

ОПР МАТЕРІАЛІВ

Навчальний посібник

У двох частинах
Частина 1

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

ОПР МАТЕРІАЛІВ

Навчальний посібник

У двох частинах
Частина 1

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету

Суми
Сумський державний університет
2022

УДК 620.17(075.8)
О 61

Авторський колектив:

Д. О. Жигилій, кандидат технічних наук, доцент;
С. М. Верещака, доктор технічних наук, професор;
С. С. Некрасов, кандидат технічних наук, доцент;
А. Ю. Довгополов, кандидат технічних наук

Рецензенти:

В. Б. Тарельник – доктор техн. наук, професор, завідувач кафедри технічного сервісу Сумського національного аграрного університету;
І. В. Павленко – доктор техн. наук, професор кафедри комп'ютерної механіки ім. В. Марцинковського Сумського державного університету

*Рекомендовано до видання
вченою радою Сумського державного університету
як навчальний посібник
(протокол № 13 від 23 червня 2022 р.)*

Опір матеріалів : навчальний посібник : у 2 ч. /
О 61 Д. О. Жигилій., С. М. Верещака, С. С. Некрасов,
А. Ю. Довгополов. – Суми : Сумський державний університет,
2022. – Ч. 1. – 159 с.

У навчальному посібнику висвітлено основні питання дисципліни «Опір матеріалів». Зокрема, розглянуто розрахункові моделі конструктивних елементів сучасної техніки, наведено методи розрахунку стрижневих конструкцій на міцність, жорсткість і стійкість упродовж дії статичного навантаження, описано вплив динамічних навантажень.

Видання рекомендовано студентам технічних ЗВО III–IV рівнів акредитації.

УДК 620.17(075.8)

© Сумський державний університет, 2022
© Жигилій Д. О, Верещака С. М.,
Некрасов С. С., Довгополов А. Ю., 2022

ЗМІСТ

	С.
РОЗДІЛ 1 ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ	
ДИСЦИПЛІНИ «ОПІР МАТЕРІАЛІВ».....	8
1.1 Мета й завдання дисципліни, її структура та методичні рекомендації до вивчення. Об'єкти вивчення.....	8
1.2 Розрахункові схеми (моделі) об'єктів дослідження.....	11
1.3 Види деформації тіла. Деформований стан матеріалу.....	12
1.4 Основні гіпотези під час інженерних розрахунків.....	18
Запитання для самостійного контролю.....	19
РОЗДІЛ 2 ОСНОВНІ ОБ'ЄКТИ ДОСЛІДЖЕННЯ	
ДИСЦИПЛІНИ «ОПІР МАТЕРІАЛІВ».....	20
2.1 Зовнішні сили та їх класифікація.....	20
2.2 Внутрішні зусилля в брусі. Метод перерізів.....	22
2.3 Напруження в перерізах бруса.....	24
2.4 Зв'язок між внутрішніми зусиллями й напруженнями.....	25
2.5 Принцип Сен-Венана.....	28
2.6 Принцип незалежності дії сил, або принцип суперпозиції.....	28
Запитання для самостійного контролю.....	29
РОЗДІЛ 3 РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСКАННЯ	
ПРЯМОГО СТРИЖНЯ	30
3.1 Гіпотеза плоских перерізів під час розтягання (стискання). Лінійний напружено-деформований стан стрижня.....	30

3.2 Деформації стрижня під час розтягання (стискання).....	33
3.3 Закон Гука. Модуль пружності першого роду. Коефіцієнт Пуассона.....	35
3.4 Розподіл поздовжніх сил і нормальних напружень. Побудова епюр.....	37
3.5 Визначення переміщень. Жорсткість під час розтягання й стискання.....	40
Запитання для самостійного контролю.....	42

РОЗДІЛ 4 МЕХАНІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ МАТЕРІАЛІВ ПІД ЧАС РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСКАННЯ.....	43
4.1 Випробування матеріалів на розтягання. Зразки для випробування. Діаграми розтягання. Визначення механічних характеристик під час розтягання.....	43
4.2 Випробування на стискання. Діаграма стискання. Механічні характеристики матеріалу під час стискання.....	52
4.3 Порівняння результатів випробувань на розтягання й стискання. Недосконалість структури кристалів матеріалу. Механізм пластичної деформації. Дислокація. Смуги зсування. Ефект Баушингера. Поняття про допустимі напруження.....	54
4.4 Вплив температури та швидкості навантаження на механічні властивості матеріалу.....	57
4.5 Повзкість. Тривала міцність. Границя тривалої міцності. Концентрація напружень. Вплив концентрації напружень за ударних і повторно змінних навантажень.....	58
Запитання для самостійного контролю.....	59

РОЗДІЛ 5 РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ ПІД ЧАС РОЗТЯГАННЯ Й СТИСКАННЯ СТРИЖНЯ.....	61
5.1 Напруження в нахилених перерізах стрижня...	61
5.2 Розрахунок центрально розтягнутого (стиснутого) стрижня на міцність і жорсткість.....	63
5.3 Поняття про раціональні конструкції. Принцип рівномірності під час проєктування конструкції. Урахування власної ваги.....	64
5.4 Статично невизначувані системи. Початкові й температурні напруження.....	67
5.5 Потенціальна енергія деформації стрижня під час розтягання та стискання.....	74
Запитання для самостійного контролю.....	76
 РОЗДІЛ 6 ЗСУВАННЯ. КРУЧЕННЯ.....	77
6.1 Напруження й деформація під час зсування. Закон Гука під час зсування.....	77
6.2 Практичні розрахунки на зрізування та згинання. Умови міцності.....	82
6.3 Вільне кручення стрижня круглого поперечного перерізу (вала). Гіпотеза плоских перерізів. Епюри внутрішніх крутильних моментів.....	84
6.4 Закон парності дотичних напружень. Відносний кут закручування.....	86
6.5 Епюри дотичних напружень. Умови міцності й жорсткості стрижня під час кручення. Кручення стрижня некруглого поперечного перерізу.....	91
6.6 Потенціальна енергія деформації під час кручення.....	94
6.7 Статично невизначувані задачі під час кручення.....	95

6.8 Основи розрахунку гвинтових циліндричних пружин із малим кроком.....	97
Запитання для самостійного контролю.....	100

РОЗДІЛ 7 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ.....	102
7.1 Види геометричних характеристик плоских перерізів.....	102
7.2 Залежності між моментами площ під час перетворення координат.....	106
7.3 Головні осі й моменти інерції.....	111
7.4 Графічні побудови геометричних характеристик перерізів.....	113
Запитання для самостійного контролю.....	115

РОЗДІЛ 8 ПЛОСКЕ ЗГИНАННЯ БАЛКИ (ЗАДАЧА МІЦНОСТІ).....	117
8.1 Основні поняття. Будова опор балок. Розрахункова схема.....	117
8.2 Внутрішні зусилля в поперечних перерізах. Правило знаків. Епюри внутрішніх зусиль.....	120
8.3 Поняття про чисте згинання. Основні гіпотези.....	124
8.4 Нормальні напруження під час згинання.....	126
8.5 Дотичні напруження під час згинання. Формула Журавського.....	129
8.6 Розрахунок балки на міцність під час згинання.....	136
Запитання для самостійного контролю.....	138

РОЗДІЛ 9 РОЗРАХУНОК БАЛКИ НА ЖОРСТКІСТЬ ПІД ЧАС ЗГИНАННЯ.....	140
9.1 Основні поняття. Переміщення балки під час згинання.....	140
9.2 Диференціальне рівняння зігнутої осі балки....	142

9.3 Рівняння пружної лінії.....	145
9.4 Приклади визначення переміщень балки під час згинання.....	146
9.5 Метод початкових параметрів (МПП).	153
Універсальне рівняння пружної лінії.....	157
Запитання для самостійного контролю.....	157
Список рекомендованої літератури	158

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ

ДИСЦИПЛІНИ «ОПІР МАТЕРІАЛІВ»

1.1 Мета й завдання дисципліни, її структура та методичні рекомендації до вивчення. Об'єкти вивчення

Мета дисципліни «Опір матеріалів» полягає в тому, щоб навчити майбутнього інженера правильно вибирати конструкційний матеріал, форми й розміри деталей і конструкцій, граничні навантаження, забезпечити надійну роботу машин, обладнання тощо.

Основне завдання – набуття здобувачами освіти навичок складання розрахункових схем, проведення розрахунків на міцність, жорсткість, стійкість деталей машин і конструкцій споруд.

Зокрема, студенти повинні:

- а) знати, як підібрати конструкційний матеріал, економічно доцільні розміри й граничні навантаження;
- б) уміти аналізувати різні варіанти об'єктів розрахунку, створювати прості моделі досліджуваних об'єктів, ураховуючи накопичений досвід та результати експериментальних робіт.

Створення сучасних машин і конструкції – творчий процес, що потребує глибоких знань, практичних навичок та інтуїції. Саме вони дають змогу інженерові-проектувальнику з використанням технічних засобів ухвалювати правильні рішення. Конструкція буде вдалою, якщо він знайде компромісні варіанти, що задовольнять суперечливі вимоги, такі як міцність, легкість, надійність і довговічність. Крім того, сконструйовані машини повинні бути технологічними, а експлуатаційні витрати в процесі їх роботи – мінімальними.

Досягти мети та створити «ідеальну» машину або конструкцію неможливо без широкого застосування фундаментальних і прикладних наук. Зокрема, курсу «Теорія пружності», на основних положеннях якого ґрунтується дисципліна «Опір матеріалів».

Задачі зазначеної дисципліни здебільшого розв'язують простими математичними методами за допомогою спрощувальних гіпотез і з використанням експериментальних даних. Водночас розв'язання зводять до розрахункових формул, придатних до застосування в інженерній практиці.

Заснування науки про опір матеріалів пов'язують з ім'ям великого італійського вченого Галілео Галілея (1564–1642 рр.), який у своїй книзі «Бесіди і математичні доведення щодо двох нових галузей науки» продемонстрував вплив власної ваги на міцність та зробив висновки, що зі збільшенням абсолютних розмірів конструкції її міцність зменшується, тобто вона руйнується внаслідок дії власної ваги. Дослідник провів випробування бруса на розтягання й згинання та одержав низку цікавих результатів. У 1678 р. вийшла книга англійського вченого Роберта Гука (1635–1703 рр.) «Про відновлювані властивості, або про пружність» – перша друкована праця про дослідження пружних властивостей матеріалів. Зокрема, у ній вперше наведено закон пропорційності між деформацією й силою, що її викликає (закон Гука). Шарль Кулон (1736–1806 рр.) вивчав конструктивні властивості матеріалів під час різних видів деформації (розтягання, стискання, зсування). На розтягання (стискання) метали випробовували такі відомі вчені: М. В. Ломоносов (1711–1765 рр.), Я. Бернуллі (1759–1789 рр.), Л. Ейлер (1707–1783 рр.), Ж. Лагранж (1736–1813 рр.).

Початок XIX ст. характеризується бурхливим зростанням будівництва залізниць, мостів, тунелів, що так само потребувало розв'язання великої кількості задач з опору матеріалів. Створено Петербурзький інститут інженерних шляхів сполучення (1808 р.), Політехнічну школу у Франції. Плідно працювали такі відомі вчені, як Л. Нав'є (1785–1836 рр.), Томас Юнг (1773–1829 рр.), Г. Ламе (1795–1870 рр.), Д. І. Журавський (1821–1891 рр.), Ф. С. Ясинський (1856–1899 рр.).

Вагомий внесок у розвиток науки опір матеріалів зробили такі сучасні вітчизняні вчені: І. Г. Бубнов, Н. А. Белелюбський, Н. В. Калакуцький, А. Г. Гагарін, П. Ф. Папкович, С. П. Тимошенко, А. А. Ільюшин, В. З. Власов та ін.

Отже, *опір матеріалів* – це найбільш загальна наука про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин та споруд.

Міцність – це здатність конструкції, її частин і деталей витримувати певні навантаження, не руйнуючись.

Жорсткість – це здатність конструктивного елемента витримувати дію зовнішнього навантаження без істотної зміни форми й розмірів.

Стійкість – це здатність конструктивного елемента зберігати певну початкову форму рівноваги.

Надійність – це здатність конструктивного елемента виконувати задані функції впродовж заданого проміжку часу, зберігаючи експлуатаційні показники. Допустимий термін дії деталі або механізму інколи називають *ресурсом*.

Потрібно зауважити, що дисципліна «Опір матеріалів» не вичерпує всіх питань механіки деформованого твердого тіла. Є інші суміжні дисципліни: будівельна механіка, теорія пружності, теорія пластичності та ін. Між ними немає помітної межі.

1.2 Розрахункові схеми (моделі) об'єктів дослідження

Жодна з галузей науки під час вивчення реального об'єкта або процесу не може повністю врахувати всього спектра його особливостей, тому реальний об'єкт або процес замінюють його розрахунковою схемою (моделлю). У такому разі точність визначення характеристик об'єкта значно залежить від того, наскільки адекватно побудована розрахункова схема відображає реальний об'єкт.

Розрахунковою схемою називають реальний об'єкт, позбавлений неістотних особливостей.

Для кожного реального об'єкта можна запропонувати декілька розрахункових схем залежно від вимог до ступеня точності розв'язання. Водночас важливо, що одній розрахунковій схемі можуть відповідати декілька різних реальних об'єктів. Це дає змогу значно скоротити кількість об'єктів досліджень.

Усю різноманітність видів конструктивних елементів машин і споруд можна звести до трьох основних форм: брус (стрижень), оболонки (пластинки), масивні тіла.

Брус (стрижень) – це тверде тіло, у якого один розмір (довжина) значно перевищує два інших (поперечних) розміри.

У машинах і спорудах використовують різні стрижні: як прямолінійні, так і криволінійні; як призматичні, так і змішаного перерізу. Бувають також тонкостінні стрижні.

Оболонка – це тверде тіло, обмежене криволінійними поверхнями, близько розміщеними одна від одної. Якщо ці поверхні замінені на площини, то розрахунковий об'єкт називають пластинкою.

Приклади: обшивки фюзеляжу, резервуари, покриття інженерних споруд тощо.

Тіла, у яких усі розміри є розмірами одного порядку, називають **масивними**.

Приклади: фундаменти споруд, станини верстаків тощо.

Зауваження 1. У першій частині навчального посібника розглянуто методи розрахунку на міцність і жорсткість конструктивних елементів типу брус (стрижень). Крім того, запропоновано моделі зовнішнього навантаження й внутрішнього опору, моделі матеріалу конструкції, закріплення.

1.3 Види деформації тіла. Деформований стан матеріалу

Основні положення курсу «Опір матеріалів» спираються на закони та теореми класичної механіки, насамперед статички твердого тіла.

Механіка розглядає рівновагу й рух матеріальних точок та абсолютно твердих тіл.

Абсолютно тверде тіло – це система матеріальних точок, відстань між якими не змінюється в результаті дії на тіло зовнішніх сил.

Зрозуміло, що розрахунки на міцність, жорсткість і стійкість абсолютно твердого тіла не мають ніякого значення, оскільки воно не може ні деформуватися, ні руйнуватися. Зважаючи на це, у курсі «Опір матеріалів» основною розрахунковою моделлю реального твердого тіла є *модель деформованого твердого тіла*, форми й розміри якого змінюються залежно від дії зовнішнього навантаження.

Деформації бувають пружними, тобто такими, що зникають після припинення дії сил, які спричинили їх, та пластичними, або залишковими, – тими, що не зникають.

Для стрижня характерні такі *види простої деформації*:

- розтягання (стискання);
- зсування (зрізування);
- кручення;
- згинання.

Розтягання (стискання) виникає, наприклад, тоді, коли до стрижня прикладені протилежно спрямовані вздовж осі сили (рис. 1.1).

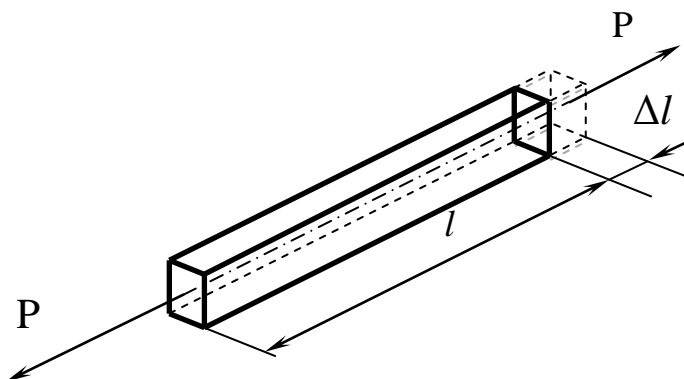


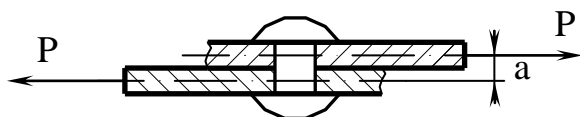
Рисунок 1.1 – Розтягання стрижня:
 Δl – абсолютне подовження (укорочення)
під час розтягання (стискання);
 l – початкова довжина стрижня

Визначення 1. Відношення

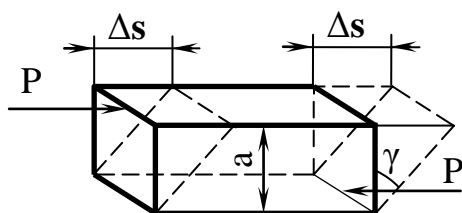
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (1.1)$$

називають *відносним подовженням (укороченням)* на довжині l .

Зсування або зрізування виникає тоді, коли зовнішні сили зміщують два паралельних плоских перерізи стрижня один щодо одного за незмінної відстані між ними (рис. 1.2)



а)



б)

Рисунок 1.2 – Чисте зсування

Визначення 2. Відношення

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{a}, \quad (1.2)$$

де Δs – абсолютне зсування, називають *відносним зсуванням*.

Кручення виникає в результаті дії на стрижень зовнішніх сил, що утворюють момент щодо його осі (рис. 1.3).

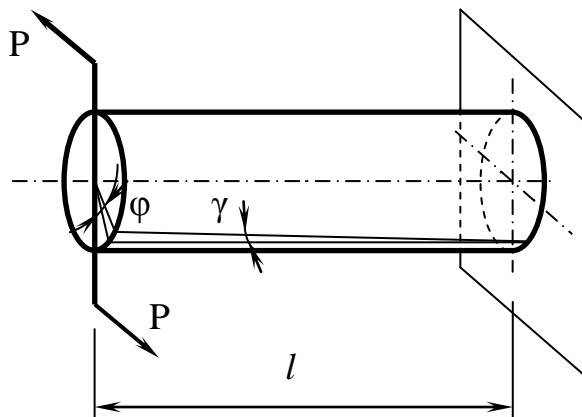


Рисунок 1.3 – Кручення круглого стрижня

Визначення 3. Відношення

$$\theta = \frac{\Phi}{l}, \quad (1.3)$$

де Φ – кут закручування на довжині l або кут повертання одного перерізу стрижня щодо іншого, що перебуває на відстані l , називають *відносним кутом закручування*.

Деформація згинання полягає у викривленні осі прямого стрижня або зміні кривини кривого стрижня (рис. 1.4).

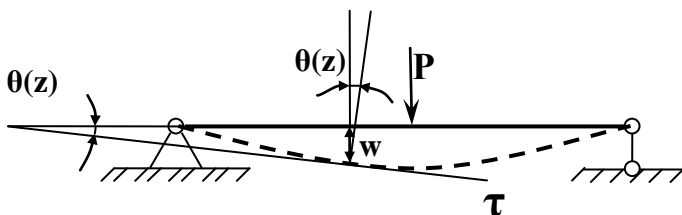


Рисунок 1.4 – Згинання балки:

w – прогин стрижня; θ – кут повертання поперечних перерізів стрижня щодо їх початкових положень

Зауваження 2. Унаслідок одночасної дії на тіло сил, що спричиняють різні види деформації, виникає складніша деформація, наприклад згинання й кручення або згинання та розтягання.

Наведені деформації стрижня дають уявлення про зміну його форми й розмірів, але не про ступінь і характер деформованого стану тіла, який загалом є нерівномірним і змінюється від точки до точки.

Для визначення деформації в певній точці **A** розглянемо відрізок прямої **AB** у недеформованому тілі довжиною **s** і відрізок **A₁B₁**, що відповідає **AB** після деформації тіла. Довжина **A₁B₁** дорівнює **s + Δs** (рис. 1.5).

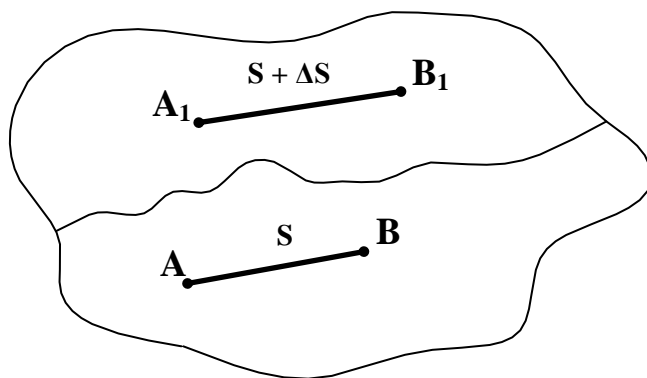


Рисунок 1.5 – Лінійна деформація відрізка

Визначення 4. Відношення

$$\varepsilon = \frac{\Delta s}{s}$$

називають *відносною лінійною деформацією відрізка AB*.

Наблизивши точку **B** до точки **A**, тобто зменшивши довжину відрізка **S**, одержимо

$$\epsilon_{AB} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{S}. \quad (1.4)$$

Величина ϵ_{AB} є *відносною лінійною деформацією в точці A в напрямку AB*.

Деформації в напрямку, паралельному осям декартової системи координат, позначають відповідно $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$.

Крім лінійних деформацій, для нової характеристики деформації в точці вводять кутові деформації (рис.1.6).

Величина

$$\gamma_{BAC} = \lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ S_1 \rightarrow 0}} (\angle BAC - \angle B_1A_1C_1), \quad (1.5)$$

де $\angle BAC$ – прямиий кут до деформації;

$\angle B_1A_1C_1$ – кут $\angle BAC$ після деформації.

Тобто зміну прямого кута після деформації в радіанах називають *відносною кутвою деформацією в точці A в площині*.

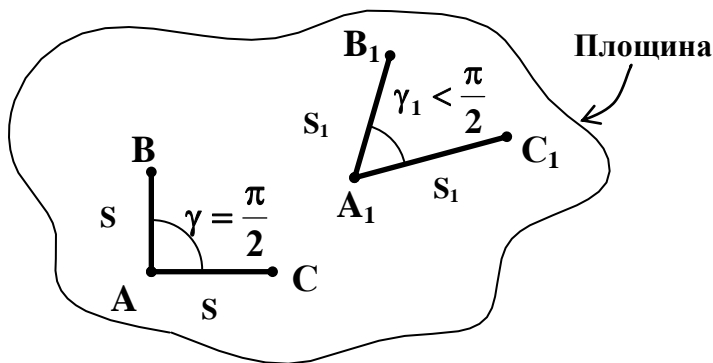


Рисунок 1.6 – Відносна кутвою деформація в точці A в площині

Здебільшого відносні кутові деформації визначають у трьох взаємно перпендикулярних площинах і відповідно позначають γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} .

Отже, деформований стан у точці тіла повністю обумовлений шістьма компонентами деформації: трьома відносними лінійними деформаціями ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z і трьома відносними кутовими деформаціями γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} .

1.4 Основні гіпотези під час інженерних розрахунків

Деформоване тверде тіло під час інженерних розрахунків вважають:

1) **суцільним**, тобто припускають, що матеріал заповнює форму тіла безперервно, без будь-яких мікро- й макророзривів. Доцільність цієї гіпотези полягає в тому, що вона дає змогу розраховувати функції розподілу розрахункових параметрів (переміщення, деформації, напруження) безперервними функціями координат;

2) **однорідним та ізотропним**, тобто таким, що має однакові механічні властивості в будь-якому напрямку. Хоча кристали, з яких складаються метали, анізотропні, їх хаотичне розміщення дає змогу вважати макрооб'єми металів ізотропними. Доцільність цієї гіпотези полягає в тому, що механічні властивості матеріалів наявні в розрахункових співвідношеннях як константи. Інколи припущення про ізотропію неприйнятне. Наприклад, до анізотропних матеріалів належать деревина, склопластики тощо;

3) **ідеально пружним**, тобто припускають, що після зняття навантаження воно набирає початкової форми й розмірів. Доцільність цієї гіпотези полягає в тому, що в разі кожного нового навантаження деталі ми маємо справу з об'єктом незмінної геометрії;

4) *відносно жорстким*, тобто його окремі точки під дією зовнішнього навантаження одержують переміщення, досить малі порівняно з розмірами цього тіла. Ця гіпотеза дає змогу використовувати рівняння статичної рівноваги без урахування зміни геометрії деформованого об'єкта в процесі навантаження;

5) *таким, що задовольняє закон Гука*, який відображає пряму пропорційність між деформаціями й напруженнями, переміщеннями точок та зовнішніми силами. Закон Гука – найбільш сприятливий варіант реального фізичного закону й правдивий у визначених межах. Задачі, у яких застосовують закон Гука, називають *фізично лінійними*;

6) *ненапруженим і недеформованим*, якщо немає зовнішнього навантаження.

Зауваження 3. Це найважливіші гіпотези, з іншими можна ознайомитися далі.

Запитання для самостійного контролю

- 1 Які вимоги до сучасних машин і конструкцій?
- 2 Дайте визначення опору матеріалів. Що розуміють під міцністю, жорсткістю, стійкістю та надійністю?
- 3 Яка різниця між розрахунковою схемою й реальним об'єктом досліджень?
- 4 Яка геометрична ознака характерна для масивного тіла, оболонки та стрижня?
- 5 Чим відрізняється абсолютно тверде тіло від деформованого твердого?
- 6 Які види простої деформації? Порівняйте їх.
- 7 Дайте визначення лінійної та кутової деформацій.
- 8 Як порушення гіпотез опору матеріалів впливає на розрахунки.

РОЗДІЛ 2

ОСНОВНІ ОБ'ЄКТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ «ОПІР МАТЕРІАЛІВ»

2.1 Зовнішні сили та їх класифікація

Визначення 1. *Зовнішніми* називають сили взаємодії між елементом конструкції, що розглядають, і пов'язаними з ним тілами. Зовнішні навантаження, що діють на брус, можна класифікувати за такими ознаками, як:

а) орієнтація щодо осі бруса (поздовжні, поперечні, крутильні);

б) характер розподілення навантаження по поверхні тіла (розподілене або зосереджене, поверхневе або лінійне, масові сили – вага, інерційні сили);

в) характер прикладення сил у часі (статичні або динамічні).

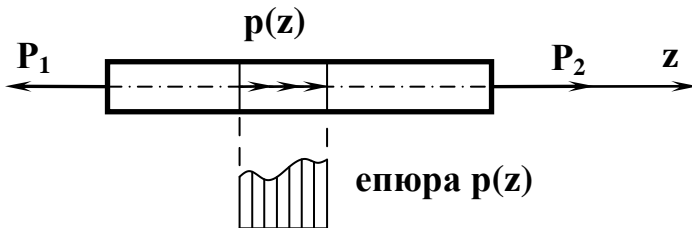


Рисунок 2.1 – Поздовжні навантаження:

P_1, P_2 – зосереджені сили (Н, кН); $p(z)$ – інтенсивність лінійного розподіленого поздовжнього навантаження, що припадає на одиницю довжини бруса (Н/м, кН/м)

Зауваження 1. Рівнодійна розподіленого навантаження чисельно дорівнює площі його епюри й прикладений у центрі неї ваги. Якщо інтенсивність розподіленого навантаження постійна за довжиною, його вважають рівномірним, тобто $p(z) = p = \text{const}$.

