A 347. – P.493–504.
2. Bowden F.P. The Friction and Lubrication of Solids / F.P. Bowden, D. Tabor. – Oxford University Press, New York, 2001. – 3rd ed. – 246 p.
3. Ice friction, wear features and their dependence on sliding velocity and temperature / B. A. Marmo, Brett & Blackford, Jane & Jeffree, Chris // Journal of Glaciology, 2005. – 51. – P.391–398.
4. Bowden F.P. Friction on snow and ice / F.P. Bowden // Proc. R. Soc. London, 1953. – Ser. A 217. – P.462–478.
5. Bhushan B. Introduction to Tribology / B. Bhushan. – Wiley, New York, 2002. – 149 p.
6. Persson B.N.J. Sliding Friction Physical Principles and Applications / B.N.J. Persson. – Springer-Verlag, Berlin, 2000. – 2nd ed. – 243 p.
7. Kozlov I.I. Experimental study of high-speed friction on ice / I.I. Kozlov, A.A. Shugai // Fluid Dyn., 1991. – 26. – P.145–147.
8. Colbeck J. A review of the metamorphism and classification of seasonal snow cover crystals / S. C. Colbeck, J. Glaciol // Fluid Dyn., 1988. – 34. – P.78–88.
9. Fowler A.J. Contact melting during sliding on ice / A. J. Fowler and A. Bejan, J. Int // *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1993. – 36. – P.1171–1179.
10. Bowden F.P. The mechanism of sliding on ice and snow / F. P. Bowden and T. P. Hughes // Proc. R. Soc. London, 1939. – Ser. A 172. – P.280–297.
11. Morphology of ice wear from rubber–ice friction tests and its dependence on temperature and sliding velocity / D. D. Higgins, B. A. Marmo, C. E. Jeffree, V. Koutsos, and J. R. Blackford // *Wear*, 1989. – 265. – P.634–644.
12. Roberts A.D. Interface study of rubber-ice friction /A. D Roberts and J. C. Richardson // *Wear*, 1981. – 67. – P.55–63.
13. Snow and ice friction // K. Itagaki, G. E. Lemieux, and N. P. Huber // *J. Phys.* (Paris), 1987. – 48. – P.297–308.

14. Liang H. Experimental investigation of friction on low-temperature ice / H. Liang, J. M. Martin, T. L. Mogne // *Acta Mater*, 2003. – 51. P.2639–2649.
15. Bowden F.P. Introduction to the discussion: the mechanism of friction / F. P. Bowden // *Proc. R. Soc. London*, 1952. – Ser. A 212. – P.440–457.
16. Montagnat M. On friction and surface cracking during sliding of ice on ice / M. Montagnat, E. M. Schulson, J. Glaciol // *Journal of Glaciology*, 2003. – 49(166). – P.391–396.
17. Oksanen P. The mechanism of friction on ice / P. Oksanen, J. Keinonen // *Wear*, 1982. – 78. – P.315–324.
18. Derjaguin B.V. Mechanical properties of the boundary lubrication layer / B. V. Derjaguin // *Wear*, 1988. – 128. – P.19–31.
19. Calabrese S.J. Effects of temperature on sliding wear process under contaminated lubricant test conditions / S. J. Calabrese // *Lubr. Eng.*, 1980. – 36. – P.283–299.
20. Akkok M. Parameters Affecting the Kinetic Friction of Ice / M. Akkok, S. J. Calabrese, C. M. McC. Ettles // *ASME J. Tribol*, 1987. – 109. – P.552–565.
21. Sliding Friction of Polyethylene on Snow and Ice / L. Bäurle, D. Szabo, M. Fauve, H. Rhyner, N. D. Spencer // *Tribol. Lett.*, 2006. – 24. – P.77–86.
22. Sliding friction of polyethylene on ice: tribometer measurements / L. Bäurle, U. Kaempfer, D. Szabo, N. D. Spencer // *Cold Regions Sci. Technol*, 2007. – 47. – P.276–289.
23. Frictional heat generated by sweeping in curling and its effect on ice friction / B. A. Marmo, I. S. Farrow, M. P. Buckingham, J. R. Blackford // *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 2006. – Part L 220. – P.189–199.
24. Khomenko A. Noise effect on ice surface softening during friction / A. Khomenko, M. Khomenko, B.N.J. Persson // *Tribol. Lett.*, 2017. – 65 (2). – P.71–87.
25. Khomenko A. Self-similar mode of ice surface softening during friction / A. Khomenko // *Tribol. Lett.*, 2018. – 66 (3). – P.82–94.

