Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

Кулик І. А.

МЕТОДИ БІНОМІАЛЬНОГО АДАПТИВНОГО СТИСНЕННЯ ДВІЙКОВИХ ДАНИХ

Монографія

Суми
Сумський державний університет
2023

УДК 004.627
К 90

Рецензенти:

О. А. Борисенко – доктор технічних наук, професор кафедри електроніки і комп'ютерної техніки Сумського державного університету;

Б. Є. Панченко – доктор фізико-математичних наук, професор, в. о. завідувача кафедри інженерії програмного забезпечення Державного університету інтелектуальних технологій і зв'язку (м. Одеса)

Рекомендовано до видання
вченою радою Сумського державного університету
як монографія
(протокол № 7 від 22 грудня 2022 року)

Кулик І. А.

К 90 Методи біноміального адаптивного стиснення двійкових даних : монографія / І. А. Кулик. – Суми : Сумський державний університет, 2023. – 224 с.

ISBN 978-966-657-943-3

У монографії викладено методи біноміального адаптивного стиснення двійкових даних, засновані на біноміальних системах числення. Результати монографії отримано завдяки науковим дослідженням автора, проведеним у Сумському державному університеті.

Призначена для науковців у галузі інформаційних технологій і комп'ютерних наук, аспірантів із комп'ютерних спеціальностей та усіх, хто цікавиться питанням стискаючого кодування.

УДК 004.627

ISBN 978-966-657-943-3
© Сумський державний університет, 2023
© Кулик І. А., 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Ця монографія є підсумком роботи автора за перспективним науковим напрямом, основу якого становить біноміальне кодування, тобто здійснення кодування інформації з метою скорочення її надлишковості або захисту від помилок за допомогою біноміальних чисел.

Під час створення цієї наукової праці автор ставив за мету насамперед практичне наповнення теоретичних положень теорії біноміальних систем числення, яка була вперше запропонована проф. О. А. Борисенком [1–3], а також теорії біноміального кодування інформації, сутність та основні твердження якої було викладено в попередній науковій монографії «Биномиальное кодирование» авторів О. А. Борисенка та І. А. Кулика [4].

Автор розглянув і дослідив використання двійкових біноміальних систем числення та породжуваних ними біноміальних чисел для стиснення і відновлення двійкової інформації, що з погляду практичного застосування являє собою важливу сферу біноміального кодування.

Сьогодні методи та алгоритми стиснення знаходять усе більш широке розповсюдження в інформаційних системах різноманітного призначення – телекомунікаційних мережах та апаратурі зв’язку, комп’ютеризованих системах управління та роботизованих комплексах, системах збирання та архівування даних, системах оброблення цифрових зображень, розподілених базах і сховищах даних тощо [5–8]. Упровадження методів стиснення даних спрямовано, насамперед, на підвищення продуктивності інформаційних систем, якого можна досягти двома способами [7–10]:

1) зменшенням часових витрат на передання інформації каналами зв’язку;

2) збільшенням ємності пам’яті для зберігання інформації, яка застосовується в системі.

Підвищення продуктивності інформаційних систем за першим вищевказаним напрямком полягає в тому, що за той самий час зростає кількість інформації, що передають канали зв'язку. У такий спосіб збільшується пропускна здатність каналів, але, умовно кажучи, «віртуально» без зміни його реальних характеристик. Отже, інформаційні системи отримують можливість за той самий час оброблювати більшу кількість даних.

Що стосується другого напрямку, то зростання продуктивності інформаційних систем можливо або, по-перше, завдяки збільшенню кількості даних, які мають вже стиснутий вигляд, у пам'яті тієї ж самої ємності, або, по-друге, унаслідок зменшення обсягу самої пам'яті, яка буде зберігати дані з тією ж самою кількістю інформації, але вже у стиснутому вигляді.

У першому випадку підвищення продуктивності забезпечено тим, що збільшується кількість даних, які може оброблювати інформаційна система за один раз без додаткового звернення до зовнішніх пристроїв і носіїв інформації, що, крім того, дозволяє суттєво знизити середню кількість команд ініціації та завершення обміну, формування адреси, читання та запису даних. У другому випадку можливо зменшення обсягу застосованої пам'яті, унаслідок чого знижується вартість інформаційної системи, тобто вартість апаратно-програмних витрат на одне інформаційне повідомлення, що оброблюється. Це, вочевидь, також сприяє підвищенню продуктивності оброблення даних у системі.

Крім того, помітний позитивний ефект стиснення інформації можна спостерігати в роботі буферів зовнішньої пам'яті, які є розповсюдженими у функціональній структурі багатьох інформаційних систем, наприклад у розподілених базах даних і системах цифрового оброблення зображень. Стиснуті дані займають менше місця в буферній пам'яті, у такий спосіб збільшується їхня кількість у буфері, що сприяє покращанню коефіцієнта успішних потраплянь до нього, знижуючи, зі свого боку, середню кількість звернень до самої зовнішньої пам'яті.

Отже, підвищення продуктивності інформаційних систем завдяки використанню методів та алгоритмів стиснення даних є наслідком [7–10]:

– збільшення пропускної здатності каналів зв'язку за допомогою зменшення часу передання тієї ж самої кількості інформації;

– зменшення часу очікування вивантаження даних із зовнішньої та оперативної пам'яті завдяки тому, що більше інформації міститься в буферах пристроїв зовнішньої, оперативної та надоперативної пам'яті.

Потрібно особливо відмітити те, що у зв'язку із здешевленням запам'ятовувальних пристроїв усе більше уваги приділяють прискоренню оброблення запитів між інформаційними системами внаслідок скорочення довжини запитів, збільшення коефіцієнта успішних потраплянь до буфера і зменшення середньої кількості команд ініціації та завершення обміну, формування адреси, читання та запису даних. Таке прискорення оброблення запитів можливе завдяки застосуванню стиснення не тільки власне інформаційних повідомлень, але і службових даних.

Як і раніше, відіграють величезну роль у різноманітних інформаційних системах методи та алгоритми стиснення, які характеризуються відсутністю втрат інформації, що можна пояснити так:

1. Багато методів стиснення працюють із даними на низькому рівні їхнього подання, тобто на рівні двійкового коду. На цьому рівні не розглядають семантику інформаційних повідомлень, тому застосування економного кодування без втрат є більш універсальним рішенням для під-

вищення продуктивності і зменшення вартості інформаційних систем.

2. Практична реалізація методів та алгоритмів стиснення без викривлення даних потребує значно менших апаратно-програмних витрат, що призводить до зменшення вартості обладнання і програмного забезпечення.

3. Методи та алгоритми стиснення без втрат інформації характеризуються високою швидкістю декодування даних, що особливо важливо для малопотужних щодо обчислювання абонентських пристроїв клієнт-серверних інформаційних систем і розподілених баз даних.

4. Існують прикладні задачі та системи, у яких інформаційні втрати вважають неприпустимими, наприклад у системах автоматизації наукового експерименту, за умови стиснення запитів між блоками і модулями та результатів виконання цих запитів, а також у системах, де психофізіологічні чинники сприйняття інформації зведені до мінімуму.

Але до цього часу під час розроблення і застосування методів та алгоритмів стиснення без втрат даних в інформаційних системах різного призначення стикаються з такими нерозв'язаними проблемами та загальними недоліками.

1. Складність моделей даних, які стискаються, що призводить до значних часових та апаратно-програмних витрат під час їхньої побудови. Наприклад, за статистичного кодування це проявляється в необхідності формування громіздких таблиць імовірностей виникнення кодових повідомлень і застосування досить кошторисної оперативної пам'яті великої ємності.