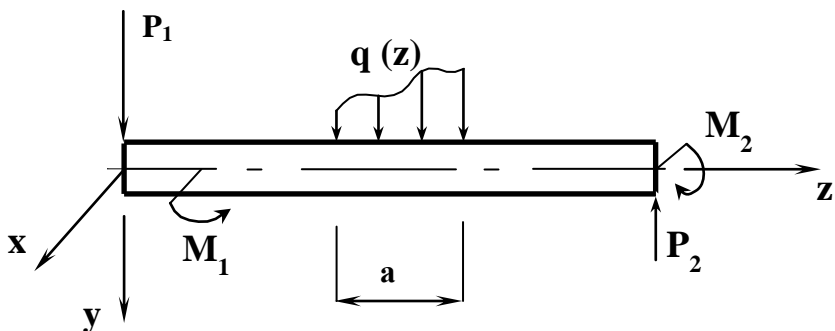


Рисунок 2.2 – Поперечні навантаження:

P_1, P_2 – зосереджені поперечні сили (Н, кН);

M_1, M_2 – зосереджені згинальні моменти (Н · м, кН · м);

$q(z)$ – інтенсивність лінійного розподіленого поперечного навантаження (Н/м, кН/м)

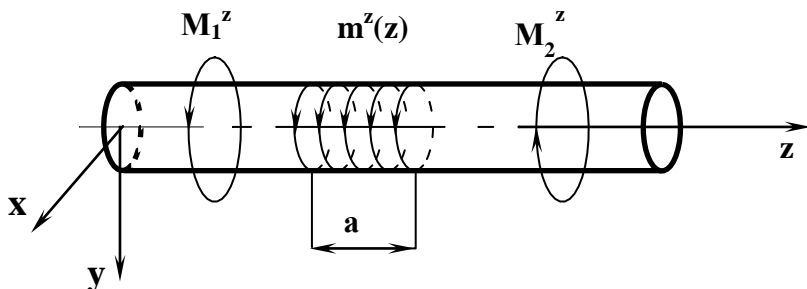


Рисунок 2.3 – Скручувальні навантаження:

M_1^z, M_2^z – зосереджені скручувальні моменти (розмірність – Н · м, кН · м);

$m^z(z)$ – інтенсивність лінійно-розподіленого крутильного моменту (розмірність – Н · м/м, кН · м/м)

Навантаження вважають **статичним**, якщо воно порівняно повільно й плавно зростає від нуля до свого граничного значення, а далі залишається незмінним.

Динамічні навантаження супроводжуються значними прискореннями як деформованого тіла, так і тіл, що з ним взаємодіють. Динамічні навантаження здебільшого поділяють на миттєво прикладені, ударні та повторно-змінні (гармонійні).

2.2 Внутрішні зусилля в брусі. Метод перерізів

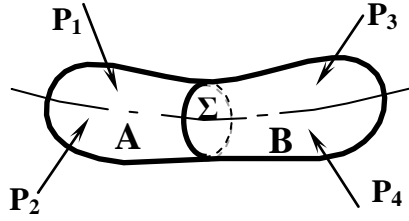
Відомо, що між сусідніми точками тіла (кристалами, молекулами, атомами) завжди є певні сили взаємодії, тобто внутрішні сили. Такі сили за будь-якого навантаження намагаються зберегти тіло як єдине ціле. Тому, розглядаючи внутрішні сили, мають на увазі додаткові сили взаємодії, що виникають унаслідок навантаження.

Внутрішні сили часто називають *зусиллями*.

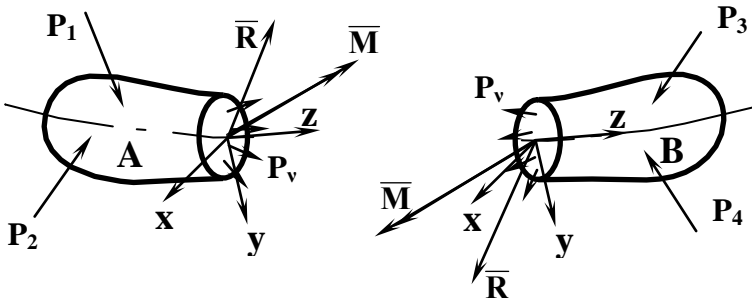
Для визначення внутрішніх зусиль в опорі матеріалів широко застосовують *метод перерізів*.

Розглянемо досліджуване тіло, навантажене самозрівноваженою системою сил. Поділимо площиною переріз, у якому потрібно визначити внутрішні сили \bar{P}_v , на дві частини – **A** і **B**.

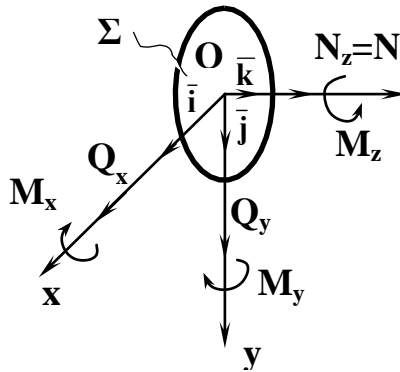
Необхідно зазначити, що внутрішні сили, які діють по перерізу, що належить частині **A**, відповідно до Третього закону Ньютона за модулем дорівнюють та протилежні за напрямом внутрішнім силам, які діють по перерізу, що належить частині **B**, тобто ці системи сил взаємні. Як і кожен систему сил, їх можна звести до однієї точки (здебільшого центра ваги перерізу), у результаті чого на кожному боці перерізу матимемо головний вектор сил \bar{R} і головний вектор моментів \bar{M} внутрішніх зусиль.



a)



б)



в)

Рисунок 2.4 – Метод перерізів

Якщо головний вектор сил і головний вектор моментів внутрішніх сил спроекувати на вісь стрижня \mathbf{z} (рис. 2.4 в) та головні центральні осі поперечного перерізу, то матимемо шість внутрішніх силових факторів:

$$\bar{\mathbf{R}} = N\bar{\mathbf{k}} + Q_x\bar{\mathbf{i}} + Q_y\bar{\mathbf{j}} \quad (2.1)$$

і

$$\bar{\mathbf{M}} = M_z\bar{\mathbf{k}} + M_x\bar{\mathbf{i}} + M_y\bar{\mathbf{j}} \quad (2.2)$$

де $\bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{k}}$ – орти;

$N = N_z$ – поздовжня сила;

Q_x, Q_y – поперечні сили;

$M_z = M_{кр}$ – крутильний момент;

M_x, M_y – згинальний момент щодо головних центральних осей перерізу x та y відповідно. Ці величини називають *внутрішніми зусиллями в перерізі*.

Для практичного обчислення зусиль у перерізі необхідно скласти шість умов рівноваги частини **A** або **B** як алгебраїчні суми проєкцій сил і моментів:

$$\Sigma x = 0, \quad \Sigma y = 0, \quad \Sigma z = 0; \quad (2.3)$$

$$\Sigma M_x = 0, \quad \Sigma M_y = 0, \quad \Sigma M_z = 0.$$

Зауваження 2. Аналогічні приклади розглянуті в розділі статички курсу теоретичної механіки.

2.3 Напруження в перерізах бруса

Розглянемо нескінченно малий елемент площі $d\mathbf{A}$ (рис. 2.5). Унаслідок малого розміру сегмента можна вважати, що внутрішні зусилля, що діють у його різних

точках, однакові за модулем та напрямом. Отже, їх рівнодійні \overline{dR} та \overline{dM} , зведені до центра ваги площі dA і проєкції на осі x, y, z , можна записати як

$$\overline{dR} = dN\overline{k} + dQ_x\overline{i} + dQ_y\overline{j}. \quad (2.4)$$

За попередньою умовою головний вектор моменту \overline{dM} дорівнює нулю.

Дістанемо значення поздовжніх і поперечних сил, що припадають на одиницю площі:

$$\sigma = \sigma_z = \frac{dN_z}{dA}, \quad \tau_x = \frac{dQ_x}{dA}, \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dA}. \quad (2.5)$$

Ці величини називають *напруженнями в точці dA* із координатами (x, y) наведеного перерізу (рис. 2.5), де σ – нормальне напруження; τ_x, τ_y – дотичні напруження. Розмірність – Па = Н/м², кПа, МПа = Н/мм².

Іноді розглядають повне напруження

$$p = \frac{dR}{dA} = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_x^2 + \tau_y^2}. \quad (2.6)$$

2.4 Зв'язок між внутрішніми зусиллями й напруженнями

Ураховуючи формулу (2.5) і наведений рисунок, просто визначити загальний зв'язок між σ та τ , з одного боку, та внутрішніми зусиллями – з іншого.

$$N = \int_A dN = \int_A \sigma dA , \quad (2.7)$$

$$Q_y = \int_A dQ_y = \int_A \tau_y dA , \quad (2.8)$$

$$Q_x = \int_A dQ_x = \int_A \tau_x dA , \quad (2.9)$$

$$M_y = \int_A x dN = \int_A \sigma x dA , \quad (2.10)$$

$$M_x = \int_A y dN = \int_A \sigma y dA , \quad (2.11)$$

$$M_{кр} = \int_A (y dQ_x - x dQ_y) = \int_A (y \tau_x - x \tau_y) dA = \int_A \rho \tau dA . \quad (2.12)$$

В останній формулі

$$\tau = \frac{dQ}{dA} = \frac{\sqrt{dQ_x^2 + dQ_y^2}}{dA} = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} . \quad (2.13)$$

Формули (2.7–2.13) називають *статичними, або інтегральними, рівняннями рівноваги.*

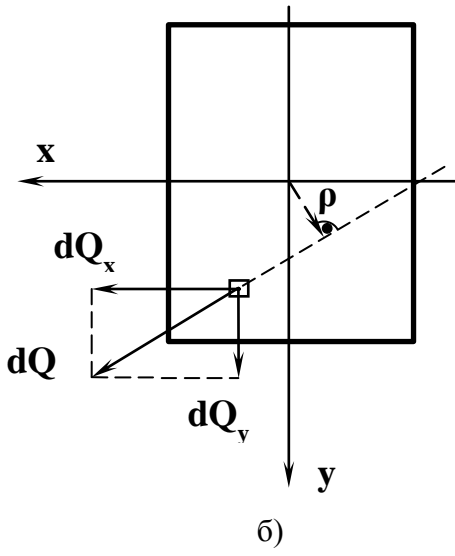
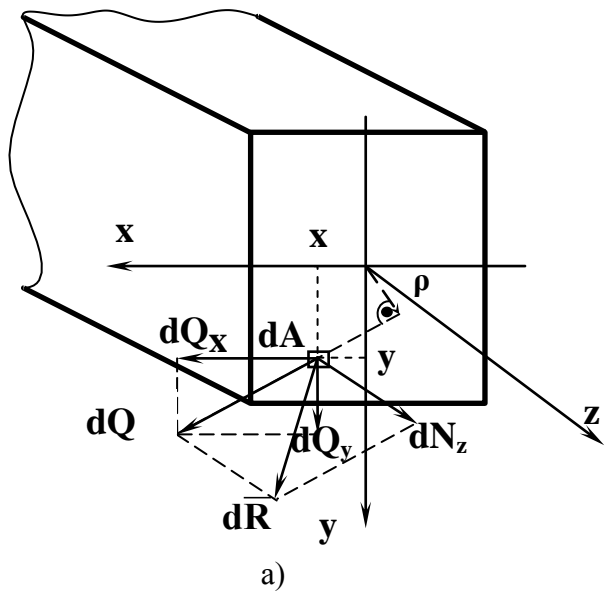


Рисунок 2.5 – Напруження в перерізі бруса

2.5 Принцип Сен-Венана

Визначаючи напруження під час розтягання під дією статичних та інших видів деформації, у курсі «Опір матеріалів» широко застосовують важливе положення – **принцип Сен-Венана**: якщо тіло навантажене статично-еквівалентними системами сил, тобто такими, у яких головний вектор сили та головний вектор моментів однакові, і розміри зони прикладення навантажень невеликі порівняно з розмірами тіла, то в перерізах, достатньо віддалених від місць прикладання сил, напруження мало залежать від способу навантаження.

Цей принцип підтверджений результатами численних теоретичних та експериментальних досліджень.

2.6 Принцип незалежності дії сил (суперпозиції)

Узявши гіпотезу про малий розмір деформацій і лінійну залежність між деформаціями й зусиллями (закон Гука), під час розв'язання більшості задач із курсу «Опір матеріалів» можна застосовувати принцип **незалежності дії сил (суперпозиції)**: зусилля в будь-якому перерізі бруса, спричинені різними факторами (кількома силами, температурним навантаженням тощо), дорівнюють сумі зусиль, спричинених кожним із цих факторів, і не залежать від порядку їх прикладання. Він справедливий також щодо деформацій.

Запитання для самостійного контролю

1 Що таке зовнішні й внутрішні сили? Поясніть сутність методу перерізів.

2 Дайте визначення повного, нормального та дотичного напружень.

3 Який зв'язок між внутрішніми зусиллями й напруженнями в перерізі?

4 Сформулюйте принцип Сен-Венана та принцип незалежності дії сил (суперпозиції). За яких умов доречно їх застосовувати?

РОЗДІЛ 3 РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСКАННЯ ПРЯМОГО СТРИЖНЯ

3.1 Гіпотеза плоских перерізів під час розтягання (стискання).

Лінійний напружено-деформований стан стрижня

Розтягання або стискання стрижня спричиняють сили, що діють уздовж його осі. За такого виду опору в поперечних перерізах бруса виникають лише поздовжні сили, а всі інші п'ять внутрішніх зусиль дорівнюють нулю. Поздовжня сила спрямована вздовж осі стрижня й прикладена, як рівнодійна зовнішніх навантажень, у центрі ваги перерізу. Для визначення внутрішніх сил, як відомо, застосовують метод перерізів.

Приклад. На стрижень діє система зовнішніх сил (рис. 3.1), що є взаємно зрівноваженою. Зазначимо, що в усіх випадках система зовнішніх сил дає рівнодійну, спрямовану вздовж осі стрижня.

Розітнемо стрижень перерізом $1 - 1$ та відкинемо його праву частину. З умови рівноваги визначимо поздовжню силу N :

$$\sum z = 0; N = -P_1 - P_2 \cdot \cos \alpha, \quad (3.1)$$

тобто поздовжня сила в будь-якому перерізі дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на поздовжню вісь усіх зовнішніх сил, що діють на ліву або праву частину стрижня.

Правило знаків. Під час розтягання поздовжню силу, спрямовану від перерізу, вважають додатною. Під час стискання вона спрямована до перерізу, а отже, є від'ємною.

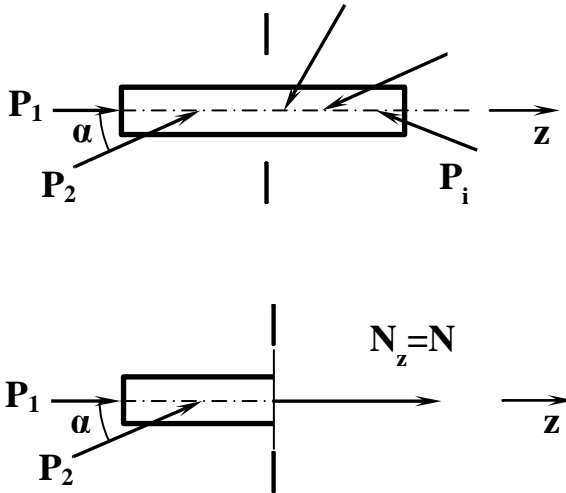


Рисунок 3.1 – Визначення поздовжньої сили

Зауваження 1. Якщо на стрижень діє розподілене вздовж його осі навантаження $p(z)$ (рис. 3.2), то з урахуванням наведених позначень диференціальна залежність зусилля та інтенсивності $p(z)$ має вигляд рівняння:

$$\sum z = 0 : \frac{dN}{dz} = p(z). \quad (3.2)$$

Для визначення нормальних напружень σ_z (відсутність поперечних зусиль дає підставу вважати, що дотичні напруження в кожній точці поперечного перерізу дорівнюють нулю) наведемо вже відоме статичне рівняння, яке визначає *статичний аспект задачі*,

$$N = \int_A \sigma \cdot dA. \quad (3.3)$$

Проте з рівняння (3.3) неможливо визначити напруження σ , оскільки невідомий закон їх розподілу в точках поперечного перерізу.

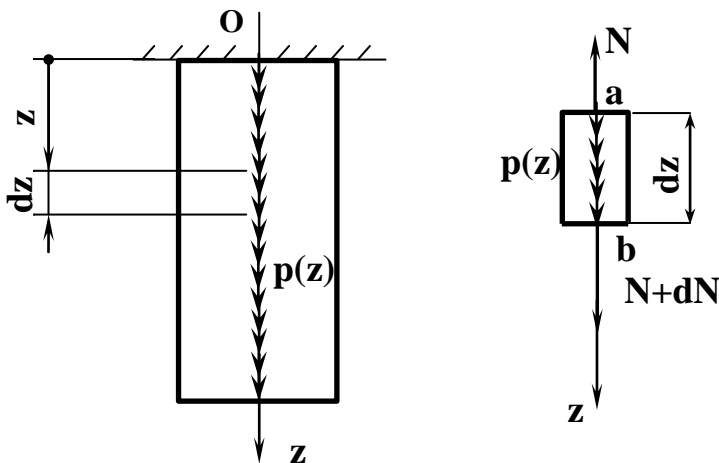


Рисунок 3.2 – Розрахункова схема стрижня під дією розподіленого вздовж його осі навантаження $p(z)$

Спостерігаючи деформації під час розтягання (стискання) стрижня, на поверхні якого нанесені прямі лінії, перпендикулярні до його осі, можна помітити, що ці лінії, переміщуючись паралельно самі собі, залишаються прямими та перпендикулярними до осі стрижня і після деформації. Припускаючи, що таке саме переміщення перерізів відбувається всередині стрижня, уведемо **гіпотезу плоских перерізів**: поперечні перерізи стрижня, плоскі до деформації, залишаються плоскими і після неї, поступово переміщаючись уздовж осі стрижня.

Це дає змогу вважати, що нормальні напруження рівномірно розподілені по перерізу, тобто

$$\sigma = \text{const.} \quad (3.4)$$

З урахуванням формули (3.4) формула (3.3) набере вигляду

$$N = \sigma \cdot A.$$

Зважаючи на це,

$$\sigma = N/A. \quad (3.5)$$

3.2 Деформації стрижня під час розтягання (стискання)

Розглянемо *геометричний аспект задачі*. Поділимо стрижень на поздовжні (паралельні осі стрижня) елементи нескінченно малих поперечних перерізів, що в подальшому називатимемо *волокнами*. На підставі гіпотези плоских перерізів можна зробити висновок, що волокна подовжуються на одну й ту саму величину і їх відносні подовження (укорочення) однакові.

$$\epsilon_z = \frac{\Delta l}{l}.$$

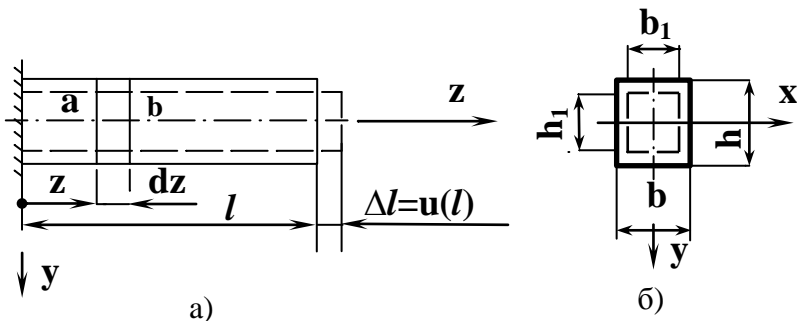


Рисунок 3.3 – Деформації розтягання або стискання стрижня

Розтягання й стискання стрижня супроводжуються зміною його поперечних розмірів. Під час розтягання вони зменшуються, а під час стискання збільшуються. За аналогією з поздовжніми деформаціями їх називають *відносними поперечними деформаціями* ϵ_x, ϵ_y :

$$\epsilon_x = \frac{\Delta b}{b}; \quad \epsilon_y = \frac{\Delta h}{h}, \quad (3.6)$$

де відповідно до наведеного рисунка $\Delta b = b_1 - b$, $\Delta h = h_1 - h$ – абсолютні поперечні деформації.

Відносна поперечна деформація для ізотропних матеріалів в усіх поперечних напрямках однакова:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon' \quad (3.7)$$

Зауваження 2. Якщо точка **a** (рис. 3.3 а) переміститься вздовж стрижня на відстань **u(z)** (рис. 3.4), точка **b** відповідно переміститься на відстань

$$u(z) + \frac{du(z)}{dz} dz.$$

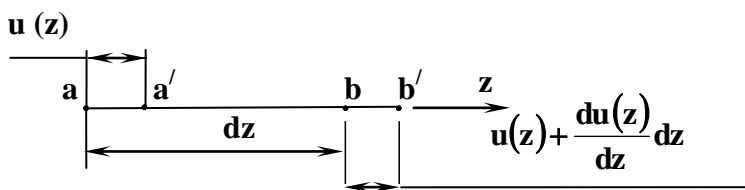


Рисунок 3.4 – Зв'язок між переміщеннями й деформаціями

Тоді відносне подовження відрізка завдовжки dz дорівнює

$$\varepsilon_z = \frac{u + du - u}{dz} = \frac{du(z)}{dz}. \quad (3.8)$$

3.3 Закон Гука. Модуль пружності першого роду. Коефіцієнт Пуассона

Фізичний аспект задачі полягає в установленні залежності деформацій від напружень. У разі пружних деформацій ця залежність лінійна (закон Гука):

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (3.9)$$

де E – коефіцієнт пропорційності, що називають *модулем поздовжньої пружності*, або *модулем пружності 1-го роду*, або *модулем Юнга*. Розмірність – Па, МПа. Наприклад, коефіцієнт пропорційності сталі – $2-2,2 \cdot 10^5$ МПа, чавуну – $0,75-1,6 \cdot 10^5$ МПа.

Ураховуючи сталість модуля пружності E для однорідного й ізотропного матеріалів у будь-якому перерізі бруса під час розтягання або стискання, виконується умова

$$\sigma = E\varepsilon = \text{const}. \quad (3.10)$$

Підставляючи (3.9) у формулу (3.3), маємо

$$N = \int_A E\varepsilon dA = E\varepsilon \int_A dA = E\varepsilon A = \sigma A,$$

з огляду на що

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (3.11)$$

Зауваження 3. Знак напруження залежить від знаку поздовжньої сили.

Важливою характеристикою пружних властивостей матеріалу є також *коефіцієнт Пуассона* (μ). Його величина є абсолютним значенням відношення поперечної деформації до поздовжньої в разі простих деформацій розтягання та стискання в межах застосування закону Гука:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} \right| = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z} \right| = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (3.12)$$

Коефіцієнт Пуассона – безрозмірна величина.

Ураховуючи, що поздовжня й поперечна деформації завжди мають протилежні знаки, одержуємо

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon' = -\mu \varepsilon \quad (3.13)$$

або згідно з формулою (3.10)

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon' = -\mu \frac{\sigma}{E}. \quad (3.14)$$

Для всіх ізотропних матеріалів значення коефіцієнта Пуассона перебуває в межах 0–0,5. Зокрема, для сталі $\mu \approx 0,3$. Значення E та μ для конструкційних матеріалів наведені в довідковій літературі.

Зауваження 4. У разі нормального навантаження в трьох взаємно перпендикулярних площинах співвідношення для розрахунку відносних лінійних деформацій з урахуванням виразів (3.9) та (3.14) і принципу суперпозиції набувають вигляду

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \right), \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \right).\end{aligned}\tag{3.15}$$

Формули (3.15) називають *узгальненим законом Гука*.

3.4 Розподіл поздовжніх сил і нормальних напружень. Побудова епюр

Для практичного обчислення поздовжніх зусиль і напружень застосовують метод перерізів. Графіки (діаграми), на яких репрезентовано, як змінюється внутрішнє зусилля, напруження або переміщення від перерізу до перерізу, називають *епюрами*.

Розглянемо такий приклад побудови епюр внутрішніх зусиль та напружень:

$A = 5 \text{ см}^2$ – площа поперечного перерізу.

Розв'язання

Вибираємо початок координат – т. О.

Поділяємо стрижень на дві ділянки – I (ОВ), II (ВС).

Зауваження 5. *Ділянкою* називають частину стрижня між точками прикладання зосереджених сил. Якщо на стрижень діє розподілене навантаження, ділянкою називають частину стрижня, на якій розподілене навантаження змінюється за однаковим законом.

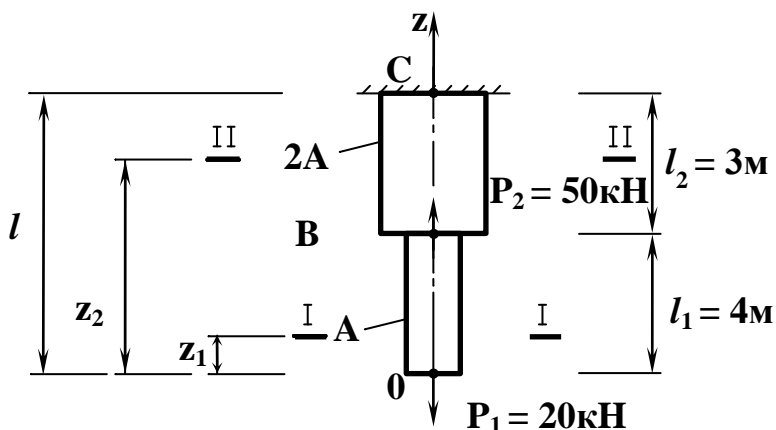


Рисунок 3.5 – Розрахункова схема стрижня під час розтягання або стискання

Ділянка **ОВ, I – I** ($0 \leq z_1 \leq l_1$)

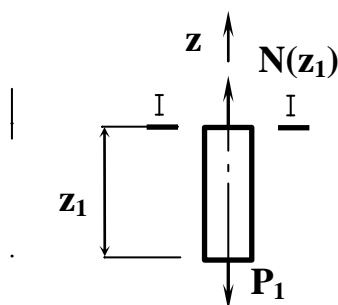


Рисунок 3.6 – Перша ділянка стрижня під час розтягання або стискання

$$\sum z = 0: N(z_1) = N_1 = P_1 = 20 \text{ кН};$$

$$\sigma(z_1) = \sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{P_1}{A} = \frac{20 \text{ кН}}{5 \text{ см}^2} = 4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 40 \text{ МПа}.$$

Оскільки ці величини не залежать від абсциси перерізу, в усіх перерізах поздовжня сила й напруження однакові.

Ділянка **BA**, **II – II** ($l_1 \leq z_2 \leq l$)

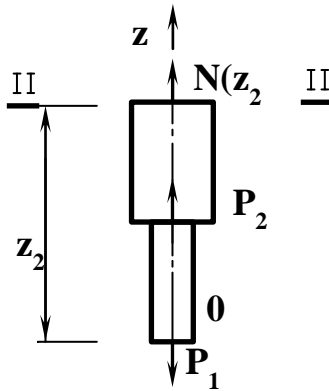


Рисунок 3.7 – Друга ділянка стрижня під час розтягання або стискання

$$\sum z = 0: N(z_2) = N_2 = P_1 - P_2 = 20 \text{ кН} - 50 \text{ кН} = -30 \text{ кН};$$

Правила побудови епюр

1 Ординати відкладають від осі епюри по перпендикуляру.

2 Епюри штрихують лініями, перпендикулярними до осі стрижня.

З Для зусиль вибирають певний масштаб. Крім того, на епюрах проставляють числа, що відображають значення характерних ординат, а в полі епюри в колі – знак зусилля.

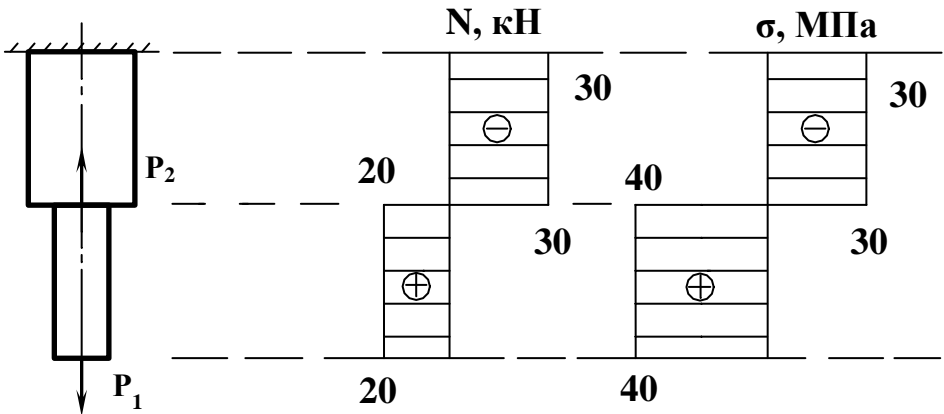


Рисунок 3.8 – Епюри поздовжніх сил і нормальних напружень стрижня під час розтягання або стискання

3.5 Визначення переміщень.

Жорсткість під час розтягання й стискання

Перейдемо до визначення деформацій і переміщень стрижня. З виразів (3.9) та (3.11) можна знайти відносні деформації:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA}. \quad (3.16)$$

У межах призматичної ділянки стрижня завдовжки ℓ , якщо $E = \text{const}$, $N = \text{const}$, абсолютне подовження дорівнює

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{Nl}{EA}. \quad (3.17)$$

Формула (3.16) визначає закон Гука під час деформації розтягання (стискання). Добуток EA називають **жорсткістю стрижня під час розтягання й стискання**,

а величину $\varepsilon = \frac{EF}{l}$ – **подовжинною жорсткістю стрижня під час розтягання та стискання**.