26. Khomenko A.V. Nonlinear model of ice surface softening during friction / A.V. Khomenko, K.P. Khomenko, V.V. Falko // *Condens. Matter Phys.*, 2016. – 19 (3). – P.356–387.
27. Persson B.N.J. Ice friction: Role of non-uniform frictional heating and ice premelting / B.N.J. Persson // *J. Chem. Phys.*, 2015. – 143 (22). – P.983–998.
28. Rubber friction on ice: Experiments and modeling / B. Lahayne, R.Pichler, J.Reihsner, J. Eberhardsteiner // *Tribol. Lett.*, 2016. – 62 (2) – P.1–19.
29. Klapproth C. An advanced viscous model for rubber-ice-friction / C. Klapproth, T. Kessel, K. Wiese // *Tribol. Int.*, 2016. – 99. – P.169–181.
30. Olemskoi A.I. Three-parameter kinetics of a phase transition / A.I. Olemskoi, A.V. Khomenko // *J. Exp. Theor. Phys.*, 1996. – 83 (6). – P.1180–1192.
31. Khomenko A.V. A stochastic model of stick–slip boundary friction with account for the deformation effect of the shear modulus of the lubricant /A.V. Khomenko, I.A. Lyashenko // *Wear*, 2010. – 31 (4) – P.308–316.
32. Khomenko A.V. Periodic intermittent regime of a boundary flow /A.V. Khomenko, Y.A. Lyashenko // *Tech. Phys.*, 2010. – 55 (1). – P.26–32.
33. Kennedy F.E. The friction of ice on ice at low sliding velocities / F.E. Kennedy, E.M. Schulson, D.E. Jones // *Phil. Mag. A*, 2000. – 80 (5). – P.1093–1110.

ДОДАТОК А

Програмна реалізація математичної моделі при $D=0$

```

clear all;
z = 0.9;
g = 0.5;
a = 0.2;
b = 2;
Te = 20;
T = 10;
D = 0;
%D = 1*(10^(-6));
dt = 0.01;
tmax = 1500;

n(1) = -8;
n(2) = -7;
n(3) = -5;
n(4) = -2;
n(5) = -1;
n(6) = 0;

n(7) = 1;
n(8) = 2;
n(9) = 4;
n(10) = 5.365;
n(11) = 7;
n(12) = 9;

for j = 1:12
y1 = -10;
t = 0;
i = 0;
eps1 = n(j);
while t < tmax
i = i+1;
eps2 = eps1+y1*dt;
A = (b*((eps1/a)^(b-1))*(a^(-1))*(1-
z))/((1+(eps1/a)^b)*(1+z*(eps1/a)^b));
B = (1-
g*(((1+(eps1/a)^b)/(z*(eps1/a)^b+1))*Te-
eps1*eps1-
(((1+(eps1/a)^b)/(z*(eps1/a)^b+1))))/T;
f = -B*eps1-
y1*(1+g*eps1*eps1)/T+(y1+eps1)*A*y1-
y1;
r1 = rand(1);
r2 = rand(1);
W = sqrt(2*D)*sqrt(-
2*log(r1))*cos(2*pi*r2);
y2 = y1+f*dt+sqrt(dt)*W;
S(i,j) = eps1;
Y(i,j) = y1;
TT(i) = t;
eps1 = eps2;
y1 = y2;
t = t+dt;
end;
end;

n(13) = -9;
n(14) = -7;
n(15) = -5.365;
n(16) = -4;
n(17) = -1;
n(18) = 0;