2. Суттєве падіння коефіцієнтів стиснення або збільшення часових витрат у разі зміни типу даних, які стискаються, тобто для неоднорідних даних, наприклад сумісної появи текстової та числової інформації, зображень і графічних даних. Під час статистичного кодування зміна типу повідомлень обумовлює потребу в перебудові таб-

лиць імовірностей їхньої появи, а за словникового стиснення це призводить до заповнення словника вже неактуальними фразами, словосполученнями і словами.

3. Непристосованість до стиснення числової інформації з огляду неможливості статистики чисел, або її необ’єктивності, зважаючи на високу мінливість імовірнісних характеристик чисел і малу базу для їхнього оцінювання. Застосування словника з метою стиснення числової інформації теж є неефективним за очевидної малорозмірності числових послідовностей. Те ж саме можна стверджувати щодо стиснення запитів між системами і модулями та результатів їхнього виконання.

4. Відсутність ефективних вбудованих механізмів самоконтролю помилок за умови стиснення і відновлення даних без використання додаткової надлишкової інформації.

5. Втрата за умови стиснення вихідних числових характеристик даних, наприклад лексикографічної упорядкованості, що робить неможливим подальше проведення над стиснутими образами різноманітних операцій, таких як порівняння, арифметичні операції тощо.

Отже, актуальними є розроблення і впровадження нових адаптивних методів стиснення двійкової інформації з такими властивостями і характеристиками:

1. Простота побудови моделей даних, які стискаються, що обумовить мінімізацію часових витрат за умови стиснення і попереднього оцінювання двійкової інформації щодо доцільності подальшого проведення перетворень. Останнє важливо для розгляду і впровадження механізму адаптації стиснення щодо вигляду інформаційних повідомлень.

2. Універсальність щодо різних типів даних, які стискаються, а також адаптивність до затребуваних коефіцієнтів стиснення, часу стискального кодування і декодування, рівня контролю помилок за умови перетворень. Це забезпечить розширення сфери застосування розроблюваних

методів стиснення і відновлення, уникнення ситуацій, коли, навпаки, збільшуються обсяги інформаційних масивів і зростають до неприпустимого затримання видачі даних кінцевим споживачам.

3. Мала чутливість або, ще краще, незалежність до статистики даних, що стискаються. Це дозволить використовувати методи та алгоритми стиснення, наприклад для числової інформації або на тих етапах, коли визначення ймовірнісних характеристик даних є неможливим або ускладненим.

4. Наявність вбудованих механізмів виявлення помилок за кодових перетворень, що дозволить підвищити завадостійкість передання і покращити відмовостійкість функціонування апаратно-програмного забезпечення інформаційних систем, знизити потребу в подальших етапах завадостійкого кодування.

5. Наділення числовими характеристиками та зберігання лексикографічної впорядкованості стиснутих образів, що надає можливість проводити над ними різноманітні арифметичні і логічні операції, операції порівняння тощо.

Один із способів усунення вищевказаних загальних недоліків стиснення без інформаційних втрат, розв’язання проблем їхнього впровадження в інформаційні системи автор вбачає в застосуванні двійкових біноміальних систем числення і генерованих ними двійкових біноміальних чисел. Структурні властивості біноміальних систем числення, алгоритмічні особливості формування біноміальних чисел і можливості сучасної інтегральної елементної бази дозволяють розробляти біноміальні адаптивні методи та алгоритми стиснення двійкової інформації, які значною мірою відповідають сьогоденним вимогам до методів стискального кодування. Ця монографія обґрунтовує доцільність розроблення методів стискального кодування даних на основі біноміальних систем числення, розкриває зміст біноміальних адаптивних методів стиснення двійкової інформації, пропонує алгоритми біноміального стиснення і відновлення двійкових послідовностей і, у такий спосіб, продовжує дослідження в такому перспективному науковому напряму, як біноміальне кодування інформації.

У першому розділі подальшого розвитку отримала теорія двійкових біноміальних систем числення в напрямку вдосконалення біноміальної числової функції та систем кодоутворювальних обмежень, які наведено у спрощеному, мінімальному вигляді. Визначено таку важливу кількісну характеристику двійкових біноміальних чисел, як середня довжина їхнього кодового подання, шо відіграє значну роль у подальшому розробленні та оцінюванні методів біноміального стиснення двійкових даних.

У другому розділі проведено розроблення методів біноміального стиснення і відновлення двійкової інформації на основі біноміальних чисел. На підставі мінімальних систем кодоутворювальних обмежень і властивостей формування біноміальних чисел отримано методи та алгоритми біноміального стиснення і відновлення рівноважних комбінацій із застосуванням біноміальних чисел. Далі з метою розширення сфери використання біноміальних чисел розроблено методи та алгоритми стиснення і відновлення двійкових послідовностей загального виду. Після визначення та обґрунтування меж ефективного застосування двійкових біноміальних чисел запропоновано до розгляду та проаналізовано метод та алгоритм біноміально-векторного адаптивного стиснення і відновлення двійкових даних.

У третьому розділі розроблено методи біноміального стиснення і відновлення двійкової інформації на основі біноміальної числової функції. З використанням біноміальної числової функції і переходу до двійкових біноміальних чисел як проміжний етап для отримання стислих образів побудовано методи та алгоритми біноміального стиснення спочатку для рівноважних комбінацій, потім двійкових послідовностей загального виду. Після визначення та обґрунтування меж ефективного стиснення на основі числової функції біноміальної системи чисел запропоновано методи та алгоритми вже біноміального адаптивного нумераційно-векторного стиснення та відновлення на основі біноміальної числової функції.

Усі розділи монографії містять практичні приклади щодо досліджуваних властивостей біноміальних чисел, а також приклади щодо застосування розроблених методів стиснення і відновлення двійкових послідовностей на основі як біноміальних чисел, так і біноміальної числової функції. Синтезовані алгоритми стискального кодування і декодування мають детально пророблений вигляд, достатній для практичної реалізації у формі програмних моделей, чинних програм і підпрограм. Крім того, науковий матеріал цієї монографії може бути корисним для таких дисциплін, як «Стиснення та пошук інформації», «Біноміальні автомати», «Біноміальне кодування», «Теорія кодування та обробка сигналів» тощо, для підготовки студентів спеціальностей 171 «Електроніка», 172 «Електронні комунікації та радіотехніка» і 122 «Комп’ютерні науки».

Перспектива подальших наукових досліджень викладених у монографії методів та алгоритмів біноміального адаптивного стиснення і відновлення полягає в розробленні методів оцінювання як коефіцієнтів стиснення для різних видів двійкової інформації, так і часових витрат під час виконання біноміальних стискального кодування і декодування, а також апаратно-програмних витрат за умови практичної реалізації. Перспективним також є впровадження арифметичних і логічних операцій, операцій порівняння над двійковими біноміальними числами та стиснутими послідовностями на їхній основі з метою розширення функціональних можливостей запропонованих методів, досягнення здатності оброблення стиснутих даних без необхідності їхнього відновлення. На прикладному рівні перспективу розвитку методів біноміального адаптивного стиснення і відновлення двійкової інформації розглянуто в розробленні нових схемних рішень із побудови відповідних біноміальних комп'ютерних систем і пристроїв, наприклад, на основі програмованих логічних інтегральних схем.

РОЗДІЛ 1
РОЗВИТОК ТЕОРІЇ ДВІЙКОВИХ БІНОМІАЛЬНИХ СИСТЕМ ЧИСЛЕННЯ

1.1 Удосконалена числова функція

Кожна система числення має задовольняти низку вимог до всіх систем числення [4; 11]:

– існування та єдиність (однозначність) подання числа;

– ефективність, що виражається в наявності алгоритму переходу за кінцеве число кроків від коду числа (номера), поданого в тій чи іншій системі числення, до самого числа (номера);

– кінцевість довжини поданих чисел.