Якщо потрібно визначити, за яким законом змінюється переміщення перерізів по довжині стрижня, у вираз (3.16) підставляють формулу (3.8). У результаті цього одержимо

$$\frac{du}{dz} = \frac{N}{EA}. \quad (3.18)$$

Абсолютне подовження ділянки завдовжки l можна обчислити, підсумувавши подовження всіх відрізків:

$$\Delta l = u(l) - u(0) = \int_0^l \frac{N}{EA} dz, \quad (3.19)$$

де $u(l)$, $u(0)$ – переміщення перерізів стрижня з координатами $z = l$ і $z = 0$ відповідно.

Для багатоступеневих стрижнів, для яких у межах кожної i -ї ділянки E_i , N_i , A_i – сталі величини, інтегрування (3.18) можна замінити сумою

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i A_i}, \quad (3.20)$$

де n – кількість характерних ділянок стрижня.

Наприклад, для стрижня, наведеного в підрозділі 3.4,

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{N_1 l_1}{EA} + \frac{N_2 l_2}{E \cdot 2A}. \quad (3.21)$$

Поняття «напруження» було введено французьким математиком *Огюстеном Луї Контом* (1822 р.), а коефіцієнт Пуассона – французьким математиком, механіком *Симеоном Ден Пуассоном* (1830 р.).

Запитання для самостійного контролю

1 Розкрийте сутність гіпотези плоских перерізів. Які результати її застосування під час розтягання й стискання?

2 Який внутрішній силовий фактор виникає під час розтягання та стискання? Які правила його знаків?

3 Поясніть сутність статичного й геометричного аспектів задачі під час розтягання та стискання призматичних стрижнів.

4 Сформулюйте закон Гука під час розтягання й стискання. Як впливає модуль Юнга на жорсткість стрижня?

5 Опишіть деформований стан під час розтягання та стискання. Які відносні деформації виникають у такому разі?

6 Що таке коефіцієнт Пуассона? Який діапазон його значень для ізотропних матеріалів?

7 Доведіть узагальнений закон Гука, застосувавши принцип суперпозиції.

8 Що таке еюра та які правила її побудови?

9 Як визначають абсолютні подовження (укорочення) ділянок стрижня й відносні лінійні деформації під час розтягання та стискання?

РОЗДІЛ 4 МЕХАНІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ МАТЕРІАЛІВ ПІД ЧАС РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСКАННЯ

4.1 Випробування матеріалів на розтягання. Зразки для випробування. Діаграми розтягання. Визначення механічних характеристик під час розтягання

Для вивчення властивостей матеріалу й установлення значення граничних напружень зразки матеріалів випробовують на розтягання, стискання, зсування, кручення, згинання та твердість, доводячи їх до руйнування. Детальний опис усіх видів механічних випробувань наведений у спеціальних курсах і посібниках до лабораторних робіт із курсу «Опір матеріалів».

Одним з основних видів випробувань матеріалів є випробування на розтягання, оскільки в результаті нього виявляються їх найважливіші властивості. З випробуваного матеріалу виготовляють спеціальні зразки, що роблять або циліндричними (рис. 4.1 а), або плоскими (рис. 4.1 б).

У циліндричних зразках повинно бути додержаним співвідношення між розрахунковою довжиною ℓ_0 і діаметром d_0 : у довгих зразках $\ell_0 = 10d_0$; у коротких – $\ell_0 = 5d_0$.

Ураховуючи, що

$$d_0 = \sqrt{\frac{4A_0}{\pi}} = 1,13\sqrt{A_0},$$

де A_0 – площа поперечного перерізу зразка, одержуємо:
 $\ell_0 = 11,3\sqrt{A_0}$ – для довгого, $\ell_0 = 5,65\sqrt{A_0}$ – для короткого.

Ці співвідношення справедливі й для плоских зразків. Як основні використовують довгі зразки діаметром $d_0 = 10$ мм.

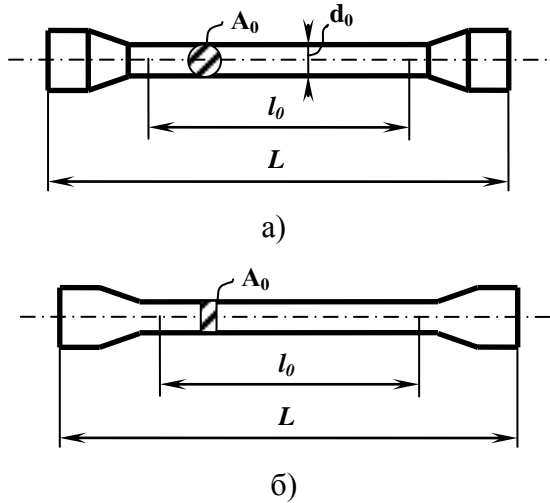


Рисунок 4.1 – Зразки для випробувань матеріалів на розтягання

У циліндричних зразках повинно бути додержаним співвідношення між розрахунковою довжиною l_0 і діаметром d_0 : у довгих зразках $l_0 = 10d_0$, у коротких – $l_0 = 5d_0$.

Ураховуючи, що

$$d_0 = \sqrt{\frac{4A_0}{\pi}} = 1,13\sqrt{A_0},$$

де A_0 – площа поперечного перерізу зразка, одержуємо:
 $l_0 = 11,3\sqrt{A_0}$ – для довгого, $l_0 = 5,65\sqrt{A_0}$ – для короткого.

Ці співвідношення справедливі й для плоских зразків. Як основні використовують довгі зразки діаметром $d_0 = 10$ мм.

Для випробувань на розтягання необхідні розривні машини, за допомогою яких визначають зусилля й відповідні до них деформації зразка як діаграму $\mathbf{P} - \Delta\ell$. За окресленням вона подібна до діаграми $\sigma_t - \varepsilon$. (рис. 4.2), що характеризує механічні властивості матеріалу та не залежить від розмірів зразків. Значення ординати такої діаграми обчислюють діленням розтягальної сили на початкову площу поперечного перерізу зразка ($\sigma = \mathbf{P} / \mathbf{A}_0$), а абсциси – діленням абсолютних подовжень розрахункової частини зразка на її початкову довжину ($\varepsilon = \Delta\ell / \ell_0$).

На рисунку 4.2 зображено типову діаграму ($\sigma_t - \varepsilon$) для маловуглецевої сталі. На прямій \mathbf{OA} простежується прямо пропорційна залежність між подовженням зразка й силою, тобто виконується закон Гука.

Визначення 1. Напруження, спричинене силою $\mathbf{P}_{pr}(\mathbf{P}_{тц})$, називають *границею пропорційності* та обчислюють за формулою

$$\sigma_{pr} = \frac{\mathbf{P}_{pr}}{\mathbf{A}_0} \left(\sigma_{тц} = \frac{\mathbf{P}_{тц}}{\mathbf{A}_0} \right). \quad (4.1)$$

Індекс \mathbf{pr} походить від першої літери слова proportional (англ. пропорційний), а індекс \mathbf{t} – від першої літери слова tension (англ. розтягання).

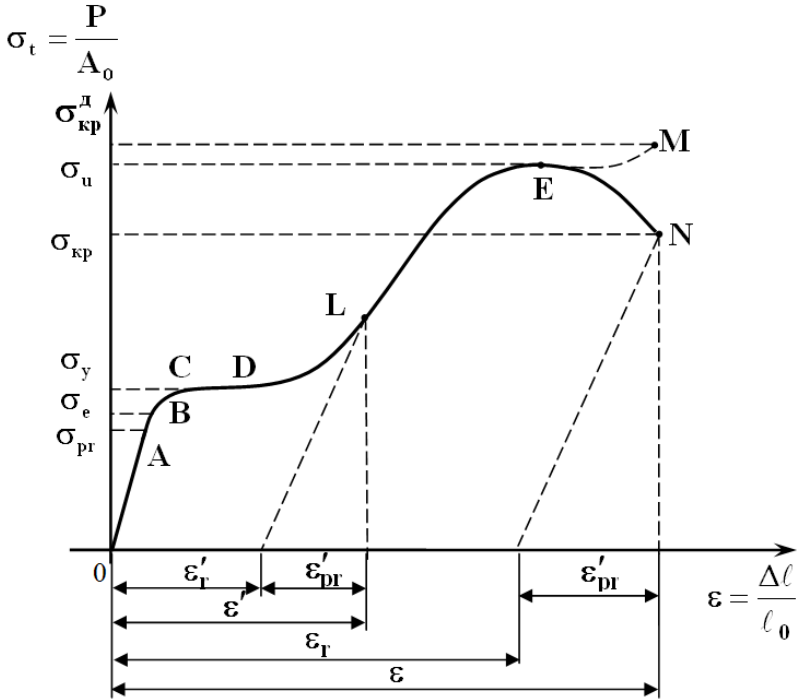


Рисунок 4.2 – Діаграма розтягання

Визначення 2. Найбільше напруження, за якого після розвантаження не проявляється залишкова деформація, називають *границею пружності*

$$\sigma_e = \frac{P_e}{A_0} \left(\sigma_{пр} = \frac{P_{пр}}{A_0} \right), \quad (4.2)$$

де P_e ($P_{пр}$) – найбільше значення сили, за якого зразок не дає після розвантаження залишкової деформації.

Індекс e походить від першої літери слова elastic (англ. пружний).

Границя пружності є характеристикою, не пов'язаною із законом Гука, і їй відповідає на діаграмі ділянка **AB**.

Визначення 3. *Границею текучості σ_y (σ_T)* називають найменше напруження, за якого значення розтягальної сили під час деформації зразка є сталим:

$$\sigma_y = \frac{P_y}{A_0} \quad (\sigma_T = \frac{P_T}{A_0}), \quad (4.3)$$

де P_y – сталі значення сили, за яких подовження зразка продовжує зростати (ділянка **CD**).

Індекс *y* походить від першої літери слова *yield* (англ. текучість).

Ділянка **CD** є *площинкою текучості*. Такий процес деформації, що має назву *текучості матеріалу*, супроводжується залишковим (пластичним) подовженням, що не зникає після розвантаження. Початок пластичної деформації відповідає настанню певного критичного стану металу. Крім залишкових деформацій, підвищується температура зразка, у сталі змінюються електропровідність і магнітні властивості, характерна поява на полірованій поверхні зразків густої сітки ліній. Такі лінії називають *лініями Чернова – Людерса* (рис. 4.3 а). Вони нахилені до осі зразка приблизно під кутом 45° і становлять мікроскопічні нерівності, що виникають унаслідок зсування в тих площинах кристалів, у яких діють найбільші дотичні напруження.

Після стадії текучості матеріал знову стає здатним збільшувати опір подальшій деформації та сприймає додаткові навантаження (ділянка **DE**).

Ділянка **DE** є *ділянкою зміцнення*.

Визначення 4. Напруження, що відповідає максимальній силі, називають *тимчасовим опором, або границею міцності*:

$$\sigma_u = \frac{P_u}{A_0} \quad (\sigma_B = \frac{P_{max}}{A_0}). \quad (4.4)$$

Індекс *u* походить від першої літери слова ultimate (англ. граничний).

Після досягнення розтягальною силою значення P_u під час подальшого розтягання зразка деформація відбувається здебільшого на його невеликій довжині. Це призводить до місцевого звуження діаметра зразка у вигляді *шийки* (рис. 4.3 б) і зменшення сили P .

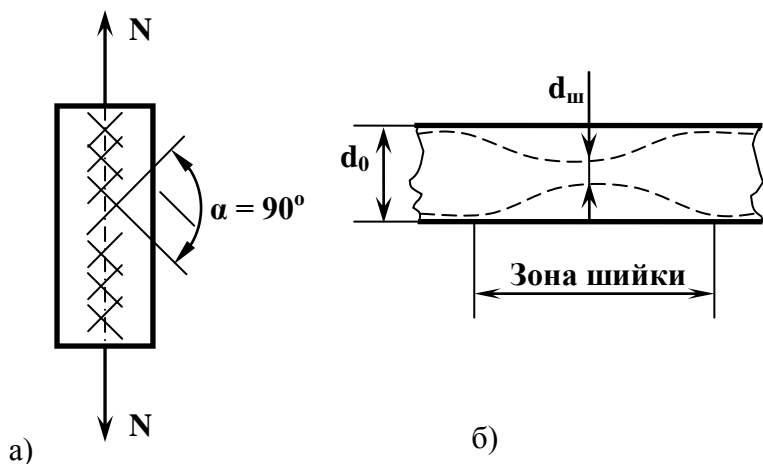


Рисунок 4.3 – Деформація зразка під час розтягання поза пружною зоною:
 а) лінії Чернова – Людерса;
 б) утворення шийки

Позначивши через $P_{кр}$ силу в момент розривання, одержимо

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A_0}. \quad (4.5)$$

Основними характеристиками пружності й міцності матеріалів, використовуваними в практичних розрахунках, є границя пропорційності σ_{pr} , границя текучості σ_y і тимчасовий опір (границя міцності) σ_u . Для маловуглецевої сталі Ст20 ці характеристики такі: $\sigma_{pr} = 200$ МПа, $\sigma_y = 220\text{--}260$ МПа, $\sigma_u = 340\text{--}420$ МПа.

Зауваження 1. Якщо за зусилля розтягання, що спричиняє напруження не вище за границю пружності, припинити навантажування зразка, а потім його розвантажити, процес розвантаження зобразиться на діаграмі лінією **OA**. Крім того, можна помітити, що

$$E = \operatorname{tg}\alpha = \sigma_{pr} / \varepsilon = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \operatorname{const}, \quad (4.6)$$

тобто *модуль Юнга (пружності 1-го роду)* дорівнює тангенсу кута нахилу прямолінійної ділянки діаграми до осі абсцис.

Якщо до початку розвантаження напруження в зразку перевищує границю пружності, наприклад точка **L** на діаграмі, то після розвантаження деформація зразка ε' , що була до початку розвантаження, зникає неповністю. Зниклу пружну частину деформації позначають ε'_{pr} , а ту частину пластичної деформації, що залишилася, – ε'_r , тобто

$$\varepsilon' = \varepsilon'_{pr} + \varepsilon'_r. \quad (4.7)$$

Крім наведених характеристик міцності матеріалу під час випробування на розтягання, визначають **відносне остаточне подовження зразка** після розриву.

$$\varepsilon_r = \frac{\ell_1 - \ell_0}{\ell_0} \cdot 100 \%, \quad (\delta = \frac{\ell_1 - \ell_0}{\ell_0} \cdot 100 \%) , \quad (4.8)$$

де ℓ_1 – розрахункова довжина зразка після розриву.

Індекс **r** походить від першої літери слова *rest* (англ. залишок).

Зауваження 2. Відносне подовження матеріалу характеризує його пластичність. Залежно від цього подовження матеріали поділяють на *пластичні й крихкі*. Для пластичних матеріалів можна умовно вважати, що $\delta > 5 \%$, для крихких – $\delta < 5 \%$.

До пластичних матеріалів належить маловуглецева сталь ($\delta = 35 \%$), до крихких – чавун ($\delta = 1 \%$), скло, камінь тощо.

Зауваження 3. Другою характеристикою пластичності матеріалу є **відносне остаточне звуження зразка** після розриву.

$$\psi_r = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \cdot 100 \%, \quad (4.9)$$

де A_1 – площа поперечного перерізу в найтоншому місці шийки після розриву. Для сталі Ст30 значення ψ_r дорівнює 50–60 %.

Зауваження 4. Для пластичних матеріалів, що не мають площинки текучості, границю текучості визначають умовно як напруження, за якого залишкова деформація є величиною, регламентованою державним стандартом або технічними умовами. Згідно з ГОСТ 1497-84 залишкова

деформація становить 0,2 % від вимірюваної довжини зразка. *Умовну границю текучості* позначають нижнім індексом **0,2** – $\sigma_{0,2}$.

Зауваження 5. *Умовною границею пружності* називають найменше напруження, за якого залишкова деформація досягає заданого значення (здебільшого 0,001–0,05 % від вимірюваної довжини зразка). Її позначають, наприклад, $\sigma_{0,05}$.

Зауваження 6. Оскільки після утворення шийки напруження по довжині зразка розподіляються нерівномірно, відповідно до «дійсної» діаграми розтягання зразка (штрихова лінія **ЕМ**, рис. 4.2) відносно звуження поперечного перерізу шийки $\psi_{ш}$ та дійсне критичне напруження $\sigma_{кр}^d$ дорівнюють

$$\psi_{ш} = \frac{A_0 - A_{ш}}{A_0} 100 \% , \quad (4.10)$$

$$\sigma_{кр}^d = \frac{P_{кр}}{A_{ш}} . \quad (4.11)$$

Крім того, діаграма розтягання дає змогу визначити енергетичні характеристики матеріалу. Робота, яку витрачено на розрив зразка, дорівнюватиме площі діаграми розтягання **P – ΔL**.

У межах пружності *повну роботу деформації* можна визначити за площею заштрихованого трикутника (рис. 4.4 а).

$$U_e = \frac{P_e \cdot \Delta \ell}{2} . \quad (4.12)$$

Поділивши роботу деформації на об'єм робочої частини зразка, знайдемо *питому роботу деформації* (рис. 4.4 б):

$$u_e = \frac{U_e}{V} = \frac{P_e \cdot \Delta l}{2A_0 l_0} = \frac{\sigma_e \cdot \varepsilon}{2}. \quad (4.13)$$

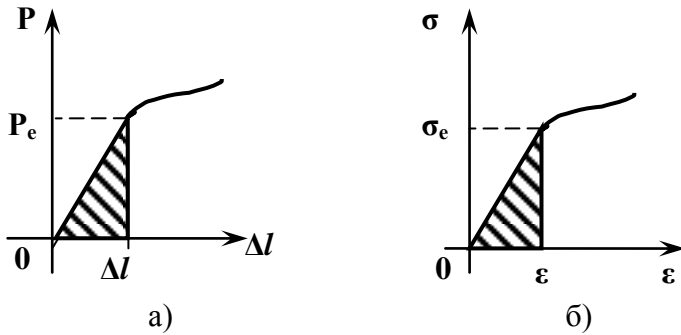


Рисунок 4.4 – Робота деформації під час розтягання:
а) повна; б) питома

4.2 Випробування на стискання. Діаграма стискання. Механічні характеристики матеріалу під час стискання

Для стискання використовують короткі циліндричні або призматичні зразки (рис. 4.5). Їх висота не повинна бути більшою за характерні розміри поперечного перерізу, тобто

$$h_0 \leq 2d_0, \quad h_0 \leq 2a_0. \quad (4.14)$$

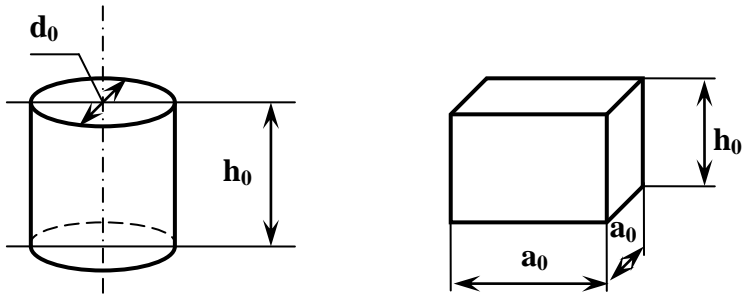


Рисунок 4.5 – Зразки для випробувань матеріалів на стискання

Для пластичних матеріалів модуль пружності, границя пружності й границя текучості під час стискання приблизно такі самі, як під час розтягання. З діаграми стискання зразка не можна одержати характеристики умовної границі міцності, а також характеристик, аналогічних відносному подовженню та відносному звуженню під час розривання.

Випробуванням на стискання підлягають здебільшого крихкі матеріали, що краще чинять опір стисканню, ніж розтягання. Тертя, що виникає під час випробування на стискання між плитами машини й торцями зразка, істотно впливає на результати та характер руйнування.

Якщо для пластичних матеріалів не можна визначити напружень, що відповідають руйнівній силі (рис. 4.6 а), тому що зразок перетворюється на диск, то для крихких матеріалів руйнування відбувається внаслідок зсування однієї частини зразка щодо іншої.

Границю міцності під час розтягання позначають $\sigma_{u,t}$, під час стискання – $\sigma_{u,c}$.

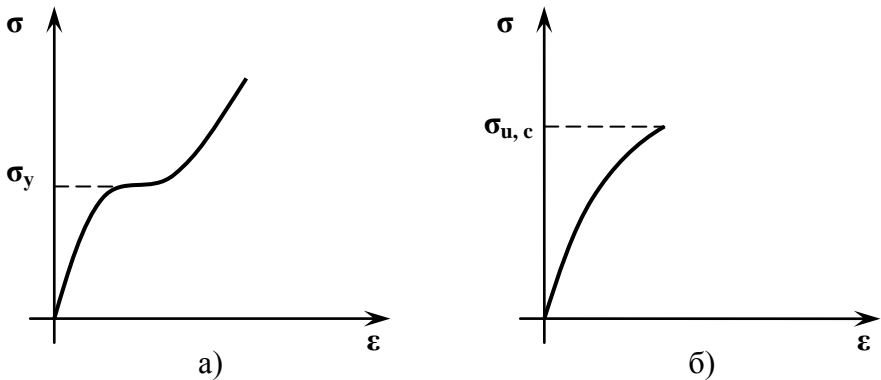


Рисунок 4.6 – Діаграма стиснення

4.3 Порівняння результатів випробувань на розтягання й стиснення. Недосконалість структури кристалів матеріалу. Механізм пластичної деформації. Дислокація. Смуги зсування. Ефект Баушингера. Поняття про допустимі напруження

Порівняння результатів випробувань на розтягання та стиснення дає змогу зробити такі висновки:

а) для більшості пластичних конструкційних матеріалів за значенням границі текучості

$$\sigma_{y,c} \cong \sigma_{y,t}; \quad (4.15)$$

б) для крихких матеріалів за значенням границі міцності

$$K = \frac{\sigma_{u,t}}{\sigma_{u,c}}, \quad (4.16)$$

зокрема для чавуну $K = 0,2 \div 0,4$, для кераміки $K = 0,1 \div 0,2$, для кварцу $K = 0,033$.

Як небезпечне напруження беруть:

а) для пластичних матеріалів –

$$\sigma_H = \sigma_y \left(\sigma_H = \sigma_T \right), \quad (4.17)$$

щоб запобігти виникненню істотних остаточних деформацій;

б) для крихких матеріалів –

$$\sigma_H = \sigma_u \left(\sigma_H = \sigma_B \right). \quad (4.18)$$

Зважаючи на це, допустимі напруження, за яких забезпечується надійна робота машин і конструкцій, можна визначити за формулою

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_H}{n_{adm}} \left([\sigma] = \frac{\sigma_H}{n} \right), \quad (4.19)$$

де $n > 1$ – коефіцієнт запасу міцності, що показує, у скільки разів допустимі напруження нижчі за граничні.

Отже:

а) для пластичних матеріалів

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{n_y} \left([\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} \right), \quad (4.20)$$

де n_y (n_T) – коефіцієнт запасу по границі текучості;

б) для крихких матеріалів

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_H}{n_u} \left([\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B} \right), \quad (4.21)$$

де n_u (n_B) – коефіцієнт запасу за границею міцності.

Метали, як відомо, мають кристалічну структуру й складаються з багатьох кристалів (кристаліту) неправильної форми, що утворюються з центрів кристалізації в процесі затвердіння розплаву. Так само атоми матеріалів становлять його кристалічну ґратку. У її вузлах розміщені йони. Коли метал деформується, відстані між атомами під дією зовнішніх сил змінюються в певних напрямках, у результаті чого виникають сили притягання й відштовхування. Залежність між малими зміщеннями атомів і силою взаємодії можна вважати лінійною (закон Гука).

Якщо зовнішні сили збільшуються, у зернах металу відбуваються зміщення однієї частини щодо іншої, що називають *ковзанням*. Поява *смуг зсування* в кристалічній ґратці призводить до пластичної деформації. Точні теоретичні розрахунки дають змогу визначити максимальні дотичні напруження, за яких з'являються пластичні деформації. Але фактично вони починаються тоді, коли напруження в сотні разів менші, ніж передбачено теорією. Таку розбіжність можна пояснити тим, що перехід атомів з одного положення в інше здійснюється не одночасно, а за хвилюваним аналогом, тобто з місцевим викривленням ґратки – *дислокацією*.

Попереднє витягування сталі в холодному стані за напружень, що перевищують границю текучості матеріалу (наклеп), значно підвищує границю текучості пластичного матеріалу, але знижує залишкове подовження після розриву. Якщо під час розтягування границя текучості $\sigma_{y, \tau}$, то під час стискання цього самого матеріалу границя текучості $\sigma_{y, c}$ зменшується тим більше, чим істотнішим було зміцнення. Описане явище називають *ефектом Баушингера* (рис. 4.7).

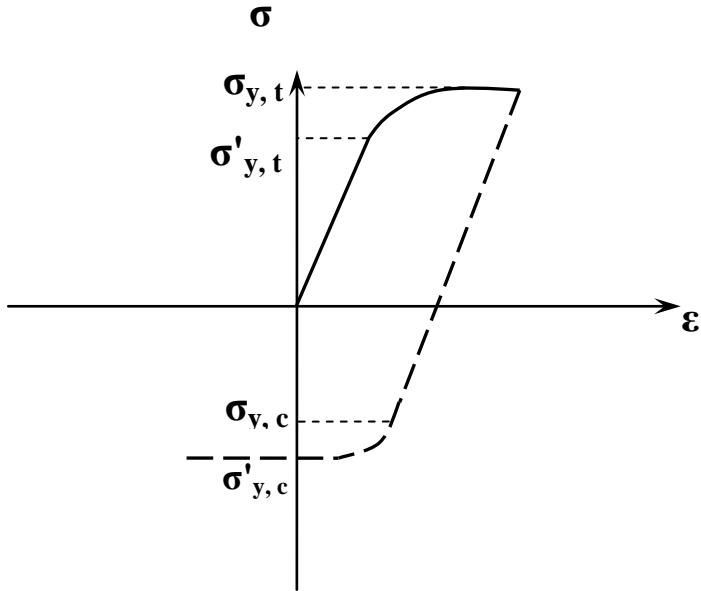


Рисунок 4.7 – Ефект Баушингера

4.4 Вплив температури та швидкості навантаження на механічні властивості матеріалу

Зауваження 7. Чим вища швидкість деформації, тим вищі границі текучості й тимчасовий опір. Водночас усі механічні характеристики матеріалів істотно залежать від температури.

Визначення 5. *Жаростійкістю* називають властивість матеріалу протистояти хімічному руйнуванню поверхні за високих температур, а *жароміцністю* – здатність зберігати за високих температур механічні властивості.

4.5 Повзкість. Тривала міцність. Границя тривалої міцності. Концентрація напружень. Вплив концентрації напружень за ударних і повторно змінних навантажень

Повзкість матеріалів характеризує зростання пластичної деформації з часом за постійного напруження, що не завдає пластичних деформацій у разі короткочасної дії навантаження.

Визначення 6. *Границею повзкості* називають найбільше напруження, за якого швидкість або деформація повзкості за конкретної температури й певний проміжок часу не перевищує встановленого значення. Наприклад, $\sigma_{0,2/100}^{700}$ означає границю повзкості в разі допуску на деформацію 0,2 % за 100 годин випробування за температури 700 °С.

Визначення 7. *Границею тривалої міцності* називають напруження, що спричиняє розрив зразка після заданого терміну безперервної дії цього напруження за певної температури. Наприклад, σ_{1000}^{700} – границя тривалої міцності за 1 000 годин випробування за температури 700 °С.

Визначення 8. *Релаксація напружень* – це їх зменшення з часом унаслідок повзкості в навантаженій деталі за незмінної деформації.

Холодноламкими називають матеріали, що стають крихкими за низьких температур.

Різкі зміни площі поперечного перерізу внаслідок наявності поперечних отворів, різей, канавок і надрізів призводять до нерівномірного розподілу напружень, спричиняють *концентрацію напружень*.

$$\sigma_n = \frac{N}{F_{\min}}$$

$$\alpha = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} - \text{коефіцієнт}$$

концентрації напружень

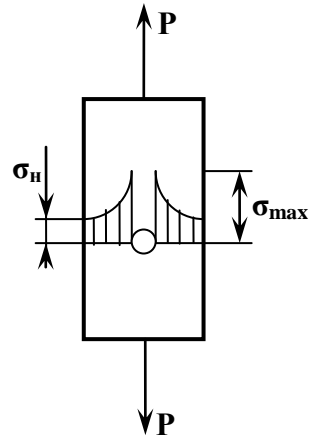


Рисунок 4.7 – Концентрація напружень

У пластичних матеріалах пластичність сприяє вирівнюванню напружень. Тому за статичного навантаження такі матеріали малочутливі до концентрації напружень. За ударних та повторно змінних навантажень, за яких деформації швидко змінюються в часі, напруження не встигають вирівнюватися, унаслідок чого шкідливий вплив концентрації напружень зберігається.

Запитання для самостійного контролю

1 Які зразки використовують під час випробування матеріалів на розтягання й стискання?