```

```

n(19) = 1;
n(20) = 2;
n(21) = 3;
n(22) = 5;
n(23) = 7;
n(24) = 8;

for j = 13:24
y1 = 10;
t = 0;
i = 0;
eps1 = n(j);

while t < tmax
    i = i+1;
    eps2 = eps1+y1*dt;
    A = (b*((eps1/a)^(b-1))*(a^(-1))*(1-
z))/((1+(eps1/a)^b)*(1+z*(eps1/a)^b));
    B = (1-
g*(((1+(eps1/a)^b)/(z*(eps1/a)^b+1))*Te-
eps1*eps1-
((1+(eps1/a)^b)/(z*(eps1/a)^b+1))))/T;
    f = -B*eps1-
y1*(1+g*eps1*eps1)/T+(y1+eps1)*A*y1-
y1;
    r1 = rand(1);
    r2 = rand(1);
    W = sqrt(2*D)*sqrt(-
2*log(r1))*cos(2*pi*r2);
    y2 = y1+f*dt+sqrt(dt)*W;
    S(i,j) = eps1;
    Y(i,j) = y1;
    TT(i) = t;
    eps1 = eps2;

```

```

y1 = y2;
t = t+dt;
end;
end;

```

%Рис. 1.1 Фазовый портрет

```

for j = 1:24
    xlabel('\epsilon')
    ylabel('d\epsilon/dt')
    plot(S(:,j), Y(:,j),'Color','black')
    axis([-10 10 -10 10])
    hold on
end

hold on
x = -10:0.01:10;
A = (b*((x./a)^(b-1))*(a^(-1))*(1-
z))/((1+(x./a)^b).*(1+z*(x./a)^b));
B = (1-
g*(((1+(x./a)^b)/(z*(x./a)^b+1))*Te-x.*x-
((1+(x./a)^b)/(z*(x./a)^b+1))))/T;
D = (x.*A-1-((1+g*x.^2)/T)).^2 +
4*A.*x.*B;
y_1 = -(x.*A-1-(1+g*x.^2)/T) +
sqrt(D)/(2*A);
plot(x,y_1,'-','Color','black');
hold on

x1 = -10:0.01:10;
A = (b*((x1./a)^(b-1))*(a^(-1))*(1-
z))/((1+(x1./a)^b).*(1+z*(x1./a)^b));
B = (1-
g*(((1+(x1./a)^b)/(z*(x1./a)^b+1))*Te-

```

```

x1.*x1-
((1+(x1./a).^b)/(z*(x1./a).^b+1)))./T;
D = (x1.*A-1-((1+g*x1.^2)./T)).^2 +
4*A.*x1.*B;
y_2 = -(x1.*A-1-(1+g*x1.^2)./T) -
sqrt(D)./(2*A);
plot(x1,y_2,'-','Color','black');
hold on

x2 = -10:0.1:10;
y_3 = 0.*x2;
plot(x2,y_3,'-','Color','black');
hold off

```

%Рис. 1.2 Часова залежність напруження
без шуму

```

figure(2)
for j = 1:24
    xlabel('t')
    ylabel('\epsilon')
    plot(TT(1:1200),
S(1:1200,j),'Color','black');
    hold on
    axis([0 TT(1200) -10 10])
end

```


ДОДАТОК Б

Програмна реалізація математичної моделі при $D \neq 0$

```

clear all;
z = 0.9;
g = 0.5;
a = 0.2;
b = 2;
Te = 20;
T = 10;
%D = 0;
D = 1*(10^(-6));
dt = 0.01;
tmax = 1500;

n(1) = -8;
n(2) = -7;
n(3) = -5;
n(4) = -2;
n(5) = -1;
n(6) = 0;

n(7) = 1;
n(8) = 2;
n(9) = 4;
n(10) = 5.365;
n(11) = 7;
n(12) = 9;

for j = 1:12
y1 = -10;
t = 0;
i = 0;
eps1 = n(j);

while t < tmax
i = i+1;
eps2 = eps1+y1*dt;
A = (b*((eps1/a)^(b-1))*(a^(-1))*(1-
z))/((1+(eps1/a)^b)*(1+z*(eps1/a)^b));
B = (1-
g*(((1+(eps1/a)^b)/(z*(eps1/a)^b+1))*Te-
eps1*eps1-
((1+(eps1/a)^b)/(z*(eps1/a)^b+1))))/T;
f = -B*eps1-
y1*(1+g*eps1*eps1)/T+(y1+eps1)*A*y1-
y1;
r1 = rand(1);
r2 = rand(1);
W = sqrt(2*D)*sqrt(-
2*log(r1))*cos(2*pi*r2);
y2 = y1+f*dt+sqrt(dt)*W;
S(i,j) = eps1;
Y(i,j) = y1;
TT(i) = t;
eps1 = eps2;
y1 = y2;
t = t+dt;
end;
end;

n(13) = -9;
n(14) = -7;
n(15) = -5.365;
n(16) = -4;
n(17) = -1;
n(18) = 0;

n(19) = 1;