Двійкові біноміальні системи числення є позиційними неоднорідними системами числення і належать до класу структурних систем [1; 4]. Вага цифр біноміальних чисел залежить не тільки від їхньої позицій у числі, але й від значень попередніх цифр, що наділяє біноміальні системи числення, на відміну від традиційних двійкових, такими важливими і корисними властивостями, як самостійно виявляти і контролювати помилки, генерувати складні комбінаторні об’єкти і здійснювати їхню нумерацію.

Сформулюємо визначення двійкових біноміальних систем числення і двійкового біноміального числа, які відрізняються від наведених раніше в роботах [2–4]:

– використанням у визначенні саме двійкового алфавіту цифр $\{0,1\}$ для подання біноміальних чисел;

– введенням іншого порядку нумерації розрядів двійкового біноміального числа, за якого старшому, тобто крайньому зліва, розряду призначається індекс 1;

– застосуванням більш зручного позначення у вигляді (n,k) для біноміальних систем числення і чисел із параметрами n і k, які далі будуть відображатися як (n,k)-біноміальні системи числення та (n,k)-біноміальні числа.

Визначення 1.1. *Двійковими (n,k)-біноміальними системами числення називаються позиційні системи числення із двійковим алфавітом $\{0,1\}$, як основи яких використовують біноміальні коефіцієнти вигляду $C_{n-i}^{k-q_i}$, де n і k – параметри біноміальної системи числення, i – порядковий номер розряду двійкового біноміального числа $X = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$, $r < n$, а q_i – сума одиничних цифр x_i від першого розряду до $(i-1)$-го включно*

$$q_i = \sum_{t=1}^{i-1} x_t \ , \ q_i \le k \ . \tag{1.1.1}$$

Кожна система числення характеризується числовою функцією та обмеженнями на значення цифр її чисел.

Визначення 1.2. *Будь-яка кінцева послідовність цифр $x_1 x_2 ... x_i ... x_r$, де $x_i \in \{0,1\}$, що задовольняє обмеження на числову функцію двійкової (n,k)-біноміальної системи числення, є двійковим біноміальним числом із параметрами n і k, або двійковим (n,k)-біноміальним числом.*

Числова функція (n,k)-біноміальної системи числення, яка визначає десятковий кількісний еквівалент F_j двійкового біноміального числа X_j, має вигляд [12–14]

$$\begin{gathered} F_j = \operatorname{dec} X_j = x_1 C_{n-1}^{k-q_1} + \ldots + x_i C_{n-i}^{k-q_i} + \ldots \\ \ldots + x_{r-1} C_{n-r+1}^{k-q_{r-1}} + x_r C_{n-r}^{k-q_r} = \sum_{i=1}^{r} x_i C_{n-i}^{k-q_i} , \end{gathered} \tag{1.1.2}$$

де $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$, $X_j \in X$, $j = 1, 2, ..., |X|$.

Відмінність числової функції (1.1.2) від наведеної в роботах [2–4] полягає в порядку нумерації розрядів двійкового біноміального числа, за якого старшому, тобто крайньому зліва, розряду призначається індекс 1. Така нумерація є більш корисною з погляду зменшення обчислювальної складності під час розроблення та застосування методів стиснення і перетворення інформації на основі біноміальних чисел.

Числова функція (1.1.2) підтверджує ефективність двійкової (n, k)-біноміальної системи числення, оскільки відображає алгоритм переходу за кінцеве число кроків від коду двійкового біноміального числа X_j до номера F_j, вираженого в десятковій системі числення.

Пропонований у нижченаведених теоремах 1.1 та 1.2 підхід до знаходження обмежень на можливі двійкові (n, k)-біноміальні числа отримав назву арифметичного [12; 15]. Відповідно до цього підходу числова функція (1.1.2) двійкової (n, k)-біноміальної системи числення аналізується з погляду допустимої області визначення. Основу такого аналізу становить дослідження дозволених значень параметрів вагових коефіцієнтів $C_{n-i}^{k-q_i}$ числової функції (1.1.2).

Обґрунтуванням кінцевості довжини біноміальних чисел є теорема 1.1, яка визначає максимальну довжину $r_{\max}$ двійкових (n, k)-біноміальних чисел. На відміну від робіт [2–4], це обґрунтування здійснюється на основі арифметичного підходу – аналізу числової функції (1.1.2) на предмет дозволених значень параметрів вагових коефіцієнтів. Значення $r_{\max}$ відіграє істотну роль під час виведення обмежень на можливі числа двійкової (n,k)-біноміальної системи числення.

Теорема 1.1. Максимальна довжина $r_{\max}$ двійкових (n,k)-біноміальних чисел $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ дорівнює

$$r_{\max} = n - 1.$$

Доведення. Відповідно до числової функції (1.1.2) двійкової (n,k)-біноміальної системи числення значення вагових коефіцієнтів повинні бути $C_{n-i}^{k-q_i} > 0$, що можливо тільки за умови $0 \le k - q_i \le n - i$, де $i = 1, 2, ..., r$. Водночас остання нерівність також буде виконуватися, коли $i = r = n$, тобто можливе максимальне значення довжини r, більше за $n-1$, може бути $r_{\max} = n$. Тоді згідно з (1.1.1) наявні два випадки:

1) $0 \le q_n \le k$, якщо $x_n = 0$;

2) $0 \le q_n \le k-1$, якщо $x_n = 1$.

Для першого випадку останній доданок функції F_j (1.1.2) для будь-яких значень q_n із заданого діапазону завжди дорівнює нулю

$$x_n C_{n-n}^{k-q_n} = 0 \cdot C_{n-n}^{k-q_n} = 0.$$

Для другого випадку рівність нулю останнього доданка функції F_j є наслідком $C_0^{k-q_n} = 0$ для всіх $0 \le q_n \le k-1$ [16; 17]

$$x_n C_{n-n}^{k-q_n} = 1 \cdot C_{n-n}^{k-q_n} = 1 \cdot C_0^{k-q_n} = 0.$$

Отже, ні в першому, ні в другому випадках останній доданок не має жодного внеску в значення кількісного еквівалента F_j двійкового біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$. Тоді довжини двійкових біноміальних чисел $r \le n-1$, тобто $r_{\max} = n-1$. **Теорему доведено.**

Теорема 1.2. Системи кодоутворювальних обмежень для двійкових (n,k)-біноміальних чисел $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ мають вигляд

$$\begin{cases} l = n-k \\ x_r = 0 \end{cases}, \tag{1.1.3}$$

$$\begin{cases} q = k \\ x_r = 1 \end{cases}, \tag{1.1.4}$$

де q і l – числа двійкових одиниць і нулів у двійковому біноміальному числі X_j, $X_j \in X$, $j = 1, 2, ..., |X|$.