2 Дайте визначення границь пропорційності, пружності, текучості, міцності, а також дійсної та фіктивної границь на розрив.

3 Як визначити модуль Юнга за діаграмою випробування на розтягання?

4 Коли та як з'являються лінії Чернова – Людерса?

5 Яка сутність виникнення ділянки зміцнення?

6 Який механізм утворення шийки під час випробування матеріалів на розтягання?

7 Що таке пластичність і крихкість?

8 Як вимірюють пластичність матеріалів? Наведіть визначення відносних остаточної коефіцієнтів формозміни.

9 Поясніть сутність умовної границі текучості. Чим зумовлене її використання?

10 Знайдіть повну й питому роботи під час розтягання та стискання.

11 Чому пластичні матеріали не обов'язково випробовувати на стискання?

12 Визначте допустимі напруження під час розтягання й стискання для пластичних і крихких матеріалів.

13 Поясніть сутність дислокації й ефекту Баушингера.

14 Як впливають на механічні властивості матеріалу температура та швидкість навантаження?

15 Дайте визначення границь повзкості й тривалої міцності.

16 Що називають концентрацією напружень? Дайте визначення коефіцієнта концентрації напружень.

РОЗДІЛ 5

РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ ПІД ЧАС РОЗТЯГАННЯ Й СТИСКАННЯ СТРИЖНЯ

5.1 Напруження в похилих перерізах стрижня

Розглянемо призматичний стрижень, що зазнає простого розтягання силою \mathbf{P} , тобто перебуває в лінійно напруженому стані. У перерізах, досить віддалених від точок прикладання зосередженої сили, напруження розподіляються рівномірно й становлять

$$\sigma_0 = \frac{N}{A_0} = \frac{P}{A_0}. \quad (5.1)$$

Дотичні напруження в такому разі дорівнюють нулю. Такі перерізи є *головними площинами*.

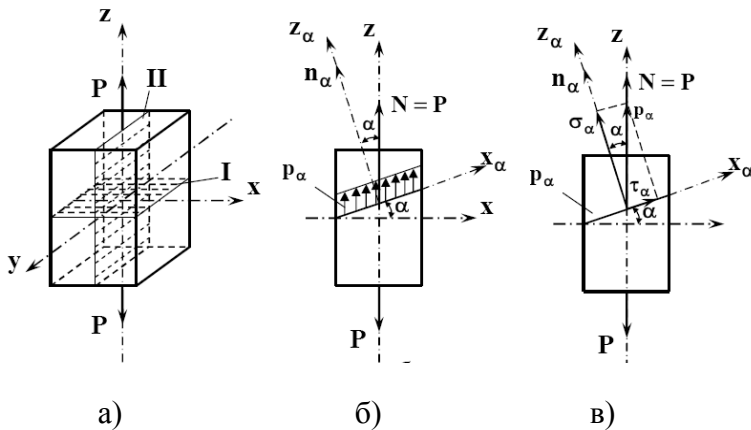


Рисунок 5.1 – Напруження в похилих перерізах стрижня

Визначимо напруження в неголовних похилих площинках, нормаль \mathbf{n}_α до яких утворює з віссю стрижня кут α .

Зауваження 1. Правило знаків: кут α додатний, якщо він відкладається проти напрямку обертання годинникової стрілки.

Напрямы осей $\mathbf{z}_1, \mathbf{x}_1$ на похилих площинках зображений на рисунку 5.1. Позначимо нормальні й дотичні напруження, що діють на α -площинці, та їх рівнодійну, повні напруження $\sigma_\alpha, \tau_\alpha, \mathbf{p}_\alpha$ відповідно.

Площинка похилого перерізу відповідно дорівнюватиме

$$A_\alpha = A_0 / \cos \alpha . \quad (5.2)$$

Отже, згідно з рисунком 5.1 б

$$\mathbf{p}_\alpha A_\alpha = \mathbf{N} . \quad (5.3)$$

Зважаючи на це,

$$\mathbf{p}_\alpha = \frac{\mathbf{N}}{A_\alpha} = \frac{\mathbf{N}}{A_0} \cos \alpha = \sigma_0 \cos \alpha . \quad (5.4)$$

Нормальні й дотичні напруження (рис. 5.1 в) становитимуть

$$\sigma_\alpha = \mathbf{p}_\alpha \cdot \cos \alpha , \quad (5.5)$$

$$\tau_\alpha = \mathbf{p}_\alpha \cdot \sin \alpha , \quad (5.6)$$

або, урахувуючи (5.4),

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha , \quad (5.7)$$

$$\tau_\alpha = \sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha . \quad (5.8)$$

Зауваження 2. Правило знаків: дотичні напруження вважають додатними, якщо вони намагаються повернути частину елемента, що розглядають, за напрямком обертання годинникової стрілки.

На рисунку 5.1 в σ_α і τ_α додатні. За $\alpha = 0$ (рис. 5.1 а) $\sigma_\alpha = \sigma_0$, $\tau_\alpha = 0$ (площинка I); за $\alpha = 90^\circ$ $\sigma_\alpha = \tau_\alpha = 0$ (площинка II). З формули (5.8) можна зробити висновок, що дотичні напруження τ_α досягають свого найбільшого значення за $\alpha = \pm 45^\circ$, тобто $\tau_\alpha^{\max} = \frac{\sigma_0}{2}$.

5.2 Розрахунок центрально розтягнутого (стиснутого) стрижня на міцність і жорсткість

Визначивши напруження в найнебезпечнішому перерізі розтягнутого (стиснутого) стрижня за формулою

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A}$$

та допустимі напруження $[\sigma]$ на розтягання (стискання), залежно від знака напруження σ_{\max} умова міцності під час розтягання (стискання) набере вигляду

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]. \quad (5.9)$$

Зауваження 3. Фактичні напруження не повинні відхилятися від допустимих більше ніж на $\pm 5\%$.

Розміри поперечного перерізу стрижня за допустимими напруженнями визначають за формулою

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}. \quad (5.10)$$

Допустима поздовжня сила за умови міцності становить

$$[N] \leq [\sigma]A. \quad (5.11)$$

Під час проведення розрахунків на жорсткість максимальні абсолютні подовження (укорочення) стрижня $\Delta \ell$ згідно з формулою (3.20) не повинні перевищувати допустимих $[\Delta \ell]$, регульованих відповідними нормами, тобто

$$\Delta \ell = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \ell_i}{A_i E_i} \leq [\Delta \ell]. \quad (5.12)$$

5.3 Поняття про раціональні конструкції. Принцип рівномірності під час проектування конструкції. Урахування власної ваги

Під час проведення розрахунків стрижня на міцність однакового поперечного перерізу з урахуванням власної ваги в усіх перерізах, крім небезпечного, нормальні напруження будуть меншими від допустимих, тобто матеріал використовуватимуть нераціонально. Проте можна спроектувати стрижень такого змінного перерізу, у якому напруження для всіх перерізів буде однаковим і дорівнюватиме допустимому. Такий стрижень називають

рівномічним, або стрижнем однакового опору розтягання та стисканню.

Установимо один із таких законів зміни площі поперечного перерізу (рис. 5.2 а).

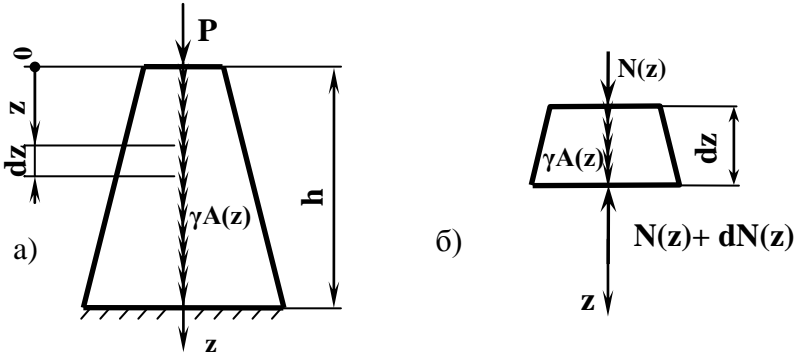


Рисунок 5.2 – Розрахункова схема стиснутого стрижня змінного поперечного перерізу

Нехай стрижень стискається силою P . Потрібна величина площі верхнього перерізу становитиме

$$A_0 = P / [\sigma] . \tag{5.13}$$

За умовою завдання в перерізі з координатою z поздовжня сила дорівнюватиме

$$N(z) = [\sigma] A(z) . \tag{5.14}$$

Розглянемо рівновагу ділянки стрижня довжиною dz (рис. 5.2 б):

$$\Sigma z = 0: dN(z) = \gamma A(z) dz$$

або

$$\frac{dN(z)}{dz} = \gamma A(z), \quad (5.15)$$

де γ – питома вага матеріалу.

Підставивши формулу (5.14) у вираз (5.15), одержимо

$$\begin{aligned} [\sigma] \frac{dA(z)}{dz} &= \gamma \cdot A(z) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dA(z)}{A(z)} &= \frac{\gamma \cdot dz}{[\sigma]}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Проінтегрувавши останнє рівняння, знайдемо

$$\ln A(z) = \frac{\gamma z}{[\sigma]} + c. \quad (5.17)$$

Сталу інтегрування c визначимо відповідно до формули (5.17) за умови, що за $z = 0$:

$$c = \ln A(0) = \ln A_0. \quad (5.18)$$

Отже, згідно з формулами (5.17) і (5.18)

$$\ln \frac{A(z)}{A_0} = \frac{\gamma z}{[\sigma]},$$

або

$$A(z) = A_0 e^{\frac{\gamma z}{[\sigma]}}. \quad (5.19)$$

Найбільша площа в місці закріплення ($z = h$) становить

$$A_{\max} = A_0 e^{\frac{\gamma h}{[\sigma]}}. \quad (5.20)$$

Якщо власна вага всього стрижня G , за умови рівноваги

$$P + G = [\sigma]A_{\max} \quad (5.21)$$

просто обчислити її значення:

$$G = [\sigma]A_{\max} - P. \quad (5.22)$$

Також можна знайти абсолютне подовження всього стрижня, оскільки напруження в усіх перерізах $[\sigma]$ і відносна деформація $\varepsilon = \frac{[\sigma]}{E}$ – сталі величини:

$$\Delta h = \varepsilon h = \frac{[\sigma]}{E} h. \quad (5.23)$$

5.4 Статично невизначувані системи. Початкові й температурні напруження

Визначення 1. *Статично невизначуваними* називають конструкції, зусилля в яких не можна визначити з рівнянь статки. Крім рівнянь статки, для розрахунку таких систем потрібно застосувати рівняння сумісності деформацій (переміщень) їх елементів.

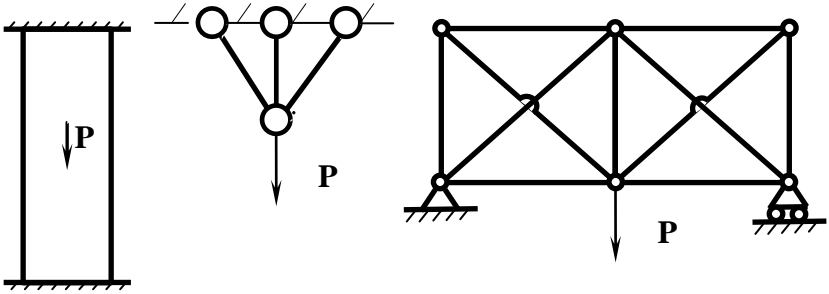


Рисунок 5.3 – Статично невизначувані системи

Розглянемо *метод зусиль*, що дає змогу просто розв'язати задачу.

Нехай до стрижня, закріпленого двома кінцями, прикладена осьова сила P . Потрібно побудувати епюру N .

Розв'язання

Складемо *рівняння рівноваги*

$$\sum z = R_A - R_B - P = 0. \quad (5.24)$$

Отже, задача один раз статично невизначувана (дві невідомі реакції й одне рівняння рівноваги, тобто не вистачає ще одного рівняння).

Зауваження 4. Різниця між кількістю невідомих і кількістю рівнянь статички свідчить про кількість «зайвих» невідомих (зв'язків) або ступінь статичної невизначуваності конструкції.

Геометричний аспект задачі

Оскільки кінці стрижня жорстко закріплені, його абсолютне подовження повинно дорівнювати нулю, тобто *умова сумісності деформацій* така:

$$\Delta l = 0. \quad (5.25)$$

Фізичний аспект задачі

На ділянці **AC** подовжнє зусилля є значенням опорної реакції **R_A**, а саме **N₁ = R_A**, а на ділянці **BC** відповідно **N₂ = R_B**. Якщо площа поперечного перерізу **A₀** не змінюється за довжиною і модуль Юнга **E** – стала величина, абсолютні подовження першої й другої ділянок за законом Гука дорівнюють

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot a}{EA_0}, \quad (5.26)$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot b}{EA_0}. \quad (5.27)$$

Отже, синтез рівняння (5.25) з рівняннями (5.26)–(5.27) можна записати як

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{N_1 \cdot a}{EA_0} + \frac{N_2 \cdot b}{EA_0} = \frac{R_A \cdot a}{EA_0} + \frac{R_B \cdot b}{EA_0} = 0. \quad (5.28)$$

Зважаючи на це,

$$R_A a = - R_B \cdot b. \quad (5.29)$$

Сумісно розв'язуючи рівняння (5.24) і (5.29), одержимо

$$R_B = - \frac{P \cdot a}{a + b}, \quad (5.30)$$

$$R_A = \frac{P \cdot b}{a + b}. \quad (5.31)$$

Остаточну епюру N зображено на рисунку 5.4.

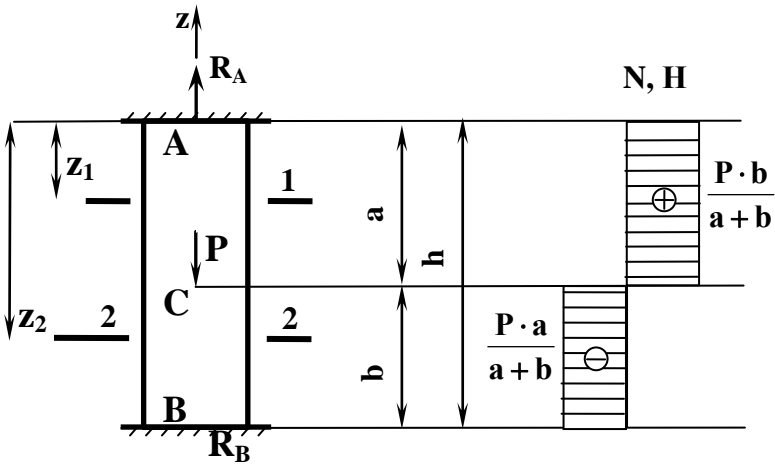


Рисунок 5.4 – Розрахункова схема статично невизначуваного стрижня під дією розтягання-стискування

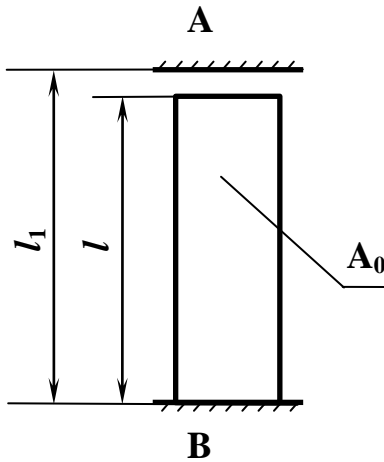


Рисунок 5.5 – Монтажні напруження в статично невизначуваному стрижні

Вільне складання статично невизначуваних систем можливе лише за умови точного виготовлення їх елементів. В іншому разі систему можна скласти так, що вони деформуватимуться. Тому після монтажу в елементах конструкції визначають напруження, що називають *початковими* або *монтажними*.

Стрижень довжиною l потрібно розтягти до довжини l_1 , щоб жорстко з'єднати точки **A** та **B**. Водночас розбіжність розмірів l і l_1 (рис. 5.5) становить

$$\delta = l_1 - l.$$

Визначимо додаткові або початкові напруження, що виникають під час розтягання:

$$\delta = \frac{N_M \cdot l}{EA_0}. \quad (5.32)$$

Зважаючи на це,

$$N_M = \frac{\delta EA_0}{l}, \quad (5.33)$$

$$\sigma_M = \frac{\delta EA_0}{l \cdot A_0} = \frac{\delta E}{l}. \quad (5.34)$$

В елементах статично невизначуваних конструкцій зусилля й напруження виникають також у разі зміни температури.

Визначимо температурні напруження в стрижні **AB** (рис. 5.6) завдовжки l і площиною поперечного перерізу **A**. Модуль пружності матеріалу **E**, коефіцієнт лінійного температурного розширення α .

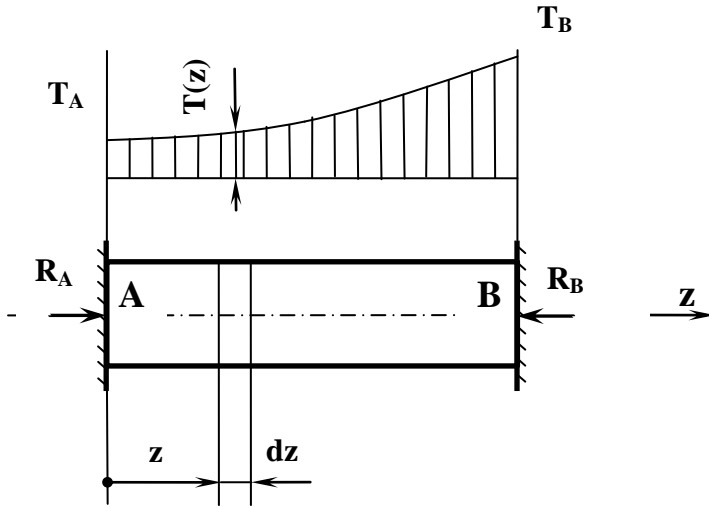


Рисунок 5.6 – Розподіл температури в статично невизначуваному стрижні

Температура змінюється за довжиною згідно із законом

$$T(z) = T_A + \frac{T_B - T_A}{\ell^n} z^n. \quad (5.35)$$

За $n = 0$ температура за довжиною не змінюється й дорівнює $T_B = T$.

Статичний аспект задачі

$$\sum X = 0: \quad R_A - R_B = 0 \Rightarrow R_A = R_B. \quad (5.36)$$

Поздовжня сила

$$N = -R_A = -R_B = -R. \quad (5.37)$$

Геометричний аспект задачі

$$\Delta \ell = 0. \quad (5.38)$$

Фізичний аспект задачі

Укорочення вільного стрижня, спричинене поздовжньою силою, можна обчислити як

$$\Delta \ell_N = \frac{N\ell}{EA} = -\frac{R\ell}{EA}. \quad (5.39)$$

Для елемента завдовжки dz , якщо вважати підвищення температури T постійним, відносне температурне подовження становить $\varepsilon_T = \alpha \cdot T$, а абсолютне, як відомо, визначають згідно з виразом

$$\Delta dz_T = \alpha T dz. \quad (5.40)$$

Температурне подовження всього стрижня під час рівномірного нагрівання знайдемо, інтегруючи вираз (5.40):

$$\Delta \ell_T = \int_0^{\ell} \alpha T dz = \alpha \ell T. \quad (5.41)$$

Повна зміна довжини стрижня

$$\Delta \ell = \Delta \ell_N + \Delta \ell_T = -\frac{R \cdot \ell}{EA} + \alpha \ell T. \quad (5.42)$$

Підставивши вираз (5.42) у вираз (5.38), одержимо

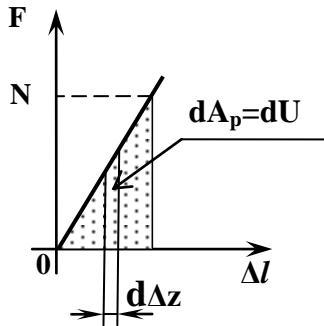
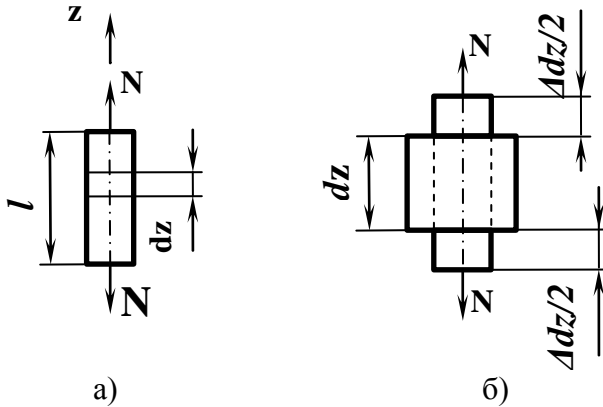
$$-\frac{R\ell}{EA} + \alpha \ell T = 0 \Rightarrow R = \alpha EA T. \quad (5.43)$$

Напруження в стрижні

$$\sigma = \frac{N}{A} = -\frac{R}{A} = -\alpha ET. \quad (5.44)$$

5.5 Потенціальна енергія деформації стрижня під час розтягання та стискання

Розглянемо елемент стрижня довжиною dz , що перебуває під дією осьового зусилля N та одержав подовження Δdz (рис. 5.7 а, б).



в)

Рисунок 5.7 – Елемент стрижня,
що перебуває під дією осьового зусилля N

Потенціальна енергія деформації елемента dz становить

$$dU = dA_p = \frac{N \cdot \Delta dz}{2}, \quad (5.45)$$

а питома енергія деформації становить

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{dU}{Adz}. \quad (5.46)$$

Подовження Δdl знайдемо відповідно до закону Гука

$$\Delta dz = \frac{N \cdot dz}{EA}.$$

Підставивши вираз закону Гука у формулу для потенціальної енергії, одержуємо

$$dU = \frac{N^2 \cdot dz}{2EA}. \quad (5.47)$$

Для знаходження потенціальної енергії всього стрижня потрібно проінтегрувати рівняння (5.47) за його довжиною:

$$U = \int_{\ell} dU = \int_{\ell} \frac{N^2 dz}{2EA}. \quad (5.48)$$

Питому потенціальну енергію деформації стрижня під час розтягання (стискання) визначають за допомогою рівнянь (5.46) і (5.47):

$$u = \frac{\sigma^2}{2EA}. \quad (5.49)$$

Запитання для самостійного контролю

1 Як розподілені й чому дорівнюють напруження в перерізах, досить віддалених від точок прикладання сил, під час центрального розтягання (стискання) призматичного стрижня?

2 Сформулюйте правило знаків для внутрішнього силового фактору, що виникає під час центрального розтягання (стискання) призматичного стрижня.

3 Як можна визначити нормальні, дотичні та повні напруження на похилих площинках під час центрального розтягання (стискання) призматичного стрижня. Які правила знаків для них?

4 Що таке умова міцності під час центрального розтягання (стискання) призматичного стрижня?

5 Що таке умова жорсткості під час центрального розтягання (стискання) призматичного стрижня?

6 Сформулюйте умову під час проектування раціональних конструкцій.

7 Дайте визначення статично невизначуваної стрижневої системи.

8 Наведіть і поясніть фізичний зміст аспектів статично невизначуваної задачі в разі її розрахунку методом зусиль.

9 Які напруження називають початковими (монтажними)?

10 Як визначають температурні напруження й деформації?

11 Чому дорівнюють потенціальна та питома потенціальна енергії деформації під час центрального розтягання (стискання) призматичного стрижня?

РОЗДІЛ 6 ЗСУВАННЯ. КРУЧЕННЯ

6.1 Напруження й деформація під час зсування. Закон Гука під час зсування

Як відомо, під час деформації стрижня, крім лінійних, виникають кутові деформації. Їх визначають за кутом γ . Кут γ називають *відносним зсуванням*, або *кутом зсування*.

Зауваження 1. Деформації зсування виникають здебільшого від дії поперечних сил і крутильних моментів.

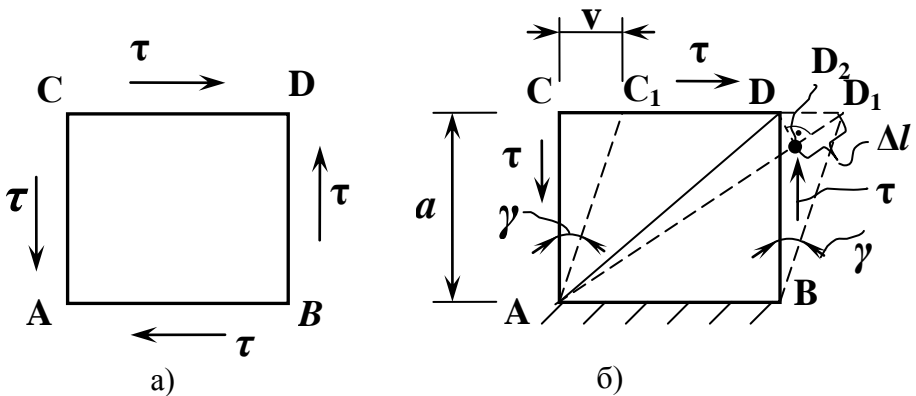


Рисунок 6.1 – Напруження й деформація під час зсування

Детальніше розглянемо деформації квадратного елемента на поверхні бруса, по гранях якого діють дотичні напруження τ (рис. 6.1 а). Такий напружений стан називають *чистим зсуванням*.

Закріпимо сторону **АВ** нерухомо. Верхня грань **CD** зсунеться паралельно стороні **АВ** на величину

$CC_1 = DD_1 = v$, що називають *абсолютним зсуванням* (рис. 6.1 б). Прямі кути в такому разі змінюються на величину γ .

Унаслідок малого значення кута γ

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = v / a, \quad (6.1)$$

тобто відносно зсування визначають у радіанах. Воно дорівнює відношенню абсолютного зсування v до відстані між площинами, що зсуваються. Величина γ згідно з результатами дослідів прямо пропорційна дотичним напруженням.

Залежність між навантаженням і деформацією під час зсування можна простежити за так званою діаграмою зсування (рис. 6.2). Для пластичних матеріалів вона подібна до діаграми розтягання, на якій наведено характеристики міцності.

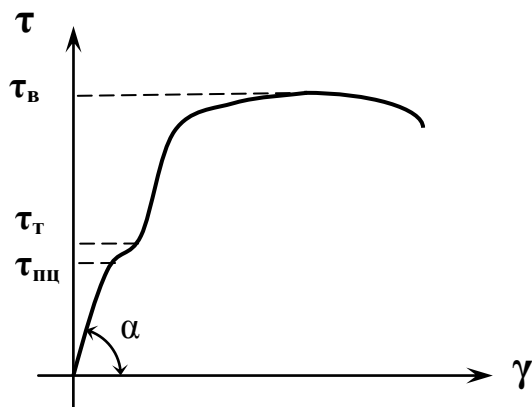


Рисунок 6.2 – Діаграма зсування:

$\tau_{\text{пц}}$ – границя пропорційності; τ_T – границя текучості;
 τ_B – границя міцності

Експериментальну діаграму зсування можна зафіксувати під час скручування тонкостінної труби (рис. 6.3).

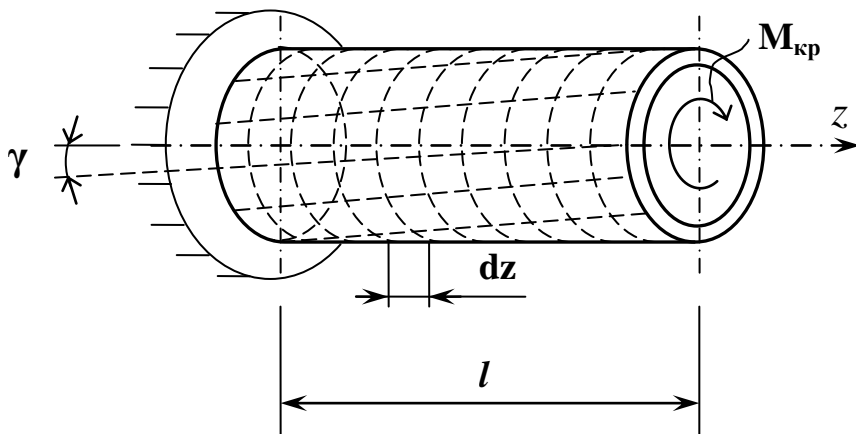


Рисунок 6.3 – Скручування тонкостінної труби

Дійсно, уявно виділений елемент стінки труби (елемент ортогональної сітки, попередньо нанесеної на поверхню труби) перебуває в умовах чистого зсування. Розглядаючи деформацію цього елемента в межах пружності, визначимо, що між відносним зсуванням і дотичними напруженнями простежується лінійна залежність

$$\tau = G\gamma,$$

або

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \tag{6.2}$$

де G – модуль пружності під час зсування (модуль пружності 2-го роду).