```

```

n(20) = 2;
n(21) = 3;
n(22) = 5;
n(23) = 7;
n(24) = 8;

for j = 13:24
y1 = 10;
t = 0;
i = 0;
eps1 = n(j);

while t < tmax
    i = i+1;
    eps2 = eps1+y1*dt;
    A = (b*((eps1/a)^(b-1))*(a^(-1))*(1-
z))/((1+(eps1/a)^b)*(1+z*(eps1/a)^b));
    B = (1-
g*(((1+(eps1/a)^b)/(z*(eps1/a)^b+1))*Te-
eps1*eps1-
((1+(eps1/a)^b)/(z*(eps1/a)^b+1))))/T;
    f = -B*eps1-
y1*(1+g*eps1*eps1)/T+(y1+eps1)*A*y1-
y1;
    r1 = rand(1);
    r2 = rand(1);
    W = sqrt(2*D)*sqrt(-
2*log(r1))*cos(2*pi*r2);
    y2 = y1+f*dt+sqrt(dt)*W;
    S(i,j) = eps1;
    Y(i,j) = y1;
    TT(i) = t;
    eps1 = eps2;
    y1 = y2;
    t = t+dt;

```

```

end;
end;

%Рис. 1.1 Фазовый портрет
for j = 1:24
    xlabel('\epsilon')
    ylabel('d\epsilon/dt')
    plot(S(:,j), Y(:,j),'Color','black')
    axis([-10 10 -10 10])
    hold on
end

hold on
x = -10:0.01:10;
A = (b*((x./a)^(b-1))*(a^(-1))*(1-
z))/((1+(x./a)^b)*(1+z*(x./a)^b));
B = (1-
g*(((1+(x./a)^b)/(z*(x./a)^b+1))*Te-x.*x-
((1+(x./a)^b)/(z*(x./a)^b+1))))/T;
D = (x.*A-1-((1+g*x.^2)/T)).^2 +
4*A.*x.*B;
y_1 = (-x.*A-1-(1+g*x.^2)/T) +
sqrt(D)/(2*A)
plot(x,y_1,'-','Color','black');
hold on

x1 = -10:0.01:10;
A = (b*((x1./a)^(b-1))*(a^(-1))*(1-
z))/((1+(x1./a)^b)*(1+z*(x1./a)^b));
B = (1-
g*(((1+(x1./a)^b)/(z*(x1./a)^b+1))*Te-
x1.*x1-
((1+(x1./a)^b)/(z*(x1./a)^b+1))))/T;

```

```
D = (x1.*A-1-((1+g*x1.^2)./T)).^2 +
4*A.*x1.*B;
```

```
y_2 = -(x1.*A-1-(1+g*x1.^2)./T) -
sqrt(D))./(2*A);
```

```
plot(x1,y_2,'-','Color','black');
```

```
hold on
```

```
x2 = -10:0.1:10;
```

```
y_3 = 0.*x2;
```

```
plot(x2,y_3,'-','Color','black');
```

```
hold off
```