Доведення. Скориставшись властивістю симетрії для чисел сполучень [16; 17], ваговий коефіцієнт загального вигляду функції (1.1.2) можна подати як

$$C_{n-i}^{k-q_i} = C_{n-i}^{n-i-(k-q_i)}.$$

Отже, для отримання даних вагових коефіцієнтів числової функції (1.1.2), більших за 0 (тільки в цьому разі має сенс наявність відповідних розрядів у записі X_j), необхідним є дотримання сукупності нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} k - q_i \le n - i \\ n - i - k + q_i \le n - i \end{array} \right. .$$

Після виконання перетворень над наведеними нерівностями, метою яких є перенесення змінних величин, що залежать від номера розряду, у ліві частини, а постійних величин у праві частини, унаслідок чого отримуємо таку систему нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} i-q_i \le n-k \\ q_i \le k \ . \end{array}\right.$$

Потрібно зазначити, що з урахуванням (1.1.1) різниця $i-q_i$ являє собою число l_i нулів від першого розряду до $(i-1)$-го включно, тобто

$$l_i = i - q_i = \sum_{t=1}^{i-1} \overline{x}_t \ .$$

Отже, попередня сукупність нерівностей перетвориться до вигляду

$$\left[\begin{array}{l} l_i \le n-k \\ q_i \le k \ . \end{array}\right. \qquad (1.1.5)$$

З метою виявлення рішень отриманих нерівностей (1.1.5) для двійкових (n,k)-біноміальних чисел X_j проаналізуємо їхні ліві частини. Види першої і другої нерівностей свідчать, що в області завдання сум q_i та l_i, $i=\overline{1,r}$ з отриманням останнього розряду r числа X_j можливими є тільки два випадки – генерування $(n-k)$-го нуля або генерування k-ї одиниці. Водночас згідно з теоремою 1.1 маємо значення $r \le n-1$.

У першому випадку – генерування $(n-k)$-го нуля – під час формування двійкового біноміального числа X_j після деякого $x_z = 1$, $z < i \le n-1$ породжуються тільки нулі

$$\left[\begin{array}{l} x_z = 1 \\ z < i \le n-1 \\ q_i = const \end{array}\right. ,$$

тобто $X_j = x_1 x_2 \ldots x_{z-1} 100\ldots0$. Тоді з першої нерівності (1.1.5) буде випливати

$$l_r = r - q_r = n - k - 1 .$$

Це означає, що двійкове біноміальне число X_j закінчується нулем $x_r = 0$ і в числі міститься постійне число $l = l_r = n - k$ нулів. Отже, для першого випадку виходить така система кодоутворювальних обмежень:

$$\begin{cases} l = n - k \\ x_r = 0 \end{cases} .$$

У другому випадку – генерування k-ї одиниці – під час формування двійкового біноміального числа X_j після деякого $x_z = 0$, $z < i \le n-1$ породжуються тільки одиниці

$$\left[\begin{array}{l} x_z = 0 \\ z < i \le n-1 \\ q_{i+1} = q_i + 1 \end{array}\right. ,$$

тобто $X_j = x_1 x_2 \ldots x_{z-1} 011\ldots1$. Тоді з другої нерівності (1.1.5) випливає

$$q_r = k - 1 .$$

Це означає, що двійкове біноміальне число X_j закінчується одиницею $x_r = 1$ та в числі наявне постійне число $q = q_r + x_r = q_r + 1 = k$ одиниць. Отже, для другого випадку маємо таку систему кодоутворювальних обмежень:

$$\begin{cases} q = k \\ x_r = 1\,. \end{cases}$$

Оскільки x_r може містити тільки два значення – 0 або 1, то результуючі кодоутворювальні обмеження для двійкових (n, k)-біноміальних чисел матимуть такий вигляд:

$$\begin{cases} l = n - k \\ x_r = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} q = k \\ x_r = 1\,. \end{cases}$$

Теорему доведено.

Наведені в теоремі 1.2 системи обмежень (1.1.3) і (1.1.4) на можливі двійкові біноміальні числа є мінімальними (ненадлишковим) порівняно з чинними, зазначеними у [2–4]. Із систем обмежень (1.1.3) і (1.1.4) випливає, що нерівномірні двійкові (n, k)-біноміальні числа являють собою конкатенацію сполучень нулів та одиниць і останнього, що має фіксоване значення, розряду x_r числа (для першої системи обмежень – $x_r = 0$, для другої системи обмежень – $x_r = 1$).

Вимогу існування (n, k)-біноміального числа X_j у двійковій біноміальній системі числення можна задовольнити за допомогою побудови чисел, відповідних системам обмежень (1.1.3) або (1.1.4). Ці числа реалізуються, оскільки зазначені обмеження не є внутрішньо суперечливими.

У таблиці 1.1 наведено всі двійкові біноміальні числа, що належать до $(7,3)$-біноміальної системи числення та розташовані в лексикографічному порядку [4].

Таблиця 1.1 – Двійкові $(7,3)$-біноміальні числа

Номер	Біноміальні числа						Номер	Біноміальні числа					
0	0	0	0	0			18	0	1	1	0	1	
1	0	0	0	1	0		19	0	1	1	1		
2	0	0	0	1	1	0	20	1	0	0	0	0	
3	0	0	0	1	1	1	21	1	0	0	0	1	0
4	0	0	1	0	0		22	1	0	0	0	1	1
5	0	0	1	0	1	0	23	1	0	0	1	0	0
6	0	0	1	0	1	1	24	1	0	0	1	0	1
7	0	0	1	1	0	0	25	1	0	0	1	1	
8	0	0	1	1	0	1	26	1	0	1	0	0	0
9	0	0	1	1	1		27	1	0	1	0	0	1
10	0	1	0	0	0		28	1	0	1	0	1	
11	0	1	0	0	1	0	29	1	0	1	1		
12	0	1	0	0	1	1	30	1	1	0	0	0	0
13	0	1	0	1	0	0	31	1	1	0	0	0	1
14	0	1	0	1	0	1	32	1	1	0	0	1	
15	0	1	0	1	1		33	1	1	0	1		

Продовження таблиці 1.1

Номер	**Біноміальні числа**						**Номер**	**Біноміальні числа**					
16	0	1	1	0	0	0	34	1	1	1			
17	0	1	1	0	0	1							

У роботах [3; 4] у докладній формі подано опис властивостей двійкових біноміальних чисел щодо їхніх параметрів n, k і довжини r, які сформульовані у вигляді окремих доведених теорем. Потрібно зазначити, що з урахуванням удосконалених систем обмежень (1.1.3) і (1.1.4) доведення цих теорем матимуть простіший і систематичний вигляд, оскільки тепер порядок виведення тверджень для двійкових біноміальних чисел, які належать як до системи обмежень (1.1.3), так і до системи обмежень (1.1.4), буде аналогічним.

У цій монографії перелічимо лише необхідні властивості двійкових (n,k)-біноміальних чисел, наведені в [3; 4], які безпосередньо стосуються розроблення методів біноміального адаптивного стиснення двійкової інформації:

1. Мінімальне і максимальне значення параметра k двійкової (n,k)-біноміальної системи числення

$$k_{\min} = 1 \text{ і } k_{\max} = n-1,\ n = 2,3,\dots . \tag{1.1.6}$$

2. Мінімальна кількість розрядів двійкових (n,k)-біноміальних чисел

$$r_{\min} = \min(k, n-k). \tag{1.1.7}$$

3. У двійкових (n,k)-біноміальних числах $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$, що задають обмеження (1.1.3), кількість одиниць

$$q = r - n + k\,, \tag{1.1.8}$$

у тих, що задають обмеження (1.1.4), кількість нулів

$$l = r - k\,. \tag{1.1.9}$$

4. Кількість одиниць у двійкових (n,k)-біноміальних числах X_j, що формуються з урахуванням системи обмежень (1.1.3)

$$q = 0, 1, ..., k - 1\,. \tag{1.1.10}$$

Кількість нулів у двійкових (n,k)-біноміальних числах X_j, що формуються з урахуванням системи обмежень (1.1.4)

$$l = 0, 1, ..., n - k - 1\,. \tag{1.1.11}$$

5. Кількість d різних довжин двійкових (n,k)-біноміальних чисел X_j дорівнює

$$d = \max(k, n - k) \tag{1.1.12}$$

і, отже, утворений ними код є нерівномірним.