Для ізотропних матеріалів між модулем пружності \mathbf{G} під час зсування та модулем пружності \mathbf{E} під час розтягання є певна залежність. Для її визначення можна розглянути деформацію елемента в умовах чистого зсування (рис. 6.1 б). Подовження Δl діагоналі \mathbf{AD} завдовжки $l = \mathbf{a}\sqrt{2}$ становить

$$\Delta l = \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 = \mathbf{D} \mathbf{D}_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right) \approx \mathbf{D} \mathbf{D}_1 \cos \frac{\pi}{4} \approx \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{2}}.$$

Відносне подовження діагоналі в такому разі

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{2}\mathbf{a}\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{v}}{2\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{tgy}}{2} \approx \frac{\gamma}{2}.$$

Згідно із законом Гука для чистого зсування $\gamma = \tau/\mathbf{G}$, тому

$$\varepsilon = \frac{\tau}{2\mathbf{G}}. \quad (6.3)$$

Скориставшись рівняннями узагальненого закону Гука, для плоского напруженого стану ($\sigma_2 = 0$) справедливі такі рівняння:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{\mathbf{E}}(\sigma_1 - \mu\sigma_3), \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\mu}{\mathbf{E}}(\sigma_1 + \sigma_3), \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{\mathbf{E}}(\sigma_3 - \mu\sigma_1), \end{aligned} \quad (6.4)$$

де головне напруження σ_1 діє в напрямку діагоналі \mathbf{AD} , а ε – головна лінійна деформація подовження ε_1 .

Ураховуючи залежності між головними й дотичними напруженнями під час чистого зсування

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau, \quad (6.5)$$

маємо

$$\varepsilon_1 = \varepsilon = \frac{1+\mu}{E} \tau. \quad (6.6)$$

Зіставивши праві частини формул (6.3) і (6.6), одержуємо шукану залежність

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (6.7)$$

Якщо $\mu = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, то $G = (0,38 - 0,4)E$.

Запишемо вираз для зміщення однієї грані щодо іншої (тобто абсолютного зсування \mathbf{v}) під час чистого зсування. Позначивши площу грані через A , рівнодійну зсувної сили як $Q = A\tau$, відстань між гранями, що зсуваються, через a , матимемо

$$\mathbf{v} = \gamma \mathbf{a} = \frac{\tau}{G} \mathbf{a} = \frac{Q\mathbf{a}}{GA}, \quad (6.8)$$

тобто

$$\mathbf{v} = \frac{Q\mathbf{a}}{GA}. \quad (6.9)$$

Формула (6.9) – закон Гука для абсолютного зсування.

Повна потенціальна енергія деформації елемента під час чистого зсування

$$U = \frac{Qv}{2} = \frac{Q^2 a}{2GA}, \quad (6.10)$$

а питома потенціальна енергія деформації під час зсування

$$u = \frac{U}{V} = \frac{Q^2 a}{2GAaA} = \frac{Q^2}{2A^2 G}$$

або, ураховуючи залежність $Q = A\tau$,

$$u = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (6.11)$$

6.2 Практичні розрахунки на зрізування та згинання. Умови міцності

На практиці певні деталі та елементи конструкцій функціонують в умовах, за яких зовнішні сили намагаються зруйнувати їх унаслідок зсування. Наприклад, з'єднання за допомогою заклепок і болтів (рис. 6.4). Одним із можливих видів руйнування буде *зрізування (зсування) заклепки по перерізах $m-g$ та m_1-g_1* .

Умова міцності така:

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau], \quad (6.11)$$

де $Q = P$ – поперечна сила по площі поділу листів $m-g$, m_1-g_1 ;

$[\tau]$ – допустимі дотичні напруження під час зсування,
 $[\tau] = 0,5 - 0,6[\sigma]$;

$[\sigma]$ – допустимі нормальні напруження матеріалу під час розтягання.

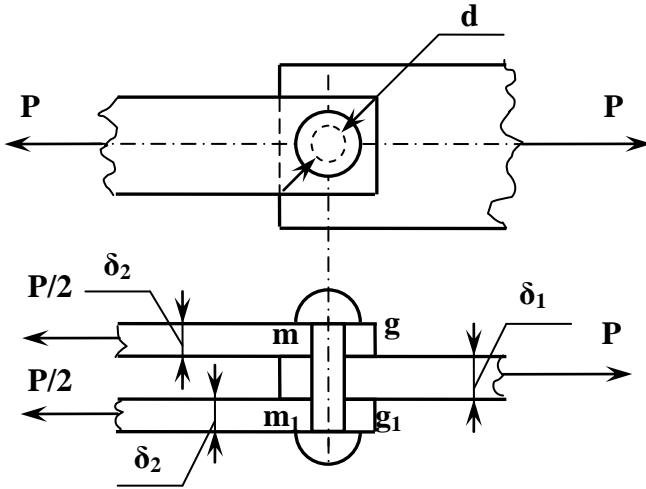


Рисунок 6.4 – З'єднання за допомогою заклепок і болтів

Визначимо найбільшу силу P , що може витримати одна заклепка:

$$P = [\tau]A_{зп}, \quad (6.13)$$

де $A_{зп} = 2 \frac{\pi d^2}{4}$ – площа двох зрізів на перерізах $m - g$, $m_1 - g_1$.

Зауваження 2. Крім розрахунків на зсування (зрізування), проводять розрахунки на **зминання болтових з'єднань**. Під зминанням розуміють пластичну

деформацію, що виникає на поверхні контакту. Не менш важливий тип з'єднань – *зварені з'єднання*. Зварні шви здебільшого розраховують за трьома умовами міцності: на розтягання, стискання й зрізування.

6.3 Вільне кручення стрижня круглого поперечного перерізу (вала). Гіпотеза плоских перерізів. Епюри внутрішніх крутильних моментів

Визначення 1. *Крученням* називають таку деформацію стрижня, за якої під дією внутрішніх крутильних моментів $M_{кр}$ його поперечні перерізи обертаються навколо осі на різні кути повертання ϕ (рис. 6.5).

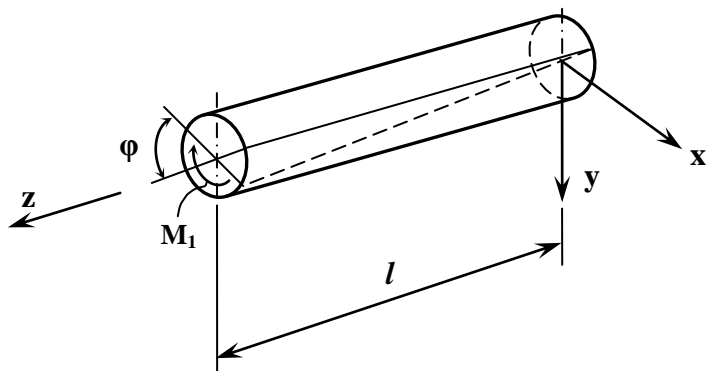


Рисунок 6.5 – Кручення круглого стрижня

Пару сил, що скручують стрижень, називають *скручувальним моментом* M_1 , а стрижні круглого поперечного перерізу, які функціонують на кручення, – *валами*.

Основним принципом, застосовуваним під час розв'язання задачі кручення круглого стрижня, є *гіпотеза плоских перерізів*: перерізи, плоскі до деформації, залишаються плоскими під час кручення прямого круглого стрижня.

Граничні умови:

$$z = 0 : \varphi(0) = 0,$$

$$z = \ell : \varphi(\ell) = \varphi.$$

Зауваження 3. Кручення круглого стрижня (вала) називають *вільним*, якщо діють умови гіпотези плоских перерізів.

Під час кручення вала повинне бути додержаним таке рівняння рівноваги:

$$\sum M_z = 0. \quad (6.14)$$

У поперечних перерізах вала під час кручення виникає один внутрішній силовий фактор – крутильний момент $M_{кр}$, що визначають методом перерізів.

Правило знаків: крутильний момент додатний, якщо, коли ви дивитесь в торець відсіченої частини вала, він діє проти обертання годинникової стрілки.

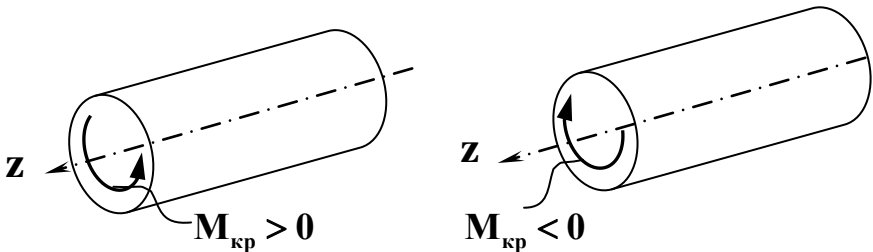


Рисунок 6.6 – Правило знаків для крутильних моментів

Розподіл крутильного моменту вздовж вала можна зобразити за допомогою епюри $M_{кр}$, для побудови якої потрібно обчислити значення крутильних моментів у поперечних перерізах.

Зауваження 4. Іноді під час розрахунку валів задають не зовнішні скручувальні моменти, а потужність N , що передається валом за відомої частоти його обертання n . Якщо частота обертання вала становить n (хв⁻¹), то кругова частота обертання ω (рад · с⁻¹) дорівнює

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot n}{30}. \quad (6.15)$$

Як відомо, потужність N (Н · м · с⁻¹) – це робота, здійснена за 1 с:

$$\frac{A}{t} = N = M \cdot \omega = M \frac{\pi \cdot n}{30}, \quad (6.16)$$

з огляду на що

$$M = \frac{30N}{\pi \cdot n} = 9,549 \frac{N}{n} \quad (\text{Н} \cdot \text{м}), \quad (6.17)$$

де N – потужність, $Nt = \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$;

n – частота обертання вала, хв⁻¹;

ω – кругова частота обертання, рад/с.

6.4 Закон парності дотичних напружень.

Відносний кут закручування

Як відомо, під час кручення вал зазнає деформації чистого зсування. Водночас у перерізах діють лише дотичні напруження τ .

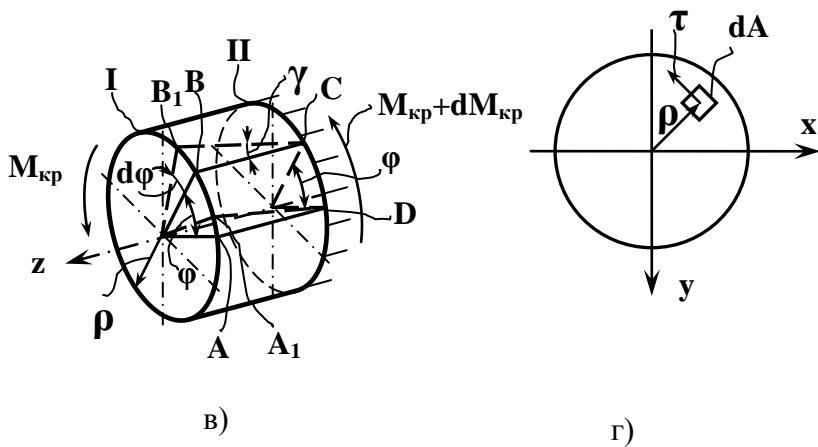
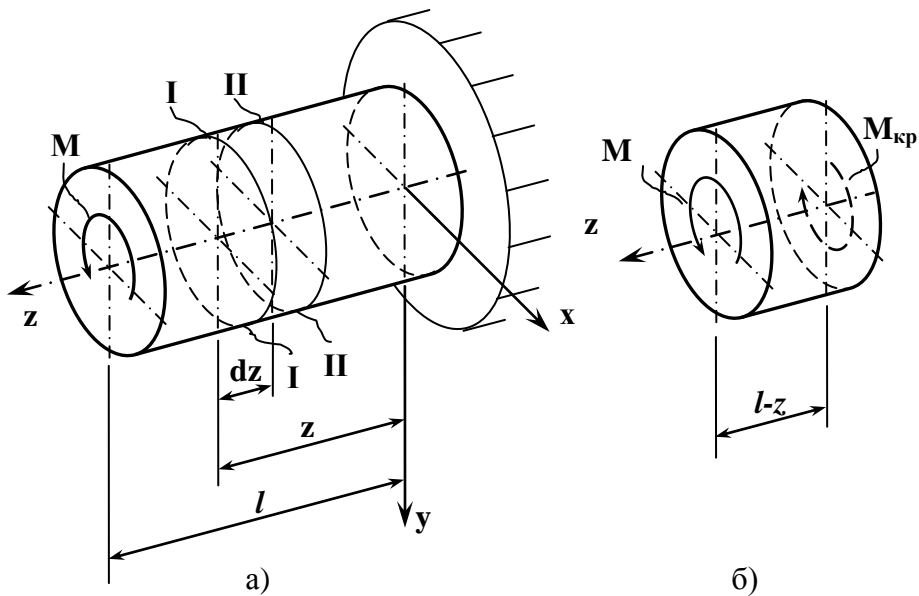


Рисунок 6.7 – Кручения вала

Щоб вивести формулу для визначення дотичних напружень, розглянемо вал, один кінець якого затиснутий, а на іншому діє скручувальний момент \mathbf{M} (рис. 6.7 а).

Січною $\mathbf{I} - \mathbf{I}$ поділимо вал на дві частини й розглянемо умови рівноваги лівої (рис. 6.7 б).

Умови рівноваги такі:

$$\sum \mathbf{M}_z = 0 : \mathbf{M}_{\text{кр}} = \mathbf{M}, \quad (6.18)$$

де зовнішній момент \mathbf{M} зрівноважує внутрішній крутильний момент $\mathbf{M}_{\text{кр}}$, утворений лише дотичними напруженнями τ (рис. 6.7 г).

$$\mathbf{M}_{\text{кр}} = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA. \quad (6.19)$$

Співвідношення (6.19) – *статичний аспект задачі*, за допомогою якого ще не можна знайти напруження.

Геометричний аспект задачі. Між суміжними перерізами $\mathbf{I} - \mathbf{I}$ та $\mathbf{II} - \mathbf{II}$ вала на відстані $d\mathbf{z}$ виділимо нескінченно малий елемент радіусом ρ (рис. 6.7 в). Під час кручення матеріал стрижня зазнає деформації зсування, тому відносне зсування γ тіла поверхні

$$\gamma = \frac{\overset{\cup}{\mathbf{BB}_1}}{d\mathbf{z}}. \quad (6.20)$$

Оскільки радіуси ρ залишаються прямими (рис. 6.7 в),

$$\overset{\cup}{\mathbf{BB}_1} = \rho d\varphi. \quad (6.21)$$

Зважаючи на це,

$$\gamma = \frac{\rho d\phi}{dz}. \quad (6.22)$$

З урахуванням цього розглянемо деформацію нескінченно малого прямокутного елемента **ABCD**, виділеного біля поверхні вала (рис. 6.8).

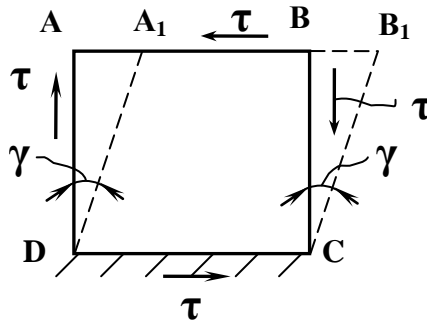


Рисунок 6.8 – Деформація зсування прямокутного елемента

Оскільки довжина сторін прямокутника після деформації майже не змінюється, вона полягає в зміні початкових кутів на кут γ . Отже, маємо умови чистого зсування. Водночас дотичні напруження, що діють по гранях прямокутника, відповідають **закону парності дотичних напружень**, тобто однакові за модулем, та умові рівноваги.

Фізичний аспект задачі. Напруження й деформації під час чистого зсування пов'язує закон Гука (6.2), з урахуванням якого та формули (6.22)

$$\tau = G\rho \frac{d\phi}{dz}. \quad (6.23)$$

Підставимо вираз (6.23) у вираз (6.19) та одержимо таку залежність:

$$M_{\text{кр}} = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA = GI_p \frac{d\varphi}{dz}, \quad (6.24)$$

де $I_p = \int_A \rho^2 dA$ – полярний момент інерції площі круглого перерізу (м^4); якщо діаметр круглого перерізу d , то $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$, а для трубчастого стрижня з внутрішнім діаметром d_B і зовнішнім d_3

$$I_p = \frac{\pi(d_3^4 - d_B^4)}{32} = \frac{\pi d_3^4 (1 - \alpha^4)}{32},$$

де $\alpha = \frac{d_B}{d_3}$;

$\frac{d\varphi}{dz}$ – відносний кут закручування нескінченно малого елемента вала.

Зі співвідношення (6.24) можна зробити висновок, що

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{\text{кр}}}{GI_p}. \quad (6.25)$$

6.5 Епюра дотичних напружень. Умови міцності й жорсткості круглого стрижня під час кручення. Кручення стрижня некруглого поперечного перерізу

Підставивши (6.25) у залежність (6.23), дістанемо формулу для визначення дотичного напруження під час кручення валів

$$\tau = \frac{M_{кр}}{I_p} \rho, \quad (6.26)$$

де ρ – відстань від центра круглого перерізу до точки, у якій визначається дотичне напруження. Епюра розподілу дотичних напружень у перерізі зображена на рисунку 6.9.

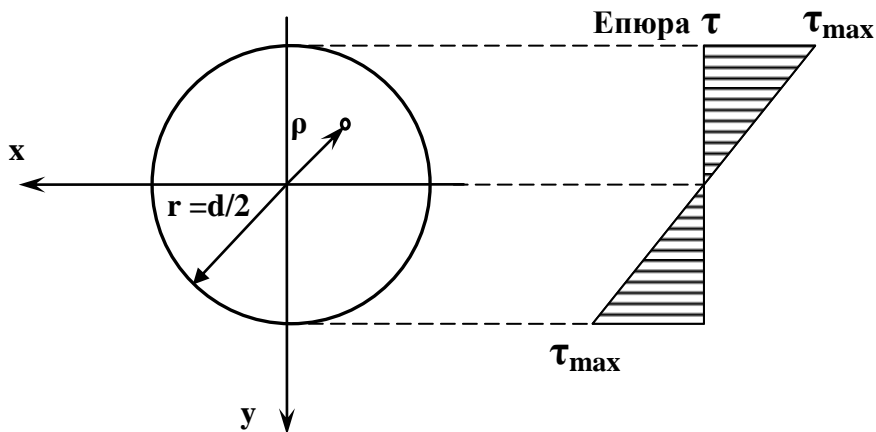


Рисунок 6.9 – Епюри дотичних напружень під час кручення круглого стрижня

Найбільші дотичні напруження дорівнюють

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}(d/2)}{I_p},$$

або

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p}, \quad (6.27)$$

де $W_p = \frac{I_p}{d/2}$ – полярний момент опору круглого перерізу (м³).

Умова міцності:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} \leq [\tau]. \quad (6.28)$$

Згідно з нею можна розв'язати три типи задач:

- 1) перевірити міцність;
- 2) визначити розміри поперечного перерізу:

$$W_p \geq \frac{M_{\text{кр}}}{[\tau]}. \quad (6.29)$$

Зауваження 5. Для круглого перерізу маємо

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}, \text{ тобто}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{кр}}}{\pi[\tau]}}; \quad (6.30)$$

- 3) визначити найдопустиміший крутильний момент:

$$[M_{\text{кр}}] \leq W_p [\tau]. \quad (6.31)$$

Умови жорсткості. Деформація під час кручення характеризується повертанням поперечних перерізів вала один щодо одного на певний кут закручування (6.25):

$$d\varphi = \frac{M_{кр}}{GI_p} dz, \quad (6.32)$$

де GI_p – жорсткість перерізу вала під час кручення ($H \cdot m^2$). Якщо закручується вал завдовжки ℓ , то взаємний кут закручування торцевих перерізів знайдемо інтегруванням виразу (6.32):

$$\varphi = \int_0^{\ell} \frac{M_{кр}}{GI_p} dz. \quad (6.33)$$

Для вала постійної жорсткості за сталого значення крутильного моменту з формули (6.33) можна визначити кут закручування за формулою

$$\varphi = \frac{M_{кр} \ell}{GI_p}. \quad (6.34)$$

Для сталі середнє значення модуля зсування, як відомо, становить $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

У разі східчастих валів повний кут закручування дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування ділянок вала:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{кр}^i \ell_i}{GI_p^i}, \quad (6.35)$$

де n – кількість ділянок вала.

Зауваження 6. Також жорсткість вала можна оцінити за відносним кутом закручування θ (м^{-1}), що становить

$$\theta = \frac{\Phi}{\ell}. \quad (6.36)$$

Підставивши у вираз (6.36) вираз (6.34), одержуємо умову жорсткості

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{GI_p} \leq [\theta], \quad (6.37)$$

де $[\theta]$ – допустиме значення щодо кута закручування.

Зауваження 7. Задача про опір крученню стрижнів некруглого поперечного перерізу складніша порівняно із задачею про кручення круглих валів, оскільки в такому разі не виконується гіпотеза плоских перерізів. Окремо розглядають кручення стрижнів прямокутного перерізу, тонкостінні стрижні відкритого профілю.

6.6 Потенціальна енергія деформації під час кручення

Якщо вал деформується в межах пропорційності між дотичними напруженнями й кутом зсування, то матеріал накопичує потенціальну енергію U , що дорівнює роботі A зовнішніх сил. У нескінченно малому елементі вала потенціальна енергія становить

$$dU = \frac{1}{2} M_{\text{кр}} d\varphi = \frac{M_{\text{кр}}^2 dz}{2GI_p}. \quad (6.38)$$

Повну потенціальну енергію деформації по всьому валу завдовжки ℓ визначають за формулою

$$U = \int_0^{\ell} \frac{M_{\text{кр}}^2 dz}{2GI_p}. \quad (6.39)$$

Для східчастих валів потенціальну енергію деформації обчислюють за формулою (6.39) окремо для кожної ділянки. Потім результати додають.

6.7 Статично невизначувані задачі під час кручення

Як приклад один раз статично невизначуваного стрижня, що зазнає кручення, розглянемо круглий стрижень, закріплений обома кінцями, навантажений скручувальним моментом M_1 у певному перерізі вала D (рис. 6.10).

За такого навантаження в місцях закріплення вала виникають реактивні моменти M_A та M_B .

Статичний аспект задачі. За умови рівноваги

$$\sum M_z = 0: M_A + M_B - M_1 = 0. \quad (6.40)$$

Геометричний аспект. Відповідно до умови задачі кут повертання перерізу B щодо A дорівнює нулю:

$$\varphi_{AB} = \varphi_{BD} + \varphi_{AD} = 0. \quad (6.41)$$

Фізичний аспект задачі. Запишемо вираз для кутів закручування. Якщо $M_{\text{кр}}^{AD} = -M_A$, $M_{\text{кр}}^{BD} = M_B$,

$$\varphi_{AD} = -\frac{M_A \cdot a}{GI_p}, \quad \varphi_{BD} = \frac{M_B \cdot b}{GI_p}, \quad (6.42)$$

де GI_p – жорсткість стрижня на зсування.

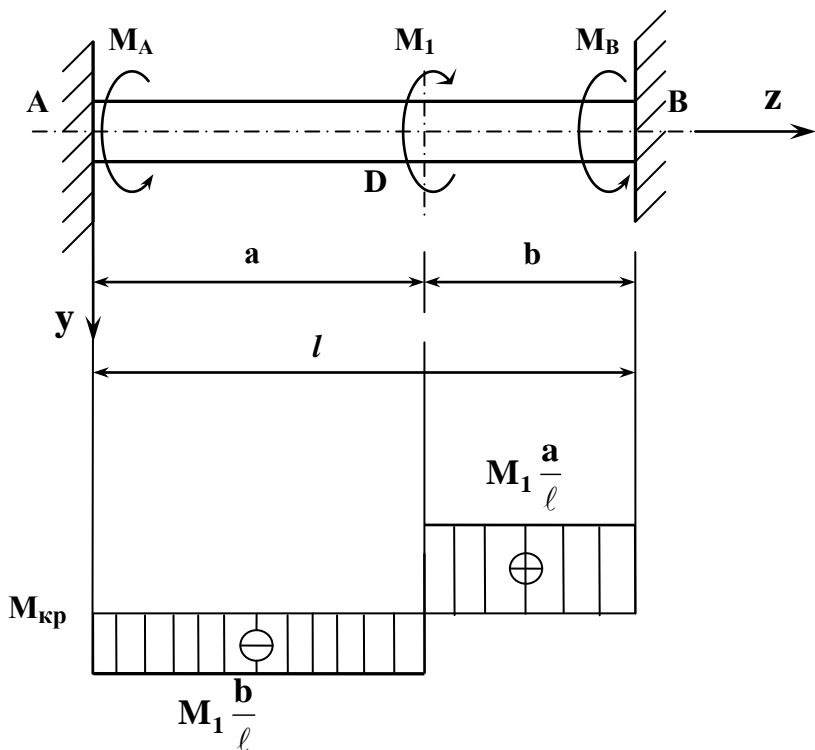


Рисунок 6.10 – Розрахункова схема статично невизначуваного стрижня під час кручення

Синтез результатів. Підставивши (6.43) у вираз (6.41), одержимо

$$\varphi_{AB} = \frac{M_B \cdot b}{GI_p} - \frac{M_A \cdot a}{GI_p} = 0 \Rightarrow M_A = \frac{b}{a} M_B. \quad (6.43)$$

З урахуванням (6.40) знайдемо

$$M_B = \frac{M_1 \cdot a}{a + b} = \frac{M_1 \cdot a}{l}, \quad (6.44)$$

$$M_A = \frac{M_1 \cdot b}{\ell}. \quad (6.45)$$

6.8 Основи розрахунку гвинтових циліндричних пружин із малим кроком

Пружини з малим кроком (рис 6.11 а) мають малий кут нахилу витка. Позначимо середній радіус витка пружини R , діаметр дроту – d , кількість витків – n . Січною площиною поділимо пружину на дві частини (рис. 6.11 б). Для визначення внутрішніх силових факторів прикладемо в центрі ваги поперечного перерізу дроту дві однакові протилежно спрямовані сили F . У такому разі з трьох діючих сил дві, позначені рисками, утворюють крутильний момент $M_{кр} = F \cdot R$, а третя буде поперечною силою.

Отже, в найбільш напруженій точці k діють найбільші дотичні напруження

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_2, \quad (6.46)$$

де дотичні напруження дорівнюють:

1) напруження від деформації зрізування:

$$\tau_1 = \frac{F}{A_{зр}} = \frac{4F}{\pi d^2} ; \quad (6.47)$$

2) напруження від деформації кручення:

$$\tau_2 = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{16 \cdot F \cdot R}{\pi d^3}. \quad (6.48)$$

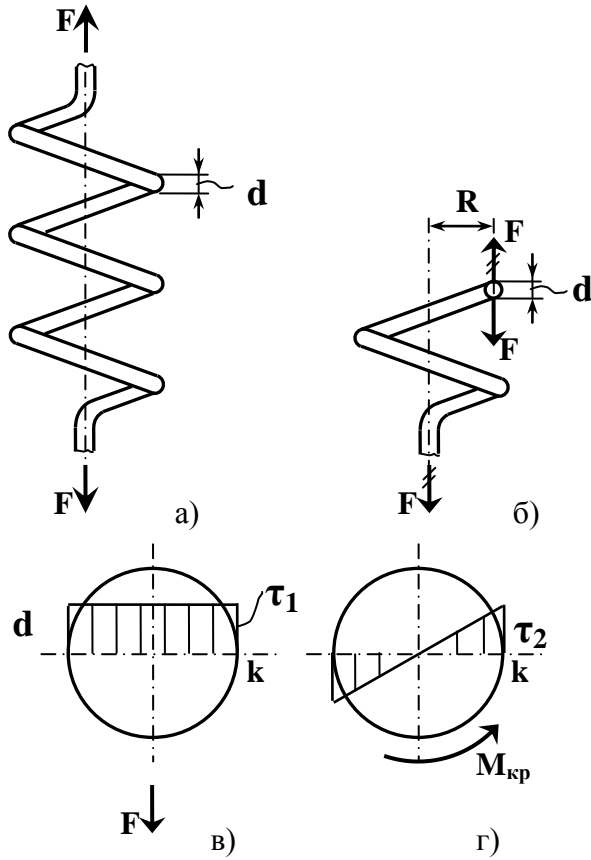


Рисунок 6.11 – Розрахункова схема гвинтової циліндричної пружини з малим кроком

Отже,

$$\tau_{\max} = \frac{16 \cdot F \cdot R}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4R}\right), \quad (6.49)$$

або

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} \left(1 + \frac{d}{4R} \right). \quad (6.50)$$

Якщо $\frac{d}{4R} \leq 0,05$, то величиною $\frac{d}{4R}$ можна знехтувати порівняно з одиницею, тобто враховувати лише напруження внаслідок кручення витка. За такого спрощення нескладно обчислити деформацію пружини, тобто її осідання, що позначимо λ .