%Рис 1.3 Часова залежність напруження при наявності шуму

```
figure(2)
```

```
for j = 15:16
```

```
xlabel('t')
```

```
ylabel('\epsilon')
```

```
plot(TT(1:150000), S(1:150000, j), 'Color',
'black');
```

```
hold on
```

```
axis([1 100 TT(150000) 4.25 4.5])
```

```
end
```

```
Fd = 1/dt; % Частота дискретизації (Гц)
```

```
An = 3 %3*A1; % Дисперсія шуму
```

```
FftL = 2^20 %1024; % Кількість ліній
```

```
Фур'є спектра
```

```
%j=1
```

```
for j = 1:5
```

```
% Спектральне представлення сигналу:
```

```
FftS_1 = abs(fft(S(1:150000,j),FftL)); %
```

```
Амплітуди перетворення Фур'є сигналу,
де (FftL)- розмірність вектора-результату
```

```
FftS_1 = 2*FftS_1./FftL; % Нормування
```

```
спектру по амплітуді
```

```
FftS_1(1) = FftS_1(1)./2; % Нормування
```

```
постійної складової в спектрі
```

```
% Побудова графіків:
```

```
F = 0:Fd/FftL:Fd/2-Fd/FftL; % Масив
```

```
частот обчислюваного спектра Фур'є
```

```
figure(3) % Створюємо нове вікно for
fft_series
```

```
%subplot(2,2,1); % Вибір області вікна
для побудови
```

```
Sp = FftS_1(1:length(F)); % спектр,
```

```
амплітуди гармонік та їх частота
```

```
plot(F,Sp,'black'); % Побудова спектра
```

```
Фур'є сигналу
```

```
%title('Спектр сигналу'); % Підпис
```

```
графіка
```

```
xlabel('\omega, Hz'); % Підпис осі x
```

```
графіка
```

```
ylabel('S(\omega)'); % Підпис осі y графіка
```

```
set(gca,'Xscale','log')
```

```
set(gca,'Yscale','log')
```

```
xlim([0.01 10])
```

```
hold on
```

```
end
```

ДОДАТОК В

Програмна реалізація математичної моделі при $D=0$

```

clear all;
z = 0.9;
g = 0.5;
a = 0.2;
b = 2;
Te = 20;
T = 100;
D = 0;
%D = 1*(10^(-6));
dt = 0.01;
tmax = 1500;

n(1) = 14;
n(2) = 9;

for j = 1:2
y1 = -8;
t = 0;
i = 0;
eps1 = n(j);

while t < tmax
i = i+1;
eps2 = eps1+y1*dt;
A = (b*((eps1/a)^(b-1))*(a^(-1))*(1-
z))/((1+(eps1/a)^b)*(1+z*(eps1/a)^b));
B = (1-
g*(((1+(eps1/a)^b)/(z*(eps1/a)^b+1))*Te-
eps1*eps1-
((1+(eps1/a)^b)/(z*(eps1/a)^b+1))))/T;

f = -
B*eps1+y1*(y1*(1/eps1+A)+A*eps1-
(1+g*eps1*eps1)/T);
r1 = rand(1);
r2 = rand(1);
W = sqrt(2*D)*sqrt(-
2*log(r1))*cos(2*pi*r2);
y2 = y1+f*dt+sqrt(dt)*W;
S(i,j) = eps1;
Y(i,j) = y1;
TT(i) = t;
eps1 = eps2;
y1 = y2;
t = t+dt;
end;
end;

n(3) = -14;
n(4) = -9;

for j = 3:4
y1 = 8;
t = 0;
i = 0;
eps1 = n(j);

while t < tmax
i = i+1;
eps2 = eps1+y1*dt;
A = (b*((eps1/a)^(b-1))*(a^(-1))*(1-
z))/((1+(eps1/a)^b)*(1+z*(eps1/a)^b));

```

```

B = (1-
g*(((1+(eps1/a)^b)/(z*(eps1/a)^b+1))*Te-
eps1*eps1-
((1+(eps1/a)^b)/(z*(eps1/a)^b+1))))/T;
f = -
B*eps1+y1*(y1*(1/eps1+A)+A*eps1-
(1+g*eps1*eps1)/T);
r1 = rand(1);
r2 = rand(1);
W = sqrt(2*D)*sqrt(-
2*log(r1))*cos(2*pi*r2);
y2 = y1+f*dt+sqrt(dt)*W;
S(i,j) = eps1;
Y(i,j) = y1;
TT(i) = t;
eps1 = eps2;
y1 = y2;
t = t+dt;
end;
end;