6. Двійкові (n,k)-біноміальні числа задовольняють властивості префіксності, що означає те, що жодне число не є початком іншого.

1.2 Середня арифметична довжина двійкових біноміальних чисел повного діапазону

Як випливає з теорем 1.1 і 1.2, двійкові (n,k)-біноміальні числа мають різну кількість r розрядів у межах $\min(k,n-k)\le r\le n-1$ і, відповідно, утворений ними код є нерівномірним (табл. 1.1). Важливим завданням як для розроблення методів біноміального стиснення, перетворення і подання даних, так і для оцінювання ефективності цих методів, є завдання знаходження середньої довжини двійкових нерівномірних (n,k)-біноміальних чисел [13]. Виконання такого завдання дозволить розробити більш точний і математично суворий механізм оцінювання складнісних характеристик алгоритмів біноміального стиснення і перетворення інформації, і, отже, забезпечити більш об'єктивний підхід до порівняння розроблених методів біноміального стиснення даних із вже наявними.

Середнє арифметичне значення довжин r двійкових (n,k)-біноміальних чисел X_j визначається для випадку, коли $|X|=C_n^k$, і визначається без урахування ймовірностей їхньої появи, тобто коли вони рівноймовірні, інакше кажучи, породжуються комбінаторним джерелом X^r [18; 19].

Розглянемо сімейство $\{A,B\}$, яке являє собою розбиття множини X двійкових (n,k)-біноміальних чисел X_j, де перший клас A містить $l=n-k$ нулів і q одиниць, $0\le q\le k-1$

$$A=\left\{X_j/(l=n-k)\wedge(x_r=0),0\le\sum_{i=1}^{r}x_i\le k-1\right\}, \qquad (1.2.1)$$

а другий клас B – $q = k$ одиниць і l нулів, $0 \le l \le n-k-1$

$$B = \left\{ X_j / \left(q = k\right) \wedge \left(x_r = 1\right), 0 \le \sum_{i=1}^{r} \overline{x}_i \le n-k-1 \right\}. \qquad (1.2.2)$$

Водночас $X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, $A \ne \varnothing$, $B \ne \varnothing$.

Далі умовимося, що комбінаторне джерело X^r генерує нерівномірні (n,k)-біноміальні числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$, $\min(k, n-k) \le r \le n-1$ (теореми 1.1 і 1.2), $x_i \in \{0,1\}$, $j = \overline{1, C_n^k}$.

Теорема 1.3. Середня арифметична довжина L_{cp} двійкових (n,k)-біноміальних чисел $X_j \in X^r$, $j = \overline{1, C_n^k}$, рівна

$$L_{cp} = \frac{k(n-k)(n+2)}{(k+1)(n-k+1)}. \qquad (1.2.3)$$

Доведення. Середнє арифметичне довжин r чисел X_j, $\min(k, n-k) \le r \le n-1$ визначається як

$$L_{cp} = \frac{1}{N} \sum_{r=\min(k,n-k)}^{n-1} r \cdot N_r . \qquad (1.2.4)$$

де N – загальна кількість біноміальних чисел, $N = \left| X^r \right|$;

N_r – кількість біноміальних чисел розрядності r.

Дотримуючись розкладання множини $X^r = X$ двійкових нерівномірних (n,k)-біноміальних чисел на два класи A і B, вираз (1.2.4) можна подати так:

$$L_{cp} = \frac{1}{N}\left(\sum_{r=n-k}^{n-1} r \cdot N_r{}' + \sum_{r=k}^{n-1} r \cdot N_r{}'' \right), \qquad (1.2.5)$$

де $N_r{}'$ і $N_r{}''$ – кількості біноміальних чисел довжини r, що належать до першого A і другого B класів відповідно,

$$|A| = \sum_{r=n-k}^{n-1} N_r{}' \text{ і } |B| = \sum_{r=k}^{n-1} N_r{}''.$$

Згідно з (1.1.8) і (1.1.10), а також, тому що $N_q = C_{n-k+q-1}^{q}$ [7, лема 2.4] для першого класу A двійкових (n,k)-біноміальних чисел, випливає

$$r = n-k+q,\ 0 \le q \le k-1,\ N_r{}' = N_q = C_{n-k+q-1}^{q}. \qquad (1.2.6)$$

Згідно з (1.1.9) і (1.1.11), а також, тому що $N_l = C_{k+l-1}^{l}$ [7, лема 2.3] для другого класу B двійкових (n,k)-біноміальних чисел, випливає

$$r = k+l,\ 0 \le l \le n-k-1,\ N_r{}'' = N_l = C_{k+l-1}^{l}. \qquad (1.2.7)$$

Перша і друга суми виразу (1.2.5) з урахуванням (1.2.6) і (1.2.7) набувають, відповідно, вигляду

$$\sum_{r=n-k}^{n-1} r \cdot N_r{}' = \sum_{q=0}^{k-1} (n-k+q) \cdot C_{n-k+q-1}^{q} = \sum_{q=0}^{k-1} (n-k) \cdot C_{n-k+q}^{q} = = (n-k) \sum_{q=0}^{k-1} C_{n-k+q}^{q},$$

$$\sum_{r=k}^{n-1} r \cdot N_r{}'' = \sum_{l=0}^{n-k-1} (k+l) \cdot C_{k+l-1}^{l} = \sum_{l=0}^{n-k-1} k \cdot C_{k+l}^{l} = k \sum_{l=0}^{n-k-1} C_{k+l}^{l}.$$

Використовуючи формулу підсумовування біноміальних коефіцієнтів [16; 17; 25]

$$\sum_{\gamma=0}^{\beta} C_{\alpha+\gamma}^{\gamma} = C_{\alpha+\beta+1}^{\beta},$$

отримаємо

$$\sum_{r=n-k}^{n-1} r \cdot N_r{}' = (n-k)\sum_{q=0}^{k-1} C_{n-k+q}^{q} = (n-k)C_n^{k-1},$$

$$\sum_{r=k}^{n-1} r \cdot N_r{}'' = k\sum_{l=0}^{n-k-1} C_{k+l}^{l} = k \cdot C_n^{n-k-1}.$$

Унаслідок цього за умови загальній кількості $N = C_n^k$ [7, теорема 2.15] (n,k)-біноміальних чисел X_j вираз (1.2.5) для середнього арифметичного довжин біноміальних чисел X_j набуде вигляду

$$L_{cp} = \frac{(n-k)C_n^{k-1} + k \cdot C_n^{n-k-1}}{C_n^k}.$$

Далі за допомогою винесення множника $k/(n-k+1)$ з числа сполучень C_n^{k-1} і множника $(n-k)/(k+1)$ з числа сполучень C_n^{n-k-1} отримаємо

$$L_{cp} = \frac{\left(k(n-k)/(n-k+1)\right)C_n^k + \left(k(n-k)/(k+1)\right)\cdot C_n^k}{C_n^k} =$$

$$= \frac{k(n-k)}{n-k+1} + \frac{k(n-k)}{k+1} = k(n-k)\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$=\frac{k(n-k)(n+2)}{(k+1)(n-k+1)}.$$

Теорему доведено.