В умовах пружної роботи пружини робота розтягальної сили дорівнює

$$A = \frac{1}{2} F \lambda. \quad (6.51)$$

Потенціальна енергія деформації від скручування витків становить

$$U_{\text{кр}} = \frac{M_{\text{кр}}^2 \ell}{2GI_p} = \frac{\pi R^3 n F^2}{GI_p}, \quad (6.52)$$

де $\ell = 2\pi \cdot R \cdot n$ – довжина дроту;

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \text{ – полярний момент інерції перерізу дроту.}$$

Ураховуючи умову $A = U_{\text{кр}}$, обчислимо осідання:

$$\lambda = \frac{64FR^3 n}{Gd^4}. \quad (6.53)$$

Характеристикою пружини є жорсткість C . **Жорсткість пружини** – це сила, що розтягає її на одиницю довжини.

$$C = \frac{Gd^4}{64R^3n}. \quad (6.54)$$

За відомої жорсткості визначення осідання спрощується:

$$\lambda = F / C. \quad (6.55)$$

Іншою характеристикою пружини є **піддатливість**, тобто деформація від сили $F = 1$:

$$\Delta = \frac{64R^3n}{Gd^4}. \quad (6.56)$$

Між жорсткістю й піддатливістю простежується така залежність:

$$C = \frac{1}{\Delta}. \quad (6.57)$$

Запитання для самостійного контролю

1 Дайте визначення відносного зсування або кута зсування.

2 Сформулюйте закон Гука під час чистого зсування.

3 Наведіть залежність між пружними сталими ізотропного матеріалу.

- 4 Чому дорівнюють потенціальна й питома потенціальна енергії деформації під час чистого зсування?
- 5 Як розраховують з'єднання на зрізування?
- 6 Яку деформацію бруса називають крученням?
- 7 Що таке вал?
- 8 Розкрийте сутність гіпотези плоских перерізів.
- 9 Сформулюйте правило знаків для внутрішнього силового фактору, що виникає під час кручення стрижня.
- 10 Доведіть закон парності дотичних напружень.
- 11 Який вигляд має епюра розподілу дотичних напружень у перерізі вала круглого й кільцевого поперечних перерізів?
- 12 Поясніть умову міцності під час кручення круглого стрижня.
- 13 Поясніть умову жорсткості під час кручення круглого стрижня.
- 14 Чому дорівнює потенціальна енергія деформації під час кручення?
- 15 Як визначити жорсткість і піддатливість гвинтової циліндричної пружини з малим кроком?

РОЗДІЛ 7
ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

7.1 Види геометричних характеристик
плоских перерізів

На рисунку 7.1 зображено бруси, що чинять опір згинанню від дії сили F . Їх площі перерізів A та довжини однакові. Зрозуміло, що опір брусів на рисунку 7.1 а, б буде більшим, ніж брусів на рисунку 7.1 в, г. Для доведення цього положення недостатньо знати лише площу перерізів A .

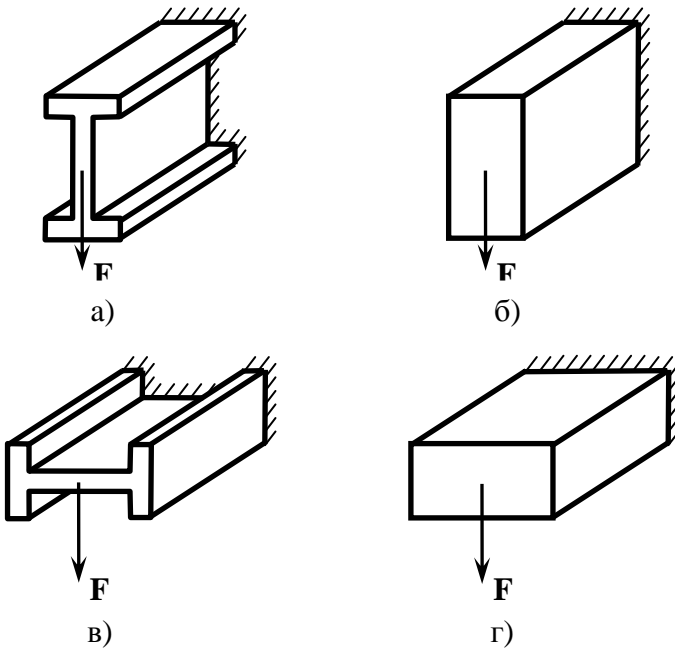


Рисунок 7.1 – Опір згинанню брусів різних перерізів

Розглянемо довільний переріз бруса, обмежений контуром Γ і віднесений до довільної системи координат xOy (рис. 7.2). Виділимо елемент площі dA , положення якого визначається координатами x, y .

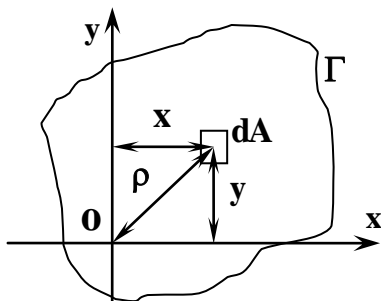


Рисунок 7.2 – Довільний переріз бруса, обмежений контуром Γ і віднесений до довільної системи координат xOy

Відстань ρ від центра площинки dA до точки O (полюса) пов'язана з координатами x, y співвідношенням

$$\rho^2 = x^2 + y^2. \quad (7.1)$$

Визначення 1. Якщо в межах контуру задати довільну функцію $f(x, y)$, то інтеграл

$$I = \int_A f(x, y) dA \quad (7.2)$$

буде *моментом площі A*.

У курсі опору матеріалів застосовують такі моменти площ, як:

– *площа перерізу* (m^2, cm^2):

$$A = \int_A dA ; \quad (7.3)$$

– *статичні моменти* площі щодо осей x, y (m^3, cm^3):

$$S_x = \int_A y dA , \quad S_y = \int_A x dA ; \quad (7.4)$$

– *осеві моменти інерції* площі перерізу щодо осей x, y (m^4, cm^4):

$$I_x = \int_A y^2 dA , \quad I_y = \int_A x^2 dA ; \quad (7.5)$$

– *відцентровий момент* інерції площі перерізу щодо осей ox, oy (m^4, cm^4):

$$I_{xy} = \int_A xy dA ; \quad (7.6)$$

– *полярний момент інерції* площі перерізу щодо полюса O :

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_y + I_x . \quad (7.7)$$

Будь-яку площу перерізу можна поділити на кілька частин площами A_1, A_2, \dots, A_n (рис. 7.3). У такому разі загальна площа перерізу дорівнює сумі площ усіх складових частин, тобто

$$A = \sum_{i=1}^n A_i .$$

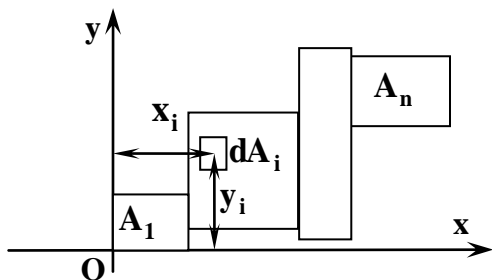


Рисунок 7.3 – Площа перерізу, поділена на кілька частин

Тоді для статичних моментів виконуються тотожності

$$S_x = \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} y_i dA_i, \quad (7.8)$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} x_i dA_i. \quad (7.9)$$

Для осьових моментів інерції

$$I_x = \sum_{i=1}^n I_x^i = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} y_i^2 dA_i, \quad (7.10)$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n I_y^i = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} x_i^2 dA_i. \quad (7.11)$$

Для відцентрового та полярного моментів інерції

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n I_{xy}^i = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} x_i y_i dA_i, \quad (7.12)$$

$$I_p = \sum_{i=1}^n I_p^i = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \rho_i^2 dA_i. \quad (7.13)$$

Зауваження 1. Можливість подати момент площі як суму моментів площ її складових частин використовують для обчислення моментів площ перерізів складної форми.

Зауваження 2. Як виходить з формул (7.4), (7.6), статичний момент площі та відцентровий момент інерції щодо осі симетрії дорівнюють нулю.

7.2 Залежності між моментами площ під час перетворення координат

У першому параграфі ми припускали, що положення осей координат xOy було довільним щодо перерізу. Проте під час розв'язання задач про опір бруса потрібно обчислювати моменти щодо певного положення осей. Для цього потрібно перейти від однієї системи координат до іншої за допомогою перенесення й повертання осей координат.

Паралельне перенесення осей координат зображене на рисунку 7.4.

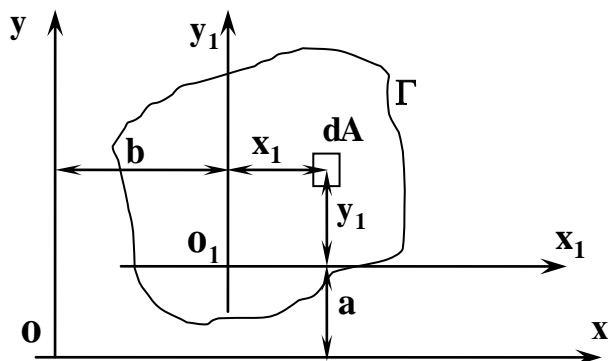


Рисунок 7.4 – Паралельне перенесення осей координат

Координати площинки $d\mathbf{A}$ в розглянутих системах координат такі:

$$\begin{aligned}x &= x_1 + b, \\y &= y_1 + a.\end{aligned}\tag{7.14}$$

Підставивши (7.14) у (7.4), одержимо:

$$\begin{aligned}S_x &= \int_A y dA = \int_A (y_1 + a) dA = \\&= \int_A y_1 dA + \int_A a dA = S_{x_1} + aA,\end{aligned}\tag{7.15}$$

$$S_y = S_{y_1} + bA.\tag{7.16}$$

де S_{x_1} , S_{y_1} – статичні моменти площ щодо осей x_1 та y_1 відповідно.

Формули (7.15), (7.16) можна переписати:

$$S_{x_1} = S_x - aA,\tag{7.17}$$

$$S_{y_1} = S_y - bA.\tag{7.18}$$

Знайдемо таке положення осей x_1 та y_1 , щодо яких статичні моменти перерізу дорівнюють нулю, тобто розглянемо рівняння

$$S_x - a_c A = 0,$$

$$S_y - b_c A = 0$$

і визначимо координати точки c , через які проходять шукані осі:

$$x_c = b_c = \frac{S_y}{A}, \quad y_c = a_c = \frac{S_x}{A}.\tag{7.19}$$

У такому разі точку c називають **центром ваги перерізу**, осі x_c, y_c – **центральною системою координат**.

Отже, **статичні моменти** S_x, S_y можна записати як

$$S_x = y_c A, \quad S_y = x_c A. \quad (7.20)$$

Якщо переріз площею A поділений на n частин із площинами A_i ($i = 1, 2, \dots, n$), то **координати центра ваги перерізу** можна знайти за такими формулами:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{c_i} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{c_i} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad (7.21)$$

де x_{c_i}, y_{c_i} – координати центра ваги площі A_i .

Осьові моменти інерції площі A щодо осей координат x, y (рис. 7.4) запишемо як

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA = \int_A (y_1 + a)^2 dA = \\ &= \int_A y_1^2 dA + 2 \int_A y_1 \cdot a dA + \int_A a^2 dA = \\ &= I_{x_1} + 2a S_{x_1} + a^2 A. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Аналогічно

$$I_y = I_{y_1} + 2b S_{y_1} + b^2 A. \quad (7.23)$$

Якщо осі x_1 та y_1 збігаються з центральними осями x_c , y_c , то

$$S_{x_1} = S_{y_1} = 0, \quad (7.24)$$

а моменти інерції

$$I_{x_1} = I_{x_c}, \quad I_{y_1} = I_{y_c}. \quad (7.25)$$

З урахуванням (7.24), (7.25) формули (7.22), (7.23) матимуть такий вигляд:

$$I_x = I_{x_c} + a^2 A, \quad (7.26)$$

$$I_y = I_{y_c} + b^2 A. \quad (7.27)$$

Зауваження 3. За аналогією з рівняннями (7.22), (7.23) нескладно записати формулу для визначення відцентрового моменту інерції:

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + abA. \quad (7.27^*)$$

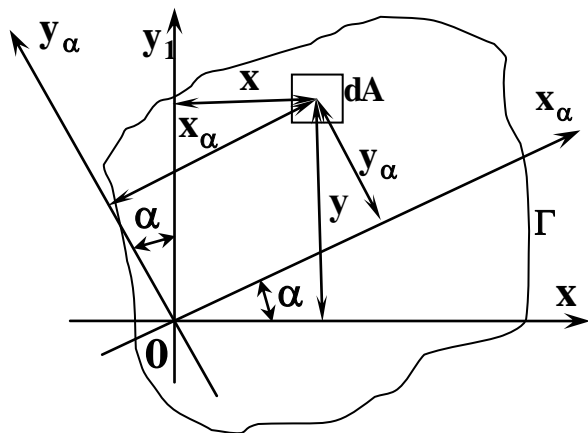


Рисунок 7.5 – Повертання осей координат

Обчислимо моменти інерції щодо осей x_α , y_α , повернутих до заданих осей x та y на кут α .

Зауваження 4. Кут α вважають додатним, якщо система $x_\alpha 0 y_\alpha$ повернута проти годинникової стрілки. Координати елементарної площинки dA в повернутій системі координат пов'язані з координатами в початковій системі такими залежностями:

$$\begin{cases} x_\alpha = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha; \\ y_\alpha = -x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha. \end{cases} \quad (7.28)$$

Відповідно до загальних залежностей для статичних моментів перерізів у результаті заміни x_α , y_α за формулою (7.28)

$$\begin{cases} S_{x_\alpha} = \int_A y_\alpha dA = S_x \cdot \cos \alpha - S_y \cdot \sin \alpha, \\ S_{y_\alpha} = S_y \cos \alpha + S_x \sin \alpha. \end{cases} \quad (7.29)$$

Після цього обчислимо момент інерції перерізу щодо повернутих осей:

$$\begin{aligned} I_{x_\alpha} &= \int_A y_\alpha^2 dA = \int_A (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 dA = \\ &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha, \\ I_{y_\alpha} &= \int_A x_\alpha^2 dA = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = \\ &= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha, \\ I_{x_\alpha y_\alpha} &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cdot \cos 2\alpha, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} I_{x_\alpha} &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha, \\ I_{y_\alpha} &= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha, \\ I_{x_\alpha y_\alpha} &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Зауваження 5. Поєднавши ліві й праві частини двох перших формул (7.30), одержимо важливу залежність

$$I_{x_\alpha} + I_{y_\alpha} = I_x + I_y. \quad (7.31)$$

Ці суми є *інваріантом* – сталою величиною. Запишемо, що інваріантом можна вважати полярний момент інерції

$$I_p = I_x + I_y.$$

7.3 Головні осі й моменти інерції

Визначення 2. Найбільше значення I_{\max} одного з осьових моментів інерції I_{x_α} , I_{y_α} і відповідно найменше значення другого моменту інерції I_{\min} називають *головними*. Відповідні до них осі називають *головними осями інерції*.

Зрозуміло, що згідно з (7.31)

$$I_{x_\alpha} + I_{y_\alpha} = I_{\max} + I_{\min}.$$

Визначення 3. Якщо головні осі проходять через центр ваги, їх називають *головними центральними осями*, а моменти інерції щодо таких осей – *головними центральними моментами інерції*.

Положення головних осей інерції можна знайти, поєднавши такі умови функцій на екстремум:

$$\frac{dI_{x\alpha}}{d\alpha} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{dI_{y\alpha}}{d\alpha} = 0. \quad (7.32)$$

Підставивши рівняння (7.30) у (7.32), одержимо

$$\frac{dI_{x\alpha}}{d\alpha} = 2I_{x\alpha y\alpha} = 0. \quad (7.33)$$

Отже, відцентровий момент інерції перерізу щодо головних осей дорівнює нулю:

$$I_{x\alpha y\alpha} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = 0.$$

Зважаючи на це,

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (7.34)$$

Значення кута $\alpha = \alpha_0$ відповідає виконанню умови

$$I_{\max} + I_{\min} = I_x + I_y. \quad (7.35)$$

Зробивши відповідні перетворення, тобто визначивши $I_{x0} = I_{\max}$, $I_{y0} = I_{\min}$, одержимо залежність

$$I_{x0} = I_{\max} = \frac{1}{2} [(I_x + I_y) \pm \sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}]. \quad (7.36)$$

Зауваження 6. Моменти інерції перерізів є геометричними характеристиками, що дають змогу порівняти жорсткість брусів із заданого матеріалу з їх опором зовнішнім силам.

Зауваження 7. Опір бруса згинанню й крученню характеризують *моментами опору* перерізів:

1) *осьовими*:

$$W_x = \frac{I_x}{|y_{\max}|}, \quad W_y = \frac{I_y}{|x_{\max}|}; \quad (7.37)$$

2) *полярними*:

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}. \quad (7.38)$$

7.4 Графічні побудови геометричних характеристик перерізів

Візьмемо ортогональну систему координат і вздовж горизонтальної осі послідовно в певному масштабі відкладемо відрізки (рис. 7.6) **ОА** та **ОВ**, що дорівнюють I_x та I_y відповідно.

З точки **В** уздовж вертикальної осі відкладемо відрізок **ВД**, що дорівнює I_{xy} .

Із точки **С** радіусом **CD** накреслимо коло. Точки перетину кола з горизонтальною віссю дають значення I_{\max} , I_{\min} , що відповідають співвідношенню

$$I_{\max}^{\min} = \frac{1}{2} [(I_x + I_y) \pm \sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}].$$

Водночас очевидна інваріантність суми осевих моментів інерції:

$$I_{\max} + I_{\min} = I_x + I_y .$$

Обидва вирази для осевих моментів інерції можна репрезентувати як

$$I_y = \int_A x^2 dA = i_y^2 A ,$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = i_x^2 A .$$
(7.39)

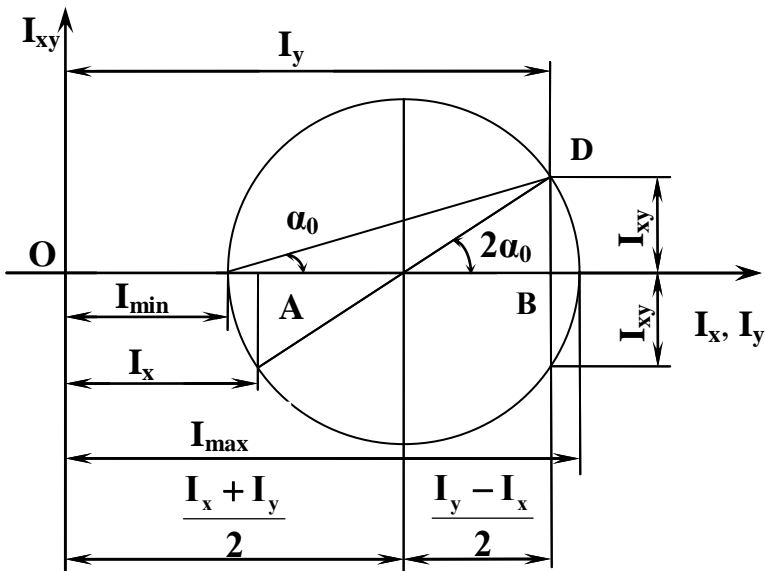


Рисунок 7.6 – Коло Мора

Визначення 4. Величини

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \quad i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad (7.40)$$

називають *радіусами інерції*.

Головними радіусами інерції в такому разі є

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{A}}, \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}. \quad (7.41)$$

Визначення 5. Еліпс, побудований на головних осях x_0 і y_0 відповідно до півосей i_{\max} та i_{\min} називають *еліпсом інерції*.

Запитання для самостійного контролю

1 Дайте визначення площі перерізу. У яких одиницях її вимірюють?

2 Дайте визначення статичним моментам площі перерізу. У яких одиницях їх вимірюють?

3 Дайте визначення осьовим і відцентровому моментам інерції перерізів. У яких одиницях їх вимірюють?

4 Дайте визначення полярному моменту інерції перерізу. У яких одиницях його вимірюють?

5 Як обчислюють площу, статичні моменти площі, осьові й відцентровий моменти інерції складених перерізів?

6 Як паралельно перенести осі координат для обчислення статичних моментів площі перерізу?

7 Дайте визначення центра ваги перерізу.

8 Як паралельно перенести осі координат для обчислення осьових і відцентрового моментів інерції перерізу?

9 Дайте визначення центральних моментів інерції перерізу.

10 Як повернути осі координат для обчислення статичних моментів площі перерізу?

11 Дайте визначення головних моментів інерції перерізу.

12 Як повернути осі координат для обчислення осьових та відцентрового моментів інерції перерізу?

13 Як визначити величину й положення головних моментів інерції перерізу?

14 Що таке осьові та полярний моменти опору перерізу. У яких одиницях їх вимірюють?

15 Як графічно побудувати сукупність усіх можливих осьових і відцентрових моментів інерції перерізу?

РОЗДІЛ 8 ПЛОСКЕ ЗГИНАННЯ БАЛКИ (ЗАДАЧА МІЦНОСТІ)

8.1 Основні поняття. Будова опор балок. Розрахункова схема

Визначення 1. *Балками* називають прямолінійні стрижні, що функціонують на згинання.

На початку будемо вважати, що всі задані навантаження діють в одній площині, яку називають *силовою*. Водночас вона збігається з однією з головних площин балки. Такий випадок будемо називати *плоским згинанням*.

На розрахунковій схемі балку прийнято замінювати на її вісь (рис. 8.1). У такому разі всі навантаження повинні зводитися до осі балки.

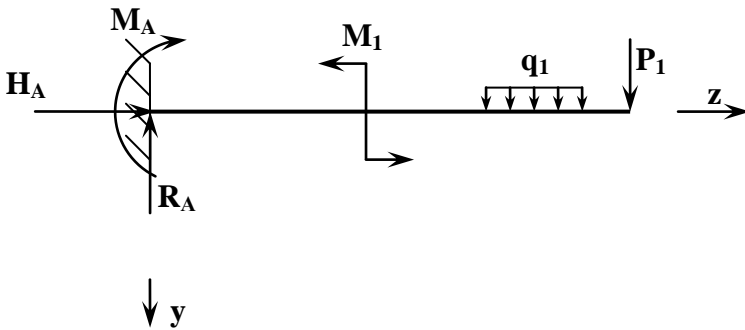
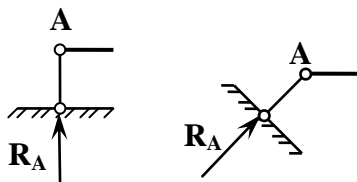


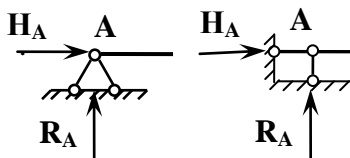
Рисунок 8.1 – Консольна балка

Здебільшого балки мають ті чи інші опорні пристрої – *опори*. Під час розрахунку за схематичним зображенням їх поділяють три основні типи.

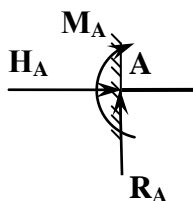
1 Шарнірно-рухома опора:



2 Шарнірно-нерухома опора:



3 Затиснення (жорстке закріплення):



Усі реакції й моменти вважають прикладеними в точці **A** – центрі ваги опорного перерізу.

Балку, зображену на рисунку 8.2 а, називають **простою** (однопрогонною, двохопоруною), а відстань l між опорами – **прогоном**.

Консоль – це балка, жорстко закріплена одним кінцем, що немає інших опор (рис. 8.1).

Балка *статично визначувана*, якщо кількість невідомих реакцій не перевищу трьох. В іншому разі вона *статично невизначувана*. Очевидно, що балки на рисунках 8.1, 8.2 а, б статично визначувані.

Балку, зображену на рисунку 8.2 в, називають *нерозрізуваною*. Вона *статично невизначувана*, оскільки має п'ять невідомих реакцій.

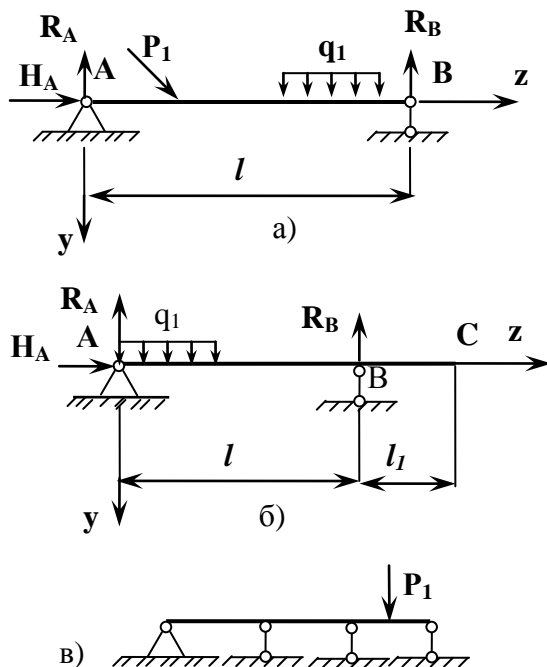


Рисунок 8.2 – Приклади балок

Три невідомих опорних реакції двоопорної балки знаходять із таких трьох рівнянь рівноваги (рис. 8.2 а):

$$\begin{aligned} \sum z &= 0; \\ \sum M_A &= 0 : R_B = \dots ; \\ \sum M_B &= 0 : R_A = \dots . \end{aligned} \quad (8.1)$$

Для контролю можна використовувати умову

$$\sum y = 0. \quad (8.2)$$

8.2 Внутрішні зусилля в поперечних перерізах. Правило знаків. Епюри внутрішніх зусиль

Під час плоского згинання все навантаження зосереджене в головній площині стрижня YOZ (рис. 8.1), тому не є нульовими лише три внутрішні силові фактори: N , Q_y , M_x . Далі позначатимемо їх N , Q , M відповідно.

У балці під навантаженням, перпендикулярним до її осі, поздовжня сила N також дорівнює нулю. Далі вважатимемо, що в будь-якому перерізі балки виникають два внутрішні зусилля: поперечна сила Q і згинальний момент M .

Правила знаків Q та M у балках:

а) поперечна сила Q у перерізі додатна, якщо її вектори намагаються обертати частини розсіченої балки за годинниковою стрілкою (рис. 8.3);

б) згинальний момент M у перерізі додатний, якщо він спричиняє стискання у верхніх волокнах балки й напружений так, як зображено на рисунку 8.3.

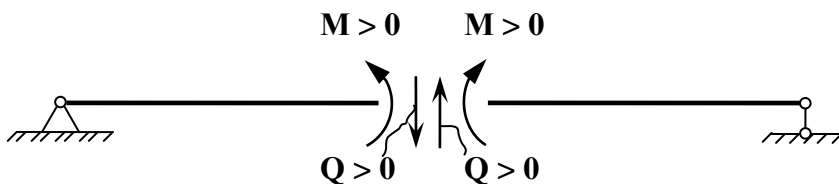


Рисунок 8.3 – Правила знаків Q та M у балках

Розглянемо порядок побудови епюр Q та M для найпростіших варіантів навантаження балок.

Приклад 1. На рисунку 8.4 балка має лише одну характерну ділянку AB , $1 - 1$: $0 \leq z \leq \ell$.

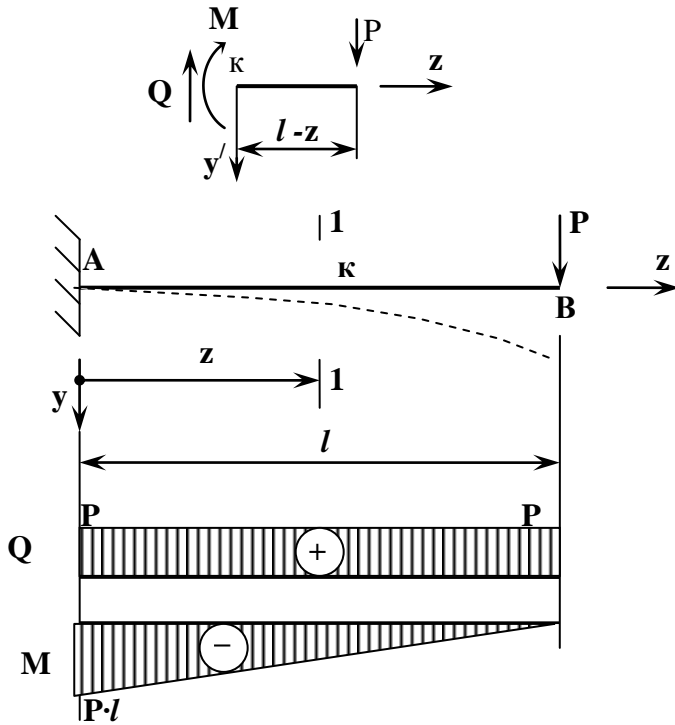


Рисунок 8.4 – Розрахункова схема консольної балки (приклад 1)

Визначимо Q , M у довільному перерізі з координатою z :

$$\begin{aligned} \sum y' = 0 : Q(z) &= P; \\ \sum M_{\kappa} = 0 : M(z) &= -P(\ell - z); \\ z = 0 : Q &= P, \quad M(0) = -P \cdot \ell; \\ z = \ell : Q &= P, \quad M(\ell) = 0. \end{aligned}$$

Побудовані епюри Q і M зображені на рисунку 8.4.