```

%Рис. 1.1 Фазовий портрет

```

for j = 1:4
xlabel('\epsilon')
ylabel('d\epsilon/dt')
plot(S(:,j), Y(:,j),'Color','black')
axis([-15 15 -15 15])
hold on
end

```

```

hold on
x = -20:0.01:20;
A = (b*((x./a)^(b-1))*(a^(-1))*(1-
z))/((1+(x./a)^b).*(1+z*(x./a)^b));

```

```

B = (1-
g*(((1+(x./a)^b)/(z*(x./a)^b+1))*Te-x.*x-
((1+(x./a)^b)/(z*(x./a)^b+1))))/T;
D = ((A.*x)-((1-g*(x.^2))/T)).^2 +
4*((1./x)+A).*x.*B;
y_1 = (-((A.*x)-((1-g*(x.^2))/T)) +
sqrt(D))./(2*((1./x)+A));
plot(x,y_1,'-','Color','black');
hold on
x1 = -20:0.01:20;
A = (b*((x1./a)^(b-1))*(a^(-1))*(1-
z))/((1+(x1./a)^b).*(1+z*(x1./a)^b));
B = (1-
g*(((1+(x1./a)^b)/(z*(x1./a)^b+1))*Te-
x1.*x1-
((1+(x1./a)^b)/(z*(x1./a)^b+1))))/T;
D = ((A.*x1)-((1-g*(x1.^2))/T)).^2 +
4*((1./x1)+A).*x1.*B;
y_2 = (-((A.*x1)-((1-g*(x1.^2))/T)) -
sqrt(D))./(2*((1./x1)+A));
plot(x1,y_2,'-','Color','black');
hold on

```

```

x2 = -20:0.1:20;
y_3 = 0.*x2;
plot(x2,y_3,'-','Color','black');
hold off

```

%Рис. 1.2 Часова залежність напруження без шуму

```

figure(2)
for j = 1:4

```

```
xlabel('t')  
ylabel('\epsilon')  
plot(TT(1:16000),  
S(1:16000,j),'Color','black');
```

```
hold on  
axis([0 TT(16000) -15 15])  
end
```

ДОДАТОК Г

Програмна реалізація математичної моделі при $D \neq 0$

```

clear all;
z = 0.9;
g = 0.5;
a = 0.2;
b = 2;
Te = 20;
T = 100;
%D = 0;
D = 1*(10^(-6));
dt = 0.01;
tmax = 1500;

n(1) = 14;
n(2) = 9;

for j = 1:2
y1 = -8;
t = 0;
i = 0;
eps1 = n(j);

while t < tmax
i = i+1;
eps2 = eps1+y1*dt;
A = (b*((eps1/a)^(b-1))*(a^(-1))*(1-
z))/((1+(eps1/a)^b)*(1+z*(eps1/a)^b));
B = (1-
g*(((1+(eps1/a)^b)/(z*(eps1/a)^b+1))*Te-
eps1*eps1-
((1+(eps1/a)^b)/(z*(eps1/a)^b+1))))/T;
f = -B*eps1+y1*(y1*(1/eps1+A)+A*eps1-
(1+g*eps1*eps1)/T);
r1 = rand(1);
r2 = rand(1);
W = sqrt(2*D)*sqrt(-
2*log(r1))*cos(2*pi*r2);
y2 = y1+f*dt+sqrt(dt)*W;
S(i,j) = eps1;
Y(i,j) = y1;
TT(i) = t;
eps1 = eps2;
y1 = y2;
t = t+dt;
end;
end;

n(3) = -14;
n(4) = -9;

for j = 3:4
y1 = 8;
t = 0;
i = 0;
eps1 = n(j);

while t < tmax
i = i+1;
eps2 = eps1+y1*dt;
A = (b*((eps1/a)^(b-1))*(a^(-1))*(1-
z))/((1+(eps1/a)^b)*(1+z*(eps1/a)^b));
B = (1-
g*(((1+(eps1/a)^b)/(z*(eps1/a)^b+1))*Te-
eps1*eps1-
((1+(eps1/a)^b)/(z*(eps1/a)^b+1))))/T;
f = -B*eps1+y1*(y1*(1/eps1+A)+A*eps1-
(1+g*eps1*eps1)/T);