Розглядаючи далі структури першого A (1.2.1) та другого B (1.2.2) класів множини X двійкових (n,k)-біноміальних чисел X_j, можна дійти таких висновків. Сімейство $\{A_q\}_{q=\overline{0,k-1}}$ являє собою розбиття підмножини A,

$$A\subset X: \qquad \bigcup_{q=0}^{k-1} A_q = A, \qquad A_q \neq \varnothing, \qquad A_{q'}\cap A_{q''}=\varnothing,$$

$\forall q',q''\in\{0,1,\ldots,k-1\}$, де

$$A_q=\left\{X_j\in A \,/\, \sum_{i=1}^{r} x_i = q\right\}, \tag{1.2.8}$$

а сімейство $\{B_l\}_{l=\overline{0,n-k-1}}$ являє собою розбиття підмножини B, $B\subset X$: $\bigcup_{l=0}^{n-k-1} B_l = B$, $B_l\neq\varnothing$, $B_{l'}\cap B_{l''}=\varnothing$,

$\forall l',l''\in\{0,1,\ldots,n-k-1\}$, де

$$B_l=\left\{X_j\in B \,/\, \sum_{i=1}^{r} \overline{x}_i = l\right\}. \tag{1.2.9}$$

Підмножини A_q або B_l будемо називати підкласами першого A та другого B класів множини X відповідно.

Теорема 1.4. Для двійкових (n,k)-біноміальних чисел максимальне значення середньої довжини L_{cp} становить

$$L_{cp\max} = \max_{1 \le k \le n-1} L_{cp} = \frac{n^2}{n+2} \qquad (1.2.10)$$

за умови $k = n/2$, якщо n – парне число, або

$$L_{cp\max} = \max_{1 \le k \le n-1} L_{cp} = \frac{(n-1)(n+2)}{n+3} \qquad (1.2.11)$$

за умови $k = (n \pm 1)/2$, якщо n − непарне число, а мінімальне значення середньої довжини L_{cp} рівне

$$L_{cp\min} = \min_{1 \le k \le n-1} L_{cp} = \frac{(n-1)(n+2)}{2n} \qquad (1.2.12)$$

за умови $k = 1$ і $k = n-1$.

Доведення. На підставі виразу $N = C_n^k$ [4, теорема 2.15] і властивості біноміальних коефіцієнтів [16; 17] найбільшу кількість двійкових (n, k)-біноміальних чисел спостерігають за умови $k = n/2$, якщо n – парне, тобто коли $C_n^{n/2}$, або за умови $k = (n \pm 1)/2$, якщо n – непарне, тобто коли $C_n^{(n \pm 1)/2}$. Водночас відповідно до $N_q = C_{n-k+q-1}^q$ і $N_l = C_{k+l-1}^l$ [4, леми 2.3, 2.4] збільшення кількості двійкових (n, k)-біноміальних чисел за умови зростання k від нульового або зменшення $(n-k)$ від n-го значення до $n/2$ забезпечується завдяки додаванню підкласів A_q (1.2.8) або B_l (1.2.9) відповідно, що мають числа з великим значенням довжини r (наслідки з теорем 2.17, 2.18 із [4], а також [3]). Звідси середнє значення L_{cp} має максимум за умови $k = n/2$, якщо n – парне, і $k=(n\pm1)/2$, якщо n – непарне, і мінімум за умови $k=1$ і $k=n-1$.

Далі, підставивши в (1.2.3) значення $k=n/2$ і виконавши необхідні перетворення, отримуємо максимальну величину для середньої довжини двійкових біноміальних чисел

$$L_{cp\max}=\max_{1\le k\le n-1}L_{cp}=\frac{n^2(n+2)}{4\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}=\frac{n^2(n+2)}{4\left(\frac{n+2}{2}\right)^2}=\frac{n^2}{n+2},$$

коли n – парне. Аналогічно, підставивши в (1.2.3) значення $k=(n+1)/2$, після нескладних перетворень одержуємо максимальну величину для середньої довжини двійкових біноміальних чисел

$$L_{cp\max}=\max_{1\le k\le n-1}L_{cp}=\frac{(n+1)(n-1)(n+2)}{4\left(\frac{n+3}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)}=\frac{(n-1)(n+2)}{(n+3)},$$

коли n − непарне. Такий самий результат буде, якщо у вираз (1.2.3) підставити значення $k=(n-1)/2$.

Підставивши в (1.2.3) значення $k=1$ або $k=n-1$, отримуємо мінімальне значення середньої довжини двійкових біноміальних чисел

$$L_{cp\min}=\min_{1\le k\le n-1}L_{cp}=\frac{(n-1)(n+2)}{2n}.$$

Теорему доведено.

Відношення (1.2.3) кількісно визначає одну з важливих характеристик двійкових нерівномірних (n,k)-біноміальних чисел – їхню середню довжину залежно від параметрів чисел n і k (тобто відповідної двійкової (n,k)-біноміальної системи числення).

РОЗДІЛ 2
СТИСНЕННЯ НА ОСНОВІ ДВІЙКОВИХ БІНОМІАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

2.1 Моделі стиснення та відновлення рівноважних комбінацій на основі двійкових біноміальних чисел

Обґрунтування доцільності розроблення методів стиснення даних на основі двійкових (n,k)-біноміальних чисел X_j [20; 21], які генеруються (n,k)-біноміальними системами числення, такі:

1) нерівномірність X_j, довжина r яких менше за довжину n вихідних кодів-сполучень Y_j, які стискаються, що забезпечує коефіцієнт стиснення більше за одиницю (теорема 1.1, підрозділ 1.1);

2) функціональність відповідностей $G \subseteq X \times Y$, $\left(X_j, Y_j\right) \in G$ і $Z \subseteq Y \times X$, $\left(Y_j, X_j\right) \in Z$ між множинами X біноміальних чисел X_j і Y кодів-сполучень Y_j, що призводить до бієктивних біноміальних відображень $\varphi : X \to Y$ і $\varphi^{-1} : Y \to X$ та забезпечує взаємну однозначність кодування [22; 23];

3) префіксність двійкових біноміальних чисел X_j, що дозволяє без додаткових часових та апаратно-програмних витрат на формування роздільників проводити стискальне кодування і відновлення кодів-сполучень Y_j [3; 4];

4) розповсюдженість кодів-сполучень Y_j (рівноважних, квазірівноважних, з обмеженнями на взаємне розташування одиниць тощо), котрі застосовують для подання

інформації в цифрових пристроях і комп'ютерних системах [22; 23].

Реалізація біноміального відображення $\varphi^{-1}: Y \to X$ у межах побудови математичної моделі перерахування для вихідних двійкових n-розрядних послідовностей $Y_j\left[R_Y\right] \in Y$ із заданим обмеженням $R_Y = k$ являє собою стиснення

$$f_b : Y\left[n,k\right] \to X\left[n,k\right]$$

рівноважних комбінацій $Y_j \in Y\left[n,k\right]$ на основі двійкових $\left(n,k\right)$-біноміальних чисел $X_j \in X\left[n,k\right]$. Зі свого боку, реалізація біноміального відображення $\varphi : X \to Y$ у межах побудови математичної моделі генерування для $Y_j\left[R_Y\right] \in Y$ із заданим обмеженням $R_Y = k$ означає відновлення

$$f_b^{-1} : X\left[n,k\right] \to Y\left[n,k\right]$$

вихідних рівноважних комбінацій $Y_j \in Y\left[n,k\right]$ на основі двійкових $\left(n,k\right)$-біноміальних чисел $X_j \in X\left[n,k\right]$.

Нижченаведена теорема 2.1 наводить властивості відображення f_b і спосіб його практичної реалізації. Умовимося операцію декатенації позначати символом "/".