Приклад 2. На рисунку 8.5 одна характерна ділянка **AB, 1 – 1: $0 \leq z \leq \ell$** .

Літерою **q** позначено інтенсивність рівномірно розподіленого навантаження.

Визначимо **Q, M** у довільному перерізі з координатою **z**:

$$\sum y' = 0: Q = q(\ell - z) = R' ;$$

$$\sum M_{\kappa} = 0: M = R' \frac{(\ell - z)}{2} = -q \frac{(\ell - z)^2}{2} ;$$

$$z = 0: Q(0) = q\ell, \quad M(0) = -q \frac{\ell^2}{2} ;$$

$$z = \ell: Q(\ell) = 0, \quad M(\ell) = 0 .$$

Щоб розрахувати екстремальне значення згинального моменту, прирівняємо до нуля першу похідну від згинального моменту **M(z)** по абсцисі **z** перерізу:

$$\frac{dM(z)}{dz} = -q(\ell - z) = -Q = 0 .$$

$$z_{\text{ext}} = \ell .$$

Тобто екстремальні значення **M** будуть на кінцях балки. Епюра **Q** є прямою лінією, а епюра **M** змінюється згідно із законом квадратної параболи.

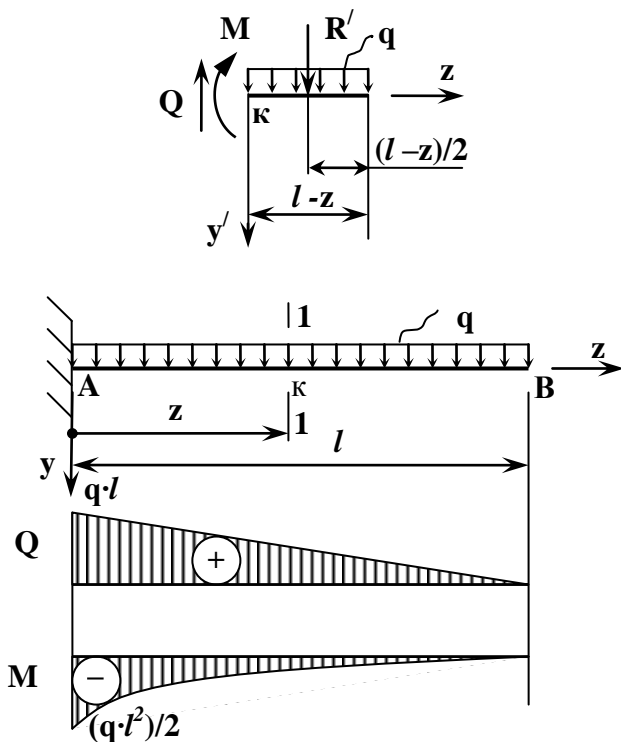


Рисунок 8.5 – Розрахункова схема консольної балки (приклад 2)

Зауваження 1. Якщо розподілене навантаження q вважати додатним, коли воно спрямоване вгору, тоді виконуються такі *диференціальні залежності*:

$$\frac{dM}{dz} = Q, \quad \frac{d^2M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q. \quad (8.3)$$

Формули (8.3) дають змогу встановити певні особливості епюр поперечних сил та згинальних моментів і визначити правила перевірки зазначених епюр.

8.3 Поняття про чисте згинання. Основні гіпотези

Розглянемо приклад чистого плоского згинання балки (рис. 8.6 а). Із шести внутрішніх силових факторів, що можуть виникати в її поперечних перерізах під час згинання загалом, під час *чистого плоского згинання* не дорівнює нулю лише згинальний момент M .

Статичний аспект задачі. Проведемо поперечний переріз $m - m$ на довільній відстані z від початку координат (рис. 8.6 а). Виділимо в перерізі елемент площі dA , координати якого x та y . Загалом в елементі могли б виникати нормальні напруження σ і дотичні напруження τ . Проте під час чистого згинання всі зусилля й моменти, пов'язані з дотичними напруженнями Q_x , Q_y та $M_{кр}$, дорівнюють нулю.

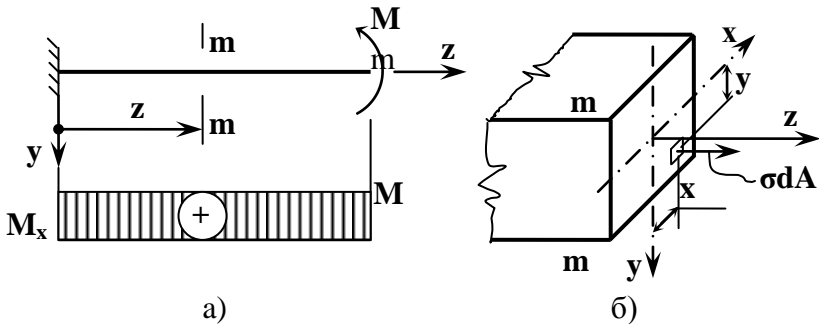


Рисунок 8.6 – Згинальні моменти в довільному перерізі балки, утворені нормальними напруженнями

Але для цього прикладу в перерізах діє лише один згинальний момент $M_x = M$, тому актуальні зазначені далі інтегральні співвідношення.

$$\begin{aligned}
 \int_A \sigma dA &= N = 0, \\
 \int_A \sigma \cdot x dA &= M_y = 0, \\
 \int_A \sigma \cdot y dA &= M_x = M.
 \end{aligned}
 \tag{8.4}$$

Геометричний аспект задачі. Розглянемо картину деформації балки під час чистого згинання. Досліди, проведені на еластичних моделях (рис. 8.7 а, б), показують, що нанесена на поверхню моделі прямокутна сітка ліній (рис. 8.7 а) під час чистого згинання деформується так: поздовжні лінії викривлюються по дузі кола.

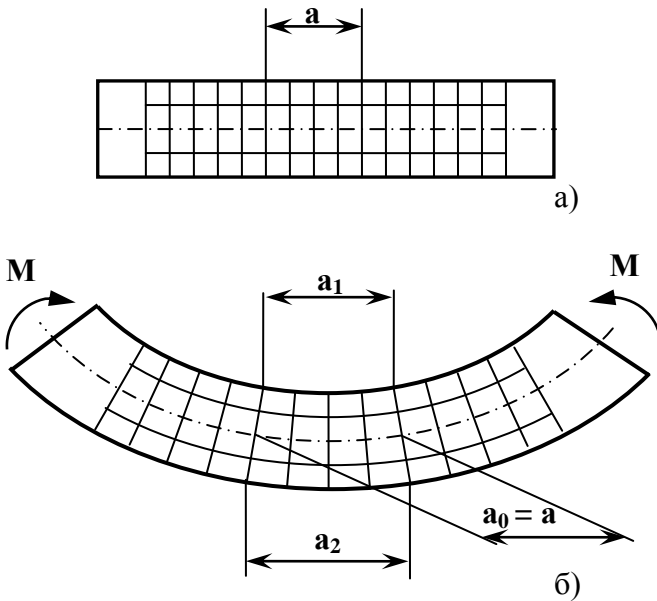


Рисунок 8.7 – Чисте згинання стрижня

У такому разі виконується *гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі)*: під час чистого згинання поперечні перерізи балки залишаються плоскими й повертаються так, що залишаються нормальними до зігнутої осі балки, про що свідчать вертикальні лінії сітки, які залишаються прямими та перетинаються.

Отже, під час чистого згинання верхні поздовжні волокна балки коротшають (рис. 8.7 б): $a_1 < a$, а нижні – подовжуються: $a_2 > a$. Але є волокна, довжина яких під час згинання залишається незмінною ($a_0 = a$).

Визначення 2. Сукупність волокон, що не змінюють своєї довжини під час згинання балки, становлять її *нейтральний шар*. Кожний поперечний переріз балки перетинається з нейтральним шаром по прямій, що називають *нейтральною лінією (н. л.)* перерізу.

8.4 Нормальні напруження під час згинання

Виділимо елемент балки двома суміжними поперечними перерізами $m - m$, $n - n$, розміщеними один від одного на відстані dz . Елемент $a_0 b_0$ нейтрального шару в результаті дії M перетворюється на дугу $a'_0 b'_0$ із радіусом кривини ρ , а волокно ab – на криволінійне волокно $a_1 b_1$ із радіусом кривини $\rho + y$. Відносне подовження цього волокна

$$\varepsilon = \frac{a_1 b_1 - ab}{ab} . \quad (8.5)$$

Але $a_1 b_1 = (\rho + y)d\varphi$ та $ab = dz$, тому

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\varphi - dz}{dz} . \quad (8.6)$$

З урахуванням того, що $a'_0 b'_0 = a_0 b_0 = \rho d\varphi = dz$, вираз (8.6) спрощується до

$$\varepsilon = y \frac{d\varphi}{dz} = \frac{y}{\rho}. \quad (8.7)$$

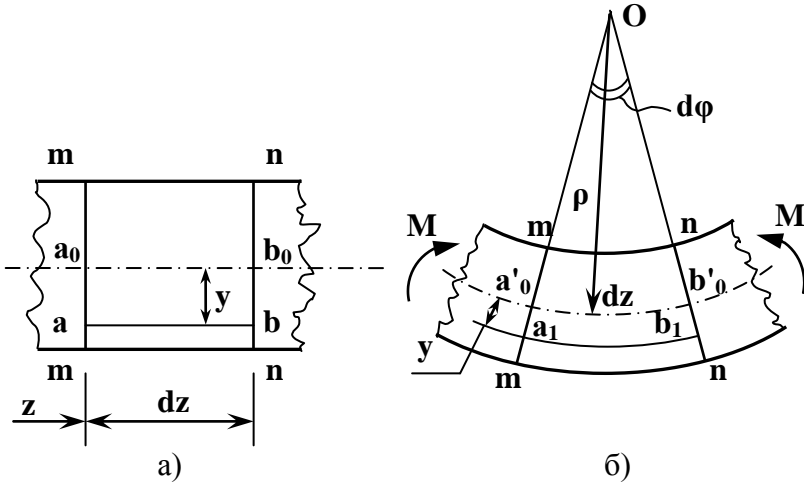


Рисунок 8.8 – Лінійні деформації під час чистого згинання стрижня

Фізичний аспект задачі. Припускають, що волокна матеріалу розміщені вздовж балки і не тиснуть одне на одного. Отже, волокно **ab** перебуває в лінійному напруженому стані – зазнає простого розтягання або стискання. Закон Гука для волокна має вигляд

$$\varepsilon = \sigma / E. \quad (8.8)$$

Синтез результатів. Підставимо (8.7) у (8.8):

$$\sigma = \frac{E \cdot y}{\rho}. \quad (8.9)$$

Підставляємо рівняння (8.9) у третє рівняння (8.4). Якщо E та ρ сталі величини, одержимо

$$M = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA . \quad (8.10)$$

Ураховуючи, що $\int_A y^2 dA = I_x$ – момент інерції щодо осі x , останню формулу можна переписати так:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x} , \quad (8.11)$$

де EI_x – *жорсткість перерізу балки під час згинання* ($N \cdot m^2$).

Нарешті, підставивши вираз (8.11) у формулу (8.9), знайдемо

$$\sigma = \frac{My}{I_x} . \quad (8.12)$$

Зауваження 1. Формулу (8.12) уперше вивів французький учений К. Нав'є. Вона дає змогу визначити нормальні напруження під час чистого згинання балки в будь-якій точці її перерізу.

Тепер з'ясуємо, де в перерізі розміщена вісь x – нейтральна лінія перерізу. Для цього підставимо (8.12) у перші дві формули (8.4):

$$N = \frac{M}{I_x} \int_A y dA = 0, \quad M_y = \frac{M}{I_x} \int_A x \cdot y \cdot dA = 0 .$$

Оскільки $\frac{M}{I_x} \neq 0$ і

$$\int_A y dA = S_x, \quad \int_A x \cdot y \cdot dA = I_{xy},$$

можна стверджувати, що

$$S_x = 0, \quad I_{xy} = 0. \quad (8.13)$$

Відповідно до рівнянь (8.13) x та y – головні центральні осі перерізу.

З формули (8.12) можна зробити висновок, що **максимальні напруження** σ_{\max} виникають у найбільш віддалених від **нейтральної лінії** волокнах, тобто

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x}, \quad (8.14)$$

де $W_x = \frac{I_x}{|y_{\max}|}$ – **осьовий момент опору** (m^3, cm^3).

8.5 Дотичні напруження під час згинання. Формула Журавського

Під час деформації чистого згинання в поперечних перерізах бруса виникають лише внутрішні згинальні моменти, що викликають нормальні напруження σ (8.12). У разі поперечного згинання (рис. 8.9 а) у перерізах бруса виникають не лише згинальні моменти M (рис. 8.9 в), а й поперечні сили Q (рис. 8.9 б).

Сила Q є інтегральною характеристикою інтенсивності внутрішніх зусиль зсування, тобто дотичних напружень τ (рис. 8.9 д), що виникають у площині перерізу (рис. 8.9 г) і супроводжуються появою куткових деформацій зсування.

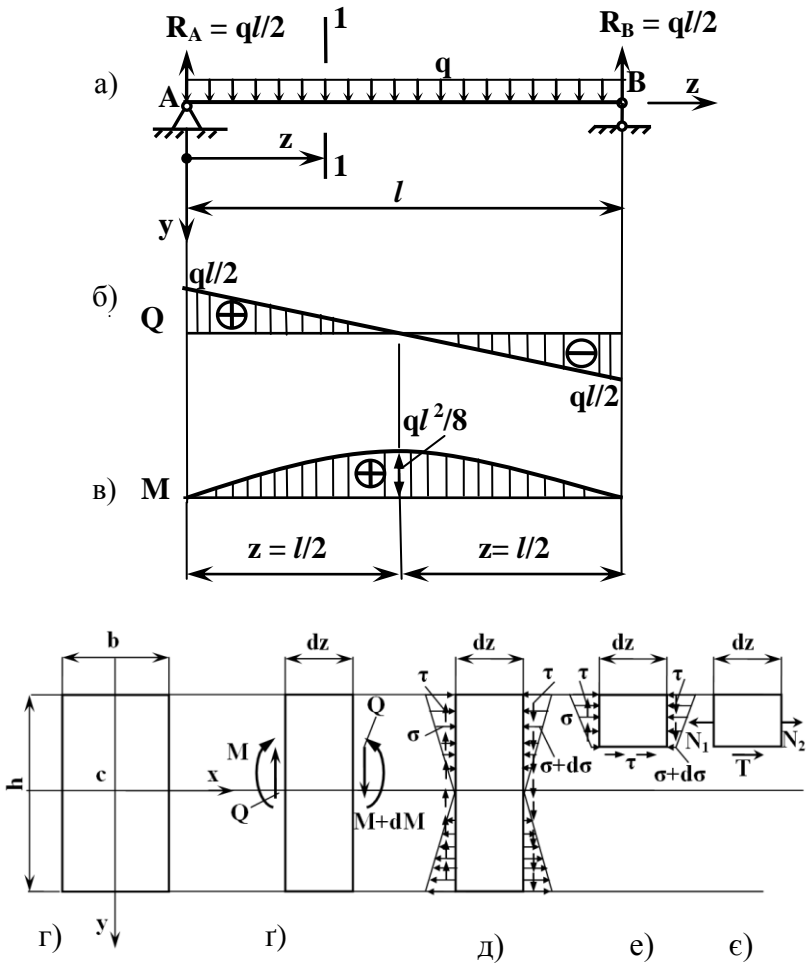


Рисунок 8.9 – Розрахункова схема двохарнірної балки

Оскільки дотичні напруження розподілені за перерізом нерівномірно, нерівномірно розподіленими будуть і деформації зсування. Це означає, що під час деформації поперечного згинання, на відміну від чистого згинання, поперечні перерізи бруса не залишаються плоскими, а викривлюються (депланують).

Під час чистого згинання балки відповідно до гіпотези плоских перерізів вважають, що кожне поздовжнє волокно залишається перпендикулярним до поперечного перерізу. Це означає відсутність деформацій зсування γ в площині YZ . Знайти дотичні напруження τ за допомогою закону Гука, як це було зроблено раніше під час визначення нормальних напружень, неможливо, тому що $\tau = G \gamma$, $\gamma = 0$. Але під час поперечного згинання балки, як уже було доведено, $Q \neq 0$, $\tau \neq 0$. Одержане протиріччя впливає з гіпотези плоских перерізів, відповідно до якої не враховують деформації зсування.

Питання розподілу напружень τ по перерізу балки певний час залишалось невивченим. Для наближеного оцінювання величини τ припускали, посилаючись на К. Нав'є, що вони рівномірно розподілені в площі A поперечного перерізу й становлять $\tau = Q / A$. Блискуче вирішення цього питання запропонував російський інженер Д. І. Журавський.

Ознайомимося із вищезазначеним методом виведення формули для визначення τ у разі простого згинання балки прямокутного поперечного перерізу (рис. 8.9 г). Для цього зробимо такі припущення:

– напрямки дотичних напружень τ збігаються з напрямом поперечної сили Q ;

– дотичні напруження τ , що діють по площинках, розміщених на одній і тій самій відстані y від нейтральної осі, рівномірно розподілені.

Ці напруження відповідно до закону парності дотичних напружень дорівнюють дотичним напруженням, що виникають у поздовжніх перерізах бруса. Розглянемо балку завдовжки l (рис. 8.9 а). Двома близькими поперечними перерізами виділимо елемент балки (рис. 8.9 а) довжиною dz .

Як можемо помітити з епюр (рис. 8.9 б, в), в обох перерізах Q та M додатні (рис. 8.9 г) і дорівнюють відповідно:

- а) у лівому перерізі – $Q = Q(z)$, $M = M(z)$;
- б) у правому перерізі – $Q = Q(z)$, $M = M(z) + dM$.

Поздовжнім горизонтальним перерізом, проведеним на відстані y від нейтрального шару (рис. 8.9 е), розділимо елемент на дві частини й розглянемо умови рівноваги верхньої частини (рис. 8.9 е).

Інтегральна рівнодійна нормальних напружень, що діють на ліву грань виділеного паралелепіпеда, дорівнює

$$N_1 = \int_{A^*} \sigma dA, \quad (8.15)$$

де A^* – площа частини поперечного перерізу від рівня y до зовнішньої поверхні балки.

Підставивши у формулу (8.15) формулу Нав'є (8.12) і врахувавши, що в кожному перерізі M і I_x є сталими величинами, одержимо

$$N_1 = \frac{M}{I_x} \int_{A^*} y_1 dA = \frac{MS_x^*}{I_x}, \quad (8.16)$$

де y_1 – поточна ордината площинки dA .

Вираз

$$S_x^* = \int_{A^*} y_1 dA \quad (8.17)$$

є статичним моментом щодо осі x відсіченої частини площі перерізу, тобто площі, розміщеної вище за рівень y . Аналогічно знайдемо рівнодійну нормальних сил, що діє на праву грань паралелепіеда:

$$N_2 = \frac{(M + dM)}{I_x} \int_{A^*} y_1 dA = \frac{(M + dM)S_x^*}{I_x}. \quad (8.18)$$

Різниця цих сил

$$N_2 - N_1 = \frac{dMS_x^*}{I_x} \quad (8.19)$$

повинна врівноважуватися дотичними силами в поздовжніх перерізах елемента, тобто на нижній грані паралелепіеда (рис. 8.9 е). Як перше наближення припускаємо, що дотичні напруження розподілені по ширині перерізу рівномірно. У такому разі рівнодійна T дотичних напружень, що діють на нижній грані паралелепіеда, дорівнює

$$T = \tau b dz. \quad (8.20)$$

Спроектуювавши всі сили, що діють на паралелепіед, на вісь z , одержимо

$$\sum Z = 0: N_1 + T - N_2 = 0. \quad (8.21)$$

Підставивши у вираз (8.21) формули (8.19) і (8.20), матимемо

$$\frac{dMS_x^*}{I_x} = \tau b dz . \quad (8.22)$$

Зважаючи на це, *дотичні напруження* дорівнюють

$$\tau = \frac{dM}{dz} \frac{S_x^*}{b I_x} . \quad (8.23)$$

Ураховуючи, що

$$Q = \frac{dM}{dz} ,$$

формула (8.23) остаточно набере вигляду

$$\tau = \frac{Q S_x^*}{b I_x} , \quad (8.24)$$

де Q – поперечна сила в поперечному перерізі;

S_x^* – статичний момент відсіченої частини площі перерізу (відсікання виконуємо на рівні точки, у якій визначається напруження);

I_x – момент інерції всього перерізу щодо нейтральної осі;

$b(y)$ – ширина перерізу на рівні y заданої точки.

Зауваження 2. Формула (8.24) має назву *формули Журавського*.

Отже, розподіл дотичних напружень по перерізу балки визначають за характером зміни S_x^* , оскільки інші величини формули (8.24) для конкретного перерізу є сталими. Статичний момент відсіченої частини перерізу відіграє роль функції, що обумовлює характер зміни

дотичних напружень по висоті перерізу. Визначимо його через ординату точки y та розміри перерізу.

Статичний момент відсіченої частини перерізу (рис. 8.10) становить

$$S_x^* = A^* y_c^* = b(h^2/4 - y^2)/2, \quad (8.25)$$

де її площа та відстань від центра ваги до нейтральної лінії (ось x) можна обчислити за такими формулами, як

$$A^* = b(h/2 - y), \quad y_c^* = (h/2 + y)/2 \text{ відповідно.}$$

Відомо, що момент інерції прямокутного перерізу дорівнює $I_x = bh^3/12$.

Підставивши вищевказані вирази у формулу (8.24),

$$\tau = \frac{6Q(h^2/4 - y^2)}{bh^3}. \quad (8.26)$$

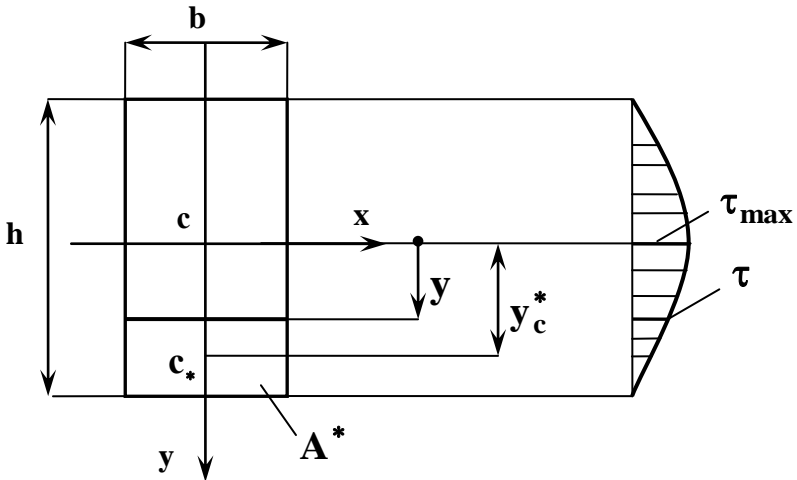


Рисунок 8.10 – Дотичні напруження під час плоского згинання балки прямокутного поперечного перерізу

Одержаний вираз доводить, що дотичні напруження змінюються за висотою перерізу згідно із законом квадратної параболи. Якщо $y = h/2$, напруження $\tau = 0$. Під час наближення точки до осі x напруження в ній поступово збільшується, набуваючи свого найбільшого значення

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3Q}{2A}, \quad (8.27)$$

якщо $y = 0$.

8.6 Розрахунок балки на міцність під час згинання

Отже, під час поперечного згинання балки її матеріал перебуває в неоднорідному напруженому стані. У такому разі умову міцності необхідно записати для однієї з трьох таких небезпечних точок.

Точка 1. Вона розміщена в крайніх волокнах перерізу балки, у яких нормальні напруження досягають свого найбільшого значення. Дотичні напруження, як відомо, дорівнюють нулю.

Умова міцності відповідно до формули (8.14) має вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (8.28)$$

де $[\sigma]$ – допустиме нормальне напруження.

Точка 2. Вона знаходиться на нейтральній лінії того перерізу, у якому поперечна сила має найбільше значення.

Умова міцності відповідно до формули (8.24) має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{*\max}}{b I_x} \leq [\tau], \quad (8.29)$$

де $[\tau]$ – допустиме дотичне напруження.

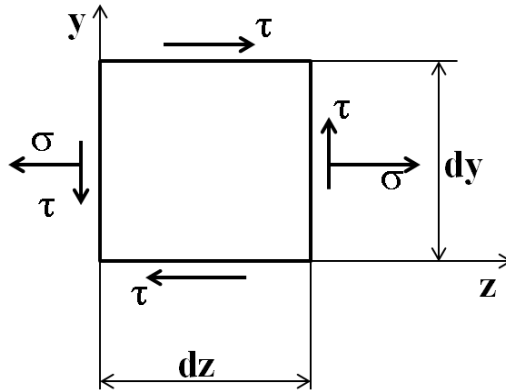


Рисунок 8.11 – Напружений стан нескінченно малого елемента в небезпечній точці перерізу балки

Точка 3. Її положення неконкретне. У таких точках виникає так званий плоский напружений стан (рис. 8.11), тобто по гранях елементарного плоского елемента діють як нормальні, так і дотичні напруження. Як буде доведено пізніше, *головні напруження*, що діють на головних площинках, можна визначити за формулами

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_{\max} &= \frac{1}{2} \left[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right], \\ \sigma_3 = \sigma_{\min} &= \frac{1}{2} \left[\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right]. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Під час розглянутої складної деформації балки умови міцності відповідно до *п'яти класичних теорій* будуть такими:

$$\begin{aligned}\sigma_e^I &= \frac{1}{2} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) \leq [\sigma], \\ \sigma_e^{II} &= \frac{1}{2} \left[(1 - \mu)\sigma + (1 + \mu)\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right] \leq [\sigma], \\ \sigma_e^{III} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \\ \sigma_e^{IV} &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma], \\ \sigma_e^V &= \frac{1}{2} \left[(1 - m)\sigma + (1 + m)\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right] \leq [\sigma_p],\end{aligned}\tag{8.31}$$

де μ – коефіцієнт Пуассона,

$$m = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}.\tag{8.30}$$

Зауваження 3. Для розрахунку на міцність балок із пластичних матеріалів найбільш доцільними є третя й четверта теорії міцності.

Запитання для самостійного контролю

1 Поясніть, що таке силова площа. Яке згинання називають плоским?

2 Наведіть види опор за типами. Які реакції вони мають і яким напрямком руху обертого тіла запобігають?

3 Які рівняння рівноваги застосовують для визначення реакцій опор? Які балки є статично визначуваними й статично невизначуваними?

4 Які внутрішні силові фактори виникають під час згинання? Сформулюйте правила знаків для них.

5 Сформулюйте диференціальні залежності під час згинання. Які правила перевірки побудови епюр внутрішніх силових факторів із них впливають?

6 Поясніть статичний аспект задачі чистого згинання.

7 Поясніть геометричний аспект задачі чистого згинання.

8 Поясніть фізичний аспект задачі чистого згинання.

9 Що таке жорсткість перерізу балки під час згинання?

10 Наведіть формулу розподілу нормальних напружень у поперечному перерізі балки під час згинання. Де знаходяться та чому дорівнюють максимальні напруження?

11 Наведіть формулу Журавського. Де знаходяться й чому дорівнюють максимальні дотичні напруження в перерізі?

12 Який напружений стан у точках балки під час згинання? Наведіть головні напруження для нього.

13 Наведіть умови міцності під час згинання балки відповідно до п'яти класичних теорій.

РОЗДІЛ 9 РОЗРАХУНОК НА ЖОРСТКІСТЬ БАЛКИ ПІД ЧАС ЗГИНАННЯ

9.1 Основні поняття.

Переміщення балки під час згинання

Під дією зовнішнього навантаження первісно пряма вісь балки викривлюється в площині згинання. Утворену під час деформації згинання вісь називають *зігнутою віссю балки, або пружною лінією* (рис. 9.1).

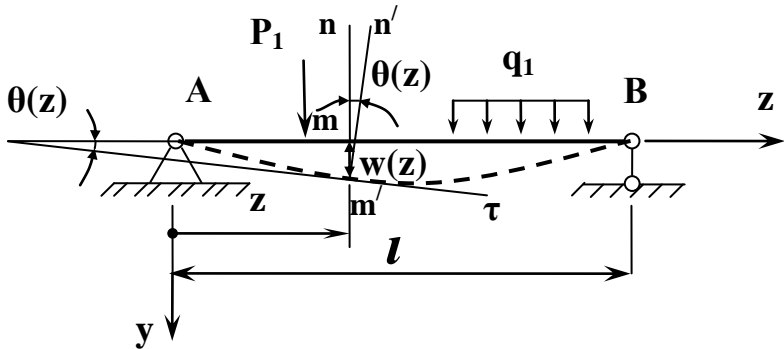


Рисунок 9.1 – Переміщення балки під час згинання

Точка m на осі балки є центром ваги перерізу з координатою z . Прогин балки w – переміщення центра ваги перерізу по нормалі до осі балки. Отже, зігнута вісь є графіком функції прогину $w(z)$ від аргумента z .