```

```

r1 = rand(1);
r2 = rand(1);
W = sqrt(2*D)*sqrt(-
2*log(r1))*cos(2*pi*r2);
y2 = y1+f*dt+sqrt(dt)*W;
S(i,j) = eps1;
Y(i,j) = y1;
TT(i) = t;
eps1 = eps2;
y1 = y2;
t = t+dt;
end;
end;

```

%Рис. 1.1 Фазовий портрет

```

for j = 1:4
xlabel('\epsilon')
ylabel('d\epsilon/dt')
plot(S(:,j), Y(:,j),'Color','black')
axis([-15 15 -15 15])
hold on
end

```

hold on

```

x = -20:0.01:20;
A = (b*((x./a).^(b-1))*(a^(-1))*(1-
z))./((1+(x./a).^b).*(1+z*(x./a).^b));
B = (1-g*(((1+(x./a).^b)./(z*(x./a).^b+1))*Te-
x.*x-((1+(x./a).^b)./(z*(x./a).^b+1))))./T;
D = ((A.*x)-((1-g*(x.^2))/T)).^2 +
4*((1./x)+A).*x.*B;
y_1 = (-((A.*x)-((1-g*(x.^2))/T)) +
sqrt(D))./(2*((1./x)+A));
plot(x,y_1,'-','Color','black');

```

hold on

```

x1 = -20:0.01:20;
A = (b*((x1./a).^(b-1))*(a^(-1))*(1-
z))./((1+(x1./a).^b).*(1+z*(x1./a).^b));
B = (1-
g*(((1+(x1./a).^b)./(z*(x1./a).^b+1))*Te-
x1.*x1-((1+(x1./a).^b)./(z*(x1./a).^b+1))))./T;
D = ((A.*x1)-((1-g*(x1.^2))/T)).^2 +
4*((1./x1)+A).*x1.*B;
y_2 = (-((A.*x1)-((1-g*(x1.^2))/T)) -
sqrt(D))./(2*((1./x1)+A));
plot(x1,y_2,'-','Color','black');
hold on

```

x2 = -20:0.1:20;

```

y_3 = 0.*x2;
plot(x2,y_3,'-','Color','black');
hold off

```

%Рис 1.3 Часова залежність напруження при наявності шуму

figure(2)

```

for j = 1:1
xlabel('t')
ylabel('\epsilon')
plot(TT(1:150000), S(1:150000, j), 'Color',
'black');
hold on
axis([1 100 TT(150000) 4.25 4.5])
end

```

Fd = 1/dt; % Частота дискретизації (Гц)


```

An = 3 %3*A1; % Дисперсія шуму
FftL = 2^20 %1024; % Кількість ліній Фур'є
спектра
%j=1
for j = 1:1
% Спектральне представлення сигналу:
FftS_1 = abs(fft(S(1:150000,j),FftL)); %
Амплітуди перетворення Фур'є сигналу, де
(FftL)- розмірність вектора-результату
FftS_1 = 2*FftS_1./FftL; % Нормування
спектру по амплітуді
FftS_1(1) = FftS_1(1)./2; % Нормування
постійної складової в спектрі

% Побудова графіків:
F = 0:Fd/FftL:Fd/2-Fd/FftL; % Масив частот
обчислюваного спектра Фур'є

figure(3) % Створюємо нове вікно for
fft_series
%subplot(2,2,1); % Вибір області вікна для
побудови
Sp = FftS_1(1:length(F)); % спектр,
амплітуди гармонік та їх частота
plot(F,Sp,'black'); % Побудова спектра
Фур'є сигналу
%title('Спектр сигналу'); % Підпис графіка
xlabel('\omega, Hz'); % Підпис осі x
графіка
ylabel('S(\omega)'); % Підпис осі y графіка
set(gca,'Xscale','log')
set(gca,'Yscale','log')

xlim([0.01 10])
hold on
end

```