Теорема 2.1. Будь-якій двійковій послідовності $Y_j = y_1 y_2 \ldots y_i \ldots y_n$, $Y_j \in Y\left[n,k\right]$, $j = \overline{1, C_n^k}$, складеної з n розрядів y_i, сума значень яких рівна k, можна поставити у відповідність єдине двійкове $\left(n,k\right)$-біноміальне число $X_j = x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r$, $X_j \in X\left[n,k\right]$, $r < n$ за допомогою функції $X_j = f_b\left(Y_j\right)$ вигляду

$$X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r = \begin{cases} y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0/00...0 \\ y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1/11...1 . \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Доведення. Першим кроком є обґрунтування відповідності X_j, отриманого як результат функції (2.1.1), системам кодоутворювальних обмежень (1.1.3) і (1.1.4), а другим кроком – функціональність відповідності $X_j = f_b\left(Y_j\right)$, що означає одиничність X_j прообразу Y_j за умови розглянутого відображення.

На множині $Y\left[n,k\right]$ наявне розбиття $\left\{Y', Y''\right\}$, $Y' \cup Y'' = Y\left[n,k\right]$, $Y' \cap Y'' = \varnothing$, де $Y' = \left\{Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0\right\}$ й $Y'' = \left\{Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1\right\}$ – класи еквівалентності за значенням y_n. Застосувавши до $Y_j \in Y'$ операцію декатенації, як подано (2.1.1), одержимо X_j, які містять k одиниць і $x_r = 1$, що задовольняє систему обмежень (1.1.4). Застосувавши тепер до $Y_j \in Y''$ операцію декатенації (2.1.1), одержимо X_j, які містять $n-k$ нулів і $x_r = 0$, що задовольняє вже систему обмежень (1.1.3). Тому що інших двійкових послідовностей Y_j, крім як $Y_j \in Y'$ і $Y_j \in Y''$ не існує, то всі X_j, що є результатом $X_j = f_b\left(Y_j\right)$ (2.1.1), являють собою двійкові біноміальні числа $X_j \in X\left[n,k\right]$.

Одиничність образу X_j, що відповідає Y_j, випливає з того, що операція декатенації "/" не змінює значень y_i комбінацій Y_j. Отже, якщо $Y_j \neq Y_z$, то після (2.1.1) випливає $X_j \neq X_z$. **Теорему доведено.**

Визначення 2.1. *Методом стиснення* f_b *на основі двійкових* (n,k)*-біноміальних чисел (або біноміальним стисненням) називається відображення*

$$f_b : Y[n,k] \to X[n,k],$$

котре задається функцією вигляду

$$X_j = f_b(Y_j) = \begin{bmatrix} Y_j/00...0,\ y_n = 0 \\ Y_j/11...1,\ y_n = 1 \end{bmatrix} = x_1 x_2 ... x_i ... x_r, \quad (2.1.2)$$

де $Y[n,k]$ *– множина вихідних двійкових* n*-розрядних послідовностей* $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$*, які мають число* k *одиниць,* $Y_j \in Y[n,k]$

$$Y[n,k] = \left\{ Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n \,/ \sum_{i=1}^{n} y_i = k,\ y_i \in \{0,1\} \right\};$$

$X[n,k]$ *– множина двійкових* (n,k)*-біноміальних чисел* $X_j \in X[n,k]$

$$X[n,k] = \{x_1 x_2 ... x_i ... x_r \,/$$
$$/\left(\left(l = n-k\right) \wedge \left(x_r = 0\right)\right) \vee \left(\left(q = k\right) \wedge \left(x_r = 1\right)\right)\}.$$

Моделювання процесу стиснення f_b двійкових рівноважних комбінацій $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$ на основі двійкових (n,k)-біноміальних чисел X_j із застосовуванням теореми 2.1 і функції (2.1.1) складається з таких етапів.

Етап 1. Визначається в n-розрядній рівноважній комбінації $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$, яка має число k одиниць, значення останнього розряду y_n.

Етап 2. Якщо $y_n = 0$, то

$$X_j = Y_j / 00...0 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0 / 00...0 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1,$$

тобто від комбінації $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0$ відкидаються всі нульові розряди, починаючи з $y_n = 0$, до появи першої двійкової одиниці $y_r = 1$, котра буде являти собою значення останнього розряду $x_r = y_r = 1$ вихідного (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1$. В іншому разі

$$X_j = Y_j / 11...1 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1 / 11...1 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0,$$

тобто від комбінації $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1$ відкидаються всі одиничні розряди, починаючи з $y_n = 1$, до появи першого двійкового нуля $y_r = 0$, котрий буде являти собою значення останнього розряду $x_r = y_r = 0$ вихідного (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0$. Водночас в обох випадках значення інших розрядів залишаються без змін: $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \ldots, x_{r-1} = y_{r-1}$.

Уведемо тепер у розгляд операцію конкатенації, яку позначимо як "$++$". Ця дія є зворотною стосовно операції декатенації.

Теорема 2.2. Будь-якому двійковому (n,k)-біноміальному числу $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$, $X_j \in X[n,k]$, $r < n$ можна поставити у відповідність єдину двійкову рівноважну комбінацію $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$, $Y_j \in Y[n,k]$, $j = \overline{1, C_n^k}$, складену з n розрядів y_i, сума значень яких рівна k, за допомогою функції $Y_j = f_b^{-1}\left(X_j\right)$ вигляду

$$Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n = \begin{bmatrix} x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0 + +11...1 \\ x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1 + +00...0 \end{bmatrix}. \quad (2.1.3)$$

Доведення. Першим кроком доказу є доведення того, що Y_j, отримані унаслідок (2.1.3), є рівноважними комбінаціями $Y_j \in Y[n,k]$, а другим – функціональність відповідності $Y_j = f_b^{-1}\left(X_j\right)$, що означає одиничність Y_j прообразу X_j за умови розглянутого відображення.

Покажемо, що конкатенація з (2.1.3) вигляду

$$x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0 + +11...1 \quad (2.1.4)$$

призводить до двійкової рівноважної комбінації $Y_j \in Y[n,k]$, що має $(n-k)$ нулів і k одиниць. Згідно із властивістю (1.1.10) $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0$ містить $(n-k)$ нулів і $q = 0,1,...,k-1$ одиниць, а із властивості (1.1.8) випливає $r = n-k+q$ (див. підрозділ 1.1). Додавання рядка 11...1 кількістю $(n-r)$ розрядів, щоб їхнє загальне число для Y_j стало рівним n, не змінює числа $(n-k)$ нулів, але призводить до такого результуючого значення числа одиниць:

$$q + (n-r) = q + \left(n - (n-k+q)\right) = k .$$

Отже, отримана із (2.1.4) комбінація є рівноважна $Y_j \in Y[n,k]$.

Покажемо тепер, що конкатенація із (2.1.3) вигляду

$$x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 1 + +00\ldots 0 \qquad (2.1.5)$$

також призводить до двійкової рівноважної комбінації $Y_j \in Y\left[n,k\right]$, що має $\left(n-k\right)$ нулів і k одиниць. Згідно із властивістю (1.1.11) $X_j = x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 1$ містить k одиниць і $l = 0,1,\ldots,n-k-1$ нулів, а із властивості (1.1.9) випливає $r = k + l$ (див. підрозділ 1.1). Додавання рядка $00\ldots 0$ кількістю $\left(n-r\right)$ розрядів, щоб їхнє загальне число для Y_j стало рівним n, не змінює числа k одиниць, але призводить до такого результуючого значення числа нулів:

$$l + \left(n-r\right) = l + \left(n - \left(k + l\right)\right) = n - k\,.$$

Отже, отримана із (2.1.5) комбінація теж є рівноважна $Y_j \in Y\left[n,k\right]$.