Нормаль n' до зігнутої осі в кожній точці лежить у площині відповідного поперечного перерізу, що під час деформації повертається щодо початкового вертикального положення на кут $\theta(z)$, водночас залишаючись плоским. Цей *кут повертання перерізу* також є кутом нахилу

дотичної до зігнутої осі балки в тій самій точці (точка m' на рис. 9.1).

Відповідно до геометричного змісту першої похідної функції $w(z)$ і рисунка 9.1

$$\operatorname{tg}\theta(z) = \frac{dw(z)}{dz}, \quad (9.1)$$

але для малих кутів повертання, як відомо, виконується залежність

$$\operatorname{tg}\theta(z) \approx \theta(z).$$

Зважаючи на це, рівняння (9.1) набере вигляду

$$\theta(z) = \frac{dw(z)}{dz}. \quad (9.2)$$

Рівняння (9.2) установлює диференціальну залежність між кутом повертання перерізу балки й першою похідною її прогину.

Зауваження 1. У практиці розрахунків балок на жорсткість показником жорсткості вважають найбільше значення прогину w_{\max} . Допустимий із погляду нормальної експлуатації найбільший прогин визначають щодо прогону балки. Зокрема, згідно з державними стандартами допустимий прогин машинобудівних конструкцій, наприклад підкранових балок, становить

$$[w] = \frac{l}{1000}, \quad (9.3)$$

де l – довжина прогону.

За умови жорсткості найбільший прогин має обмеження

$$w_{\max} \leq [w]. \quad (9.4)$$

9.2 Диференціальне рівняння зігнутої осі балки

Під час виведення формули для визначення нормальних напружень під час чистого згинання балки був одержаним вираз (8.11) *кривини зігнутої осі балки*

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x}, \quad (9.5)$$

що встановлює залежність кривини $k(z) = \frac{1}{\rho(z)}$ зігнутої осі балки з координатою z (рис. 9.2) і згинальним моментом $M(z)$ (EI_x – згинальна жорсткість балки).

Отже, співвідношення (9.5) установлює закон Гука під час згинання балки.

З курсу математичного аналізу відомо, що рівняння кривини плоскої кривої в системі координат YOZ можна визначити за формулою

$$k(z) = \frac{1}{\rho(z)} = \pm \frac{d^2y/dz^2}{[1 + (dy/dz)^2]^{3/2}}, \quad (9.6)$$

де $y(z)$ – досліджувана функція аргументу z .

Порівнявши вирази (9.5) і (9.6) з урахуванням того, що

$$1 + (dw/dz)^2 \approx 1,$$

одержимо

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \pm \frac{M}{EI_x}. \quad (9.7)$$

Рівняння (9.7) є *наближеним диференціальним рівнянням зігнутої осі балки*.

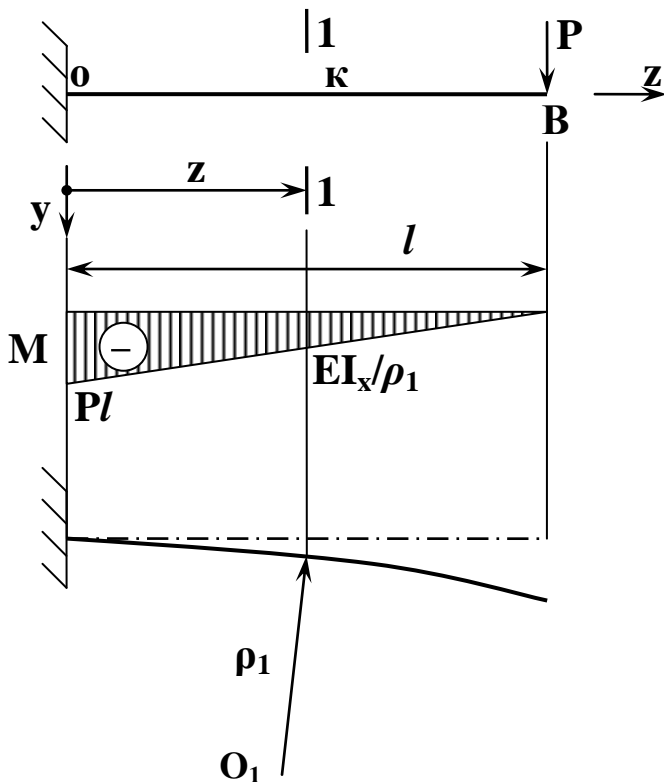


Рисунок 9.2 – Кривина зігнутої осі балки під час згинання

Правило знаків: якщо згинальний момент додатний, пружна лінія ввігнутим боком напрямлена вгору (рис. 9.3 а), тобто для прийнятої системи координат **YOZ** (вісь **y** напрямлена вниз) кривина $k(z) = \frac{1}{\rho(z)} = \frac{d^2w}{dz^2}$ буде від'ємною. Аналогічно визначають додатні й від'ємні значення величини моменту та кривини відповідно.

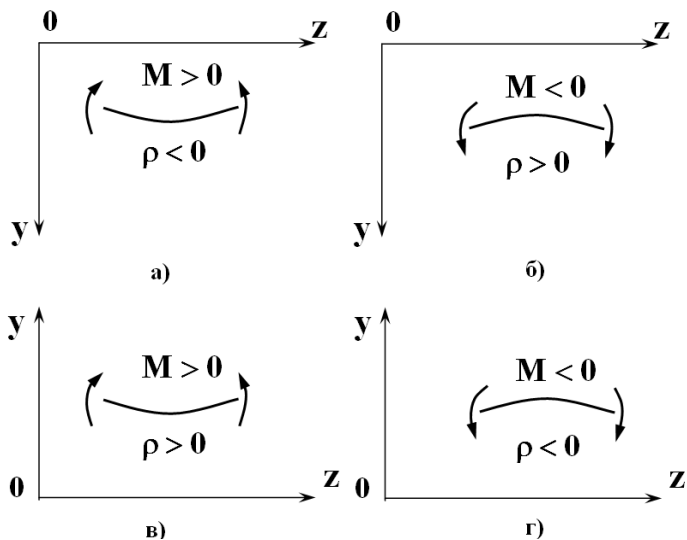


Рисунок 9.3 – Залежність опуклості кривини зігнутої лінії від згинального моменту

Отже, для системи координат (рис. 9.3 а, б), якщо вісь y напрямлена вниз, вираз (9.7) матиме вигляд

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{M}{EI_x}, \quad (9.8)$$

а для системи координат (рис. 9.3 в, г), якщо вісь Oy напрямлена вгору, він відповідно буде таким:

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M}{EI_x}. \quad (9.9)$$

9.3 Рівняння пружної лінії

Звичайні диференціальні рівняння другого порядку (9.7) для системи координат (рис. 9.3 а, б) мають простий аналітичний розв'язок, який визначається їх послідовним інтегруванням і може бути наданий у різних формах:

4 із використанням невизначених інтегралів

$$\theta(z) = \frac{dw(z)}{dz} = -\int \frac{M(z)}{EI_x} dz + C_1, \quad (9.10)$$

$$w(z) = -\int \int \frac{M(z)}{EI_x} dz dz + C_1 z + C_2, \quad (9.11)$$

де C_1 , C_2 – сталі інтегрування, які визначаються із крайових умов закріплення балки;

5 із використанням визначених інтегралів

$$\theta(z) = -\int_{z_0}^z \frac{M(z_1)}{EI_x} dz_1 + \theta(z_0), \quad (9.12)$$

$$w(z) = -\int_{z_0}^z \left(\int_{z_0}^{z_2} \frac{M(z_1)}{EI_x} dz_1 \right) dz_2 + \theta(z_0)(z - z_0) + w(z_0). \quad (9.13)$$

Тут аргументи z_1 , z_2 змінюються вздовж осі z і відраховуються від одного й того самого початку z_0 ; $\theta(z_0)$, $w(z_0)$ – кут повороту і прогин перерізу із координатою $z = z_0$.

Зауваження 2. Невідомі значення $\theta(z_0)$, $w(z_0)$ визначаються з умов закріплення балки.

9.4 Приклади визначення переміщень балки під час згинання

Приклад 1. Скласти остаточне рівняння пружної лінії консолі (рис. 9.4) від дії зосередженої сили на її вільному кінці. Вважати, що згинальна жорсткість балки EI_x є сталою величиною по довжині балки.

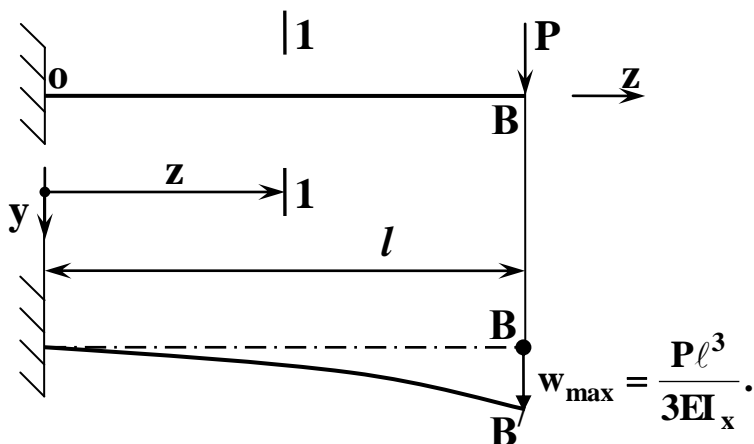


Рисунок 9.4 – Розрахункова схема визначення переміщень у консольній балці

Початок системи координат YOZ беруть у затисненні балки. Згинальний момент у перерізі $1-1$ із координатою z дорівнює

$$M(z) = -P(\ell - z). \quad (9.14)$$

Підставивши (9.14) у рівняння (9.10), (9.11), одержимо такі вирази:

$$\theta(z) = \frac{P}{EI_x} \left(\ell z - \frac{z^2}{2} \right) + C_1, \quad (9.15)$$

$$w(z) = \frac{P}{EI_x} \left(\ell \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + C_1 z + C_2. \quad (9.16)$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 можна визначити з крайових умов закріплення балки

$$z = 0: \theta(0) = 0, \quad w(0) = 0.$$

Зважаючи на це, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. У такому разі рівняння (9.15) та (9.16) набирають вигляду

$$\theta(z) = \frac{P}{EI_x} \left(\ell z - \frac{z^2}{2} \right),$$

$$w(z) = \frac{P}{EI_x} \left(\ell \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right).$$

Кут повертання й прогин максимальні в перерізі з координатою $z = \ell$. Вони становлять

$$\theta_{\max} = \frac{P \ell^2}{2EI_x}, \quad w_{\max} = \frac{P \ell^3}{3EI_x}. \quad (9.17)$$

Приклад 2. Скласти остаточне рівняння пружної лінії двохарної балки (рис. 9.5) від дії зосередженої сили, прикладеної на відстані a від лівого кінця балки, і визначити максимальний прогин. Вважати, що згинальна жорсткість балки EI_x є сталою величиною по довжині балки.

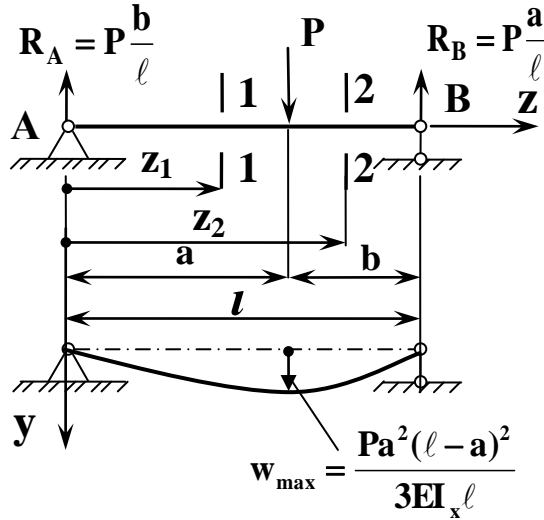


Рисунок 9.5 – Розрахункова схема визначення переміщень у двохшарнірній балці

Початок системи координат yOz беруть у перерізі А балки. Згинальні моменти в перерізі 1 – 1 із координатою $0 \leq z_1 \leq a$ та перерізі 2 – 2 із координатою $a \leq z_2 \leq l$ відповідно дорівнюють

$$M(z_1) = P \frac{b}{l} z_1, \tag{9.18}$$

$$M(z_2) = P \frac{b}{l} z_2 - P(z_2 - a).$$

Підставивши (9.18) у рівняння (9.10) і (9.11), одержимо такі вирази:

$$\theta_1(z_1) = -\frac{P}{EI_x} \frac{b}{l} \frac{z_1^2}{2} + C_1, \tag{9.19}$$

$$w_1(z_1) = -\frac{P}{EI_x} \frac{b z_1^3}{\ell} + C_1 z_1 + C_2,$$

$$\theta_2(z_2) = -\frac{P}{EI_x} \left[\frac{b z_2^2}{\ell} - \left(\frac{z_2^2}{2} - a z_2 \right) \right] + C_3,$$

$$w_2(z_2) = -\frac{P}{EI_x} \left[\frac{b z_2^3}{\ell} - \left(\frac{z_2^3}{6} - \frac{z_2^2}{2} a \right) \right] + C_3 z_2 + C_4. \quad (9.20)$$

Ураховуючи, що в перерізі з координатою $z_1 = z_2 = a$ виконуються умови неперервності переміщень $\theta_1(a) = \theta_2(a)$, $w_1(a) = w_2(a)$, можна скласти такі співвідношення:

$$C_1 - C_3 = -\frac{P}{EI_x} \frac{a^2}{2}, \quad (9.21)$$

$$C_1 a + C_2 - C_3 a - C_4 = -\frac{P}{EI_x} \frac{a^3}{3}.$$

Додатково записавши крайові умови

$$z_1 = 0 : w_1(0) = 0; \quad z_2 = \ell : w_2(\ell) = 0 \quad (9.22)$$

і підставивши в них вирази (9.19) та (9.20), одержимо

$$C_2 = 0,$$

$$C_3 \ell + C_4 = \frac{P}{EI_x} \left[\frac{b \ell^2}{6} - \frac{\ell^3}{6} + \frac{\ell^2 a}{2} \right]. \quad (9.23)$$

Розв'язання системи рівнянь (9.21) і (9.23) дає значення сталих інтегрування розглянутої задачі

$$C_1 = -\frac{P}{EI_x} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{\ell a}{3} - \frac{a^3}{6\ell} \right], \quad C_2 = 0, \quad (9.24)$$

$$C_3 = \frac{P}{EI_x} \left[\frac{a\ell}{3} + \frac{a^3}{6\ell} \right], \quad C_4 = -\frac{P}{EI_x} \frac{a^3}{6}.$$

Формули (9.19) та (9.20) після підстановки в них сталих інтегрування (9.24) набувають вигляду

$$\theta_1(z_1) = -\frac{P}{EI_x} \left[\frac{b z_1^2}{\ell} + \frac{a^2}{2} - \frac{\ell a}{3} - \frac{a^3}{6\ell} \right] \quad (0 \leq z_1 \leq a), \quad (9.25)$$

$$w_1(z_1) = -\frac{P}{EI_x} \left[\frac{b z_1^3}{\ell} + \frac{a^2}{2} z_1 - \frac{\ell a}{3} z_1 - \frac{a^3}{6\ell} z_1 \right] \quad (0 \leq z_1 \leq a),$$

$$\theta_2(z_2) = -\frac{P}{EI_x} \left[\frac{b z_2^2}{\ell} - \frac{z_2^2}{2} + a z_2 - \frac{a\ell}{3} - \frac{a^3}{6\ell} \right] \quad (a \leq z_2 \leq \ell), \quad (9.26)$$

$$w_2(z_2) = -\frac{P}{EI_x} \left[\frac{b z_2^3}{\ell} - \frac{z_2^3}{6} + \frac{z_2^2}{2} a - \frac{a\ell}{3} z_2 - \frac{a^3}{6\ell} z_2 + \frac{a^3}{6} \right] \quad (a \leq z_2 \leq \ell).$$

У точці прикладання сили \mathbf{P} виникає максимальний прогин, що становить

$$w_{\max} = w_1(\mathbf{a}) = w_2(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{P}a^2(\ell - a)^2}{3EI_x \ell}. \quad (9.27)$$

Якщо $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \ell / 2$, максимальний прогин дорівнює

$$w_{\max} = \frac{\mathbf{P}\ell^3}{48EI_x}. \quad (9.28)$$

Приклад 3. Скласти остаточне рівняння пружної лінії двохшарнірної балки (рис. 9.6) від дії рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю \mathbf{q} і визначити максимальний прогин. Вважати, що згинальна жорсткість балки \mathbf{EI}_x є сталою величиною по довжині балки.

Початок системи координат $\mathbf{y0z}$ беруть у перерізі \mathbf{A} балки. Згинальний момент у перерізі $\mathbf{1} - \mathbf{1}$ із координатою $\mathbf{0} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{a}$ становить

$$\mathbf{M}(\mathbf{z}) = \mathbf{R}_A \mathbf{z} - \mathbf{qz} \cdot \frac{\mathbf{z}}{2} = \frac{\mathbf{q}\ell}{2} \mathbf{z} - \mathbf{q} \frac{\mathbf{z}^2}{2}. \quad (9.29)$$

Підставивши (9.29) у рівняння (9.10) та (9.11), одержимо такі вирази:

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{z}) &= -\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{EI}_x} \left(\ell \frac{\mathbf{z}^2}{4} - \frac{\mathbf{z}^3}{6} \right) + \mathbf{C}_1, \\ w(\mathbf{z}) &= -\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{EI}_x} \left(\ell \frac{\mathbf{z}^3}{12} - \frac{\mathbf{z}^4}{24} \right) + \mathbf{C}_1 \mathbf{z} + \mathbf{C}_2. \end{aligned} \quad (9.30)$$

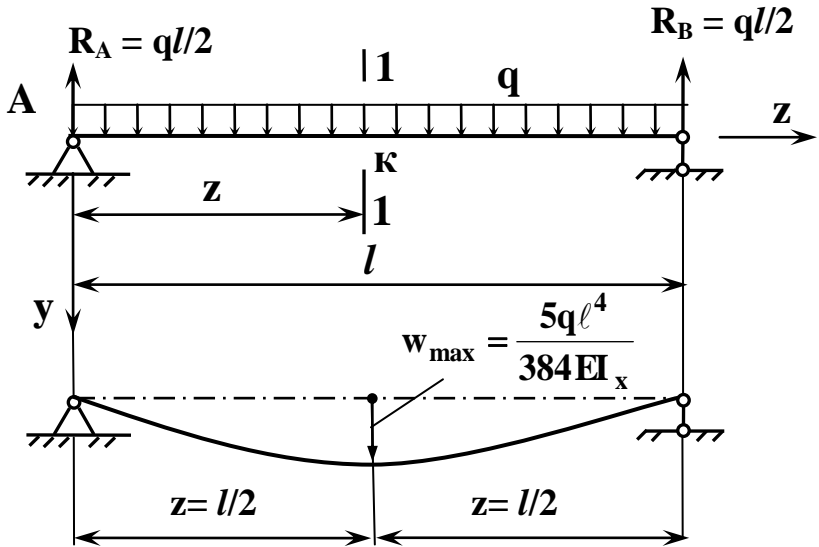


Рисунок 9.6 – Розрахункова схема визначення переміщень у двохшарнірній балці

Записавши крайові умови

$$z = 0 : w(0) = 0; \quad z = l : w(l) = 0 \quad (9.31)$$

і підставивши в них друге рівняння (9.30), можна обчислити сталі інтегрування

$$C_1 = \frac{q\ell^3}{24EI_x}, \quad C_2 = 0. \quad (9.32)$$

Отже, остаточне рівняння для визначення кутів повертання перерізів і рівняння пружної лінії двохшарнірної

балки (рис. 9.6) від дії рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю q будуть такими:

$$\theta(z) = -\frac{q}{EI_x} \left(\ell \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{6} - \frac{\ell^3}{24} \right), \quad (9.34)$$

$$w(z) = -\frac{q}{EI_x} \left(\ell \frac{z^3}{12} - \frac{z^4}{24} - \frac{\ell^3}{24} z \right).$$

Максимальний прогин виникає в перерізі балки з координатою $z = l/2$:

$$w_{\max} = \frac{5q\ell^4}{384EI_x}. \quad (9.34)$$

9.5 Метод початкових параметрів (МПП). Універсальне рівняння прогнутої лінії

Визначення переміщень у балках способом безпосереднього інтегрування диференціального рівняння зігнутої осі балки з використанням невизначених інтегралів (9.10) і (9.11) у разі балок із великою кількістю характерних ділянок є неабияк складним (приклад 2, підрозділ 9.4). Для зменшення операцій інтегрування, пов'язаних із визначенням сталих невідомих, переважно застосовують **метод початкових параметрів (МПП)**. Відповідно до нього за будь-якої кількості ділянок визначають лише дві сталі інтегрування – кут повертання θ_0 та прогин w_0 на початку системи координат (рис. 9.7).

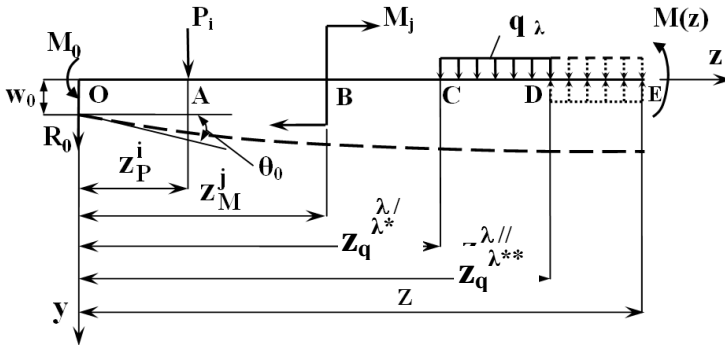


Рисунок 9.7 – Метод початкових параметрів визначення кутових і лінійних переміщень у балці

Частина балки, зображена на рисунку 9.7 у системі координат YOZ , навантажена довільною системою зовнішніх сил: декількома поперечними силами P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) у перерізах із координатами $z = z_P^i$; зосередженими моментами M_j ($j = 1, 2, \dots, m$) у перерізах із координатами $z = z_M^j$; рівномірно розподіленими навантаженнями q_λ ($\lambda = 1, 2, \dots, k$) на ділянці $z_q^{\lambda*} \leq z \leq z_q^{\lambda**}$. Згинальний момент M_0 і поперечна сила R_0 , які діють у перерізі, що збігається з початком системи координат, називають *статичними початковими параметрами*. Напрямки всіх навантажень вибрані так, щоб вони спричиняли від’ємні згинальні моменти.

Отже, згинальний момент $M(z)$ у перерізі балки E з координатою z можна записати так:

$$\begin{aligned}
 M(z) = & -M_0 - R_0 z - \sum_{j=1}^m M_j - \sum_{i=1}^n P_i (z - z_P^i) - \\
 & - \sum_{\lambda=1}^k q_\lambda \frac{(z - z_q^{\lambda*})^2}{2!} + \sum_{\lambda=1}^k q_\lambda \frac{(z - z_q^{\lambda**})^2}{2!}.
 \end{aligned}
 \tag{9.35}$$

Зауваження 3. Рівняння (9.35) можна скласти для будь-якої характерної ділянки балки.

Зауваження 4. У разі обривання розподіленого навантаження (переріз із координатою $z = z_q^{\lambda^{**}}$, рис. 9.7) його продовжують до кінця розглядуваного перерізу й уводять «компенсувальне» навантаження зворотного напрямку, зображене на кресленні штриховими лініями.

Послідовним інтегруванням із використанням визначених інтегралів (9.12) і (9.13) та виразу згинального моменту (9.35) можна одержати формули для обчислення кута повертання й прогину в перерізі з координатою z :

$$\begin{aligned} EI_x \theta(z) = & EI_x \theta_0 + M_0 \frac{z}{1!} + R_0 \frac{z^2}{2!} + \\ & + \sum_{j=1}^m M_j \frac{(z - z_M^j)}{1!} + \sum_{i=1}^n P_i \frac{(z - z_P^i)^2}{2!} + \\ & + \sum_{\lambda=1}^k q_\lambda \frac{(z - z_q^{\lambda*})^3}{3!} - \sum_{\lambda=1}^k q_\lambda \frac{(z - z_q^{\lambda^{**}})^3}{3!}, \end{aligned} \quad (9.36)$$

$$\begin{aligned} EI_x w(z) = & EI_x w_0 + EI_x \theta_0 z + M_0 \frac{z^2}{2!} + \\ & + R_0 \frac{z^3}{3!} + \sum_{j=1}^m M_j \frac{(z - z_M^j)^2}{2!} + \sum_{i=1}^n P_i \frac{(z - z_P^i)^3}{3!} + \\ & + \sum_{\lambda=1}^k q_\lambda \frac{(z - z_q^{\lambda*})^4}{4!} - \sum_{\lambda=1}^k q_\lambda \frac{(z - z_q^{\lambda^{**}})^4}{4!}. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Кут повертання θ_0 і прогин w_0 на початку системи координат називають *геометричними початковими параметрами*, рівняння (9.36) – *універсальним рівнянням кутів повертання перерізів*,

відповідно рівняння (9.37) – *універсальним рівнянням пружної лінії балки під час згинання*.

З універсального рівняння пружної лінії балки (9.37) можна просто розрахувати максимальний прогин двохшарнірної балки (приклад 2, рис. 9.5) від дії зосередженої сили, прикладеної на відстані $z = l/2$ від її лівого кінця.

Записавши крайові умови

$$z = 0: \mathbf{w}(0) = \mathbf{0}; \quad z = \ell: \mathbf{w}(\ell) = \mathbf{0} \quad (9.38)$$

і визначивши опорні реакції або статичні початкові параметри

$$\mathbf{R}_0 = -\frac{\mathbf{P}}{2}, \quad \mathbf{M}_0 = \mathbf{0}, \quad (9.39)$$

відповідно до рівняння (9.37) одержимо вирази

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{EI}_x \mathbf{w}(\ell) = \mathbf{EI}_x \theta_0 \ell - \frac{\mathbf{P} \ell^3}{2 \cdot 6} + \mathbf{P} \frac{(\ell - \ell/2)^3}{6} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Зважаючи на це, геометричні початкові параметри наберуть вигляду

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}, \quad \theta_0 = \frac{3\mathbf{P}\ell^2}{48\mathbf{EI}_x}. \quad (9.40)$$

Підставивши параметри (9.40) у рівняння (9.37), можна визначити максимальний прогин двохшарнірної балки в перерізі з координатою $z = l/2$:

$$\mathbf{w}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \mathbf{w}_{\max} = \frac{\mathbf{P}\ell^3}{48\mathbf{EI}_x}, \quad (9.41)$$

що збігається зі значенням максимального прогину (9.28), визначеного способом безпосереднього інтегрування диференціального рівняння зігнутої осі балки (приклад 2).

Запитання для самостійного контролю

1 Що таке пружна лінія? Яке її диференціальне рівняння?

2 Яка залежність між кутом повертання й прогином під час згинання?

3 Чому дорівнює кривина зігнутої осі балки?

4 Сформулюйте правило знаків для моменту та кривини зігнутої осі балки.

5 Як знайти рівняння пружної лінії методом безпосереднього інтегрування?

6 У чому полягає метод початкових параметрів?

7 Як знайти рівняння пружної лінії методом початкових параметрів?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Беляев Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – изд. 15-е. – Москва : Наука, 1976. – 607 с.
2. Дарков А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – Москва : Высшая школа, 1975. – 654 с.
3. Писаренко Г. С. Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко. – изд. 5-е, перераб. и доп. – Киев : Высшая школа, 1986. – 775 с.
4. Посацький С. Л. Опір матеріалів / С. Л. Посацький. – Львів : Вид-во Львівського університету, 1973. – 403 с.
5. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – Москва : Наука, 1979. – 559 с.
6. Боголюбов А. Н. Математики механики. Биографический справочник / А. Н. Боголюбов. – Киев : Научная мысль, 1983. – 639 с.

Електронне навчальне видання

**Жигилій Дмитро Олексійович,
Верещака Сергій Михайлович,
Некрасов Сергій Сергійович,
Довгополов Андрій Юрійович**

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Навчальний посібник

У двох частинах
Частина 1

Редактор О. В. Федяй
Комп'ютерне верстання Д. О. Жигилія, А. Ю. Довгополова

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 18,6. Обл.-вид. арк. 6,27.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.