Звідси випливає, що область значень $Y_j = f_b^{-1}\left(X_j\right)$ (2.1.3) становлять двійкові рівноважні комбінації $Y_j \in Y\left[n,k\right]$.

Одиничність образу Y_j, що відповідає X_j, випливає з того, що операція конкатенації "$++$" не змінює значень x_i чисел X_j. Отже, якщо $X_j \neq X_z$, то після (2.1.3) випливає $Y_j \neq Y_z$. **Теорему доведено.**

Наслідок. Функція $Y_j = f_b^{-1}\left(X_j\right)$ може також мати такий вигляд:

$$Y_j = y_1 y_2 \ldots y_i \ldots y_n = \\ = \begin{cases} x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r + +11\ldots 1, \text{ якщо } 0 \le q < k \\ x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r + +00\ldots 0, \text{ якщо } q = k\,. \end{cases} \qquad (2.1.6)$$

Моделювання процесу відновлення f_b^{-1} двійкових рівноважних комбінацій $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$ на основі двійкових (n, k)-біноміальних чисел X_j із використанням теореми 2.2 і функції (2.1.3) складається з таких етапів.

Етап 1. Визначається у двійковому (n, k)-біноміальному r-розрядному числі $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$, $X_j \in X[n, k]$, $r < n$, значення останнього розряду x_r.

Етап 2. Якщо $x_r = 0$, то

$$Y_j = X_j + +11...1 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0 + +11...1 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1,$$

тобто до двійкового (n, k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0$ приєднуються одиничні розряди 11...1: $y_{r+1} = y_{r+2} = ... = y_n = 1$. В іншому разі

$$Y_j = X_j + +00...0 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1 + +00...0 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0,$$

тобто до двійкового (n, k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1$ приєднуються нульові розряди $00...0$: $y_{r+1} = y_{r+2} = ... = y_n = 0$. В обох випадках загальна кількість розрядів отриманої двійкової рівноважної комбінації Y_j повинна становити n, $Y_j \in Y[n, k]$. Водночас значення інших розрядів залишаються без змін: $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, …, $y_r = x_r$.

У випадках, коли є обмеження на довжину розрядної сітки для зберігання поточної кількості розрядів Y_j, то більш вигідним є використання функції $Y_j = f_b^{-1}(X_j)$ вигляду (2.1.6), яка вимагає обчислення $q < n$ або $l < n$. Тоді метод моделювання процесу відновлення f_b^{-1} двійкових рівноважних комбінацій $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$ на основі двійкових (n,k)-біноміальних чисел X_j із використанням уже функції (2.1.6) буде складатися з таких етапів.

Етап 1. Обчислюється у двійковому (n,k)-біноміальному числі $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$, $X_j \in X[n,k]$, $r < n$, число $q = \sum_{i=1}^{r} x_i$ одиниць, $0 \le q \le k$.

Етап 2. Якщо $0 \le q < k$, то

$$Y_j = X_j + +11...1 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0 + +11...1 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1,$$

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ приєднуються одиничні розряди $11...1$ доти, поки їх не стане $q = k$. В іншому разі

$$Y_j = X_j + +00...0 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1 + +00...0 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0,$$

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ приєднуються нульові розряди $00...0$ доти, поки їх не стане $l = n - k$. В обох випадках маємо вихідну рівноважну комбінацію Y_j, $Y_j \in Y[n,k]$, значення інших розрядів якої $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, …, $y_{r-1} = x_{r-1}$.

Теорема 2.3. Відображення $f_b : Y[n,k] \to X[n,k]$ є бієктивним.

Доведення. Оскільки відповідності $X_j = f_b(Y_j)$ і $Y_j = f_b^{-1}(X_j)$ є функціональні (теореми 2.1 і 2.2), тобто кожний елемент $Y_j \in Y[n,k]$ має єдиний образ $X_j \in X[n,k]$, а кожний елемент $X_j \in X[n,k]$ – єдиний прообраз $Y_j \in Y[n,k]$, то відображення $f_b : Y[n,k] \to X[n,k]$ є взаємно однозначним, або бієктивним. **Теорему доведено.**

Результати відображення $f_b : Y[n,k] \to X[n,k]$ і, отже, $f_b^{-1} : X[n,k] \to Y[n,k]$ для випадку $n = 8$ і $k = 2$ наведено в таблиці 2.1, у якій затінені комірки означають розряди рівноважних комбінацій Y_j, що відкидаються відповідно до (2.1.1) або додаються до двійкових біноміальних X_j чисел відповідно до (2.1.3), $j = 1, 2, ..., C_8^2$.

Як приклад проведемо стиснення f_b вихідної рівноважної комбінації $Y_j \in Y[16,4]$ – $Y_j = 1000100001100000$. Згідно з (2.1.1) одержуємо стисле зображення Y_j у вигляді $X_j \in X[16,4]$

$$X_j = 1000100001100000/00000 = 10001000011.$$

Водночас довжина результуючої комбінації скорочується з 16 розрядів до 11, тобто в 1,45 раза.

Відновлення f_b^{-1} рівноважної комбінації, наприклад $Y_j \in Y[20,16]$, маючи двійкове біноміальне число $X_j \in X[20,16]$ – $X_j = 010010$, проводиться згідно з (2.1.3) в такий спосіб:

$$Y_j = 010010 + +11111111111 = 01001011111111111.$$

Таблиця 2.1 – Відповідність між $Y[8,2]$ та $X[8,2]$

№ пор.	**Рівноважний код $Y[8,2]$**								**Множина $X[8,2]$**						
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
5	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	
6	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
8	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	
9	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1		
10	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
11	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
12	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	
13	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1		
14	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1			
15	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
16	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
17	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	
18	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1		
19	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1			
20	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1				

Продовження таблиці 2.1

№ пор.	Рівноважний код $Y[8,2]$								Множина $X[8,2]$						
21	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
22	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
23	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	
24	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1		
25	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1			
26	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1				
27	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1					

З метою розширення застосування двійкових (n,k)-біноміальних чисел для стиснення інших кодових послідовностей розглянемо таку вихідну множину:

$$A=\{0,1\}^n,\ A_j \in A,\ A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n,\ j=\overline{1,2^n},$$

а також введемо до розгляду функцію $Y_j = f_w(A_j)$, яка приводить у відповідність вихідній послідовності A_j впорядковану вибірку вигляду (k,Y_j), де $Y_j = A_j$, і визначає відображення вигляду

$$Y_j = f_w(A_j),\ f_w : A \to M, \tag{2.1.7}$$

$$M = \{(k,Y_j) / 0 \le k \le n, Y_j \in Y[n,k]\}.$$

2.2 Моделі узагальнених стиснення і відновлення на основі двійкових біноміальних чисел

Відображення вигляду f_b й f_b^{-1} оперують із двійковими n-розрядними комбінаціями $Y_j\left[R_Y\right] \in Y$ із заданим обмеженням $R_Y = k$, тобто число k одиниць є величиною постійною, а $Y = Y\left[n,k\right]$. Водночас потрібно врахувати, що на підставі властивостей двійкових $\left(n,k\right)$-біноміальних чисел (1.1.6) $k_{\min} = 1$ і $k_{\max} = n-1$. Більш загальним є випадок, коли k може набувати будь-яких значень із заданого діапазону $0 \le k \le n$, а інформаційний масив A, що стискається, являє собою множину

$$A = \bigcup_{k=0}^{n} Y\left[n,k\right] \text{ і } A_j \in A = \left\{0,1\right\}^n, \ j = \overline{1,2^n},$$

двійкових n-розрядних A_j, для яких є відсутнім обмеження за числом k одиниць [21].

З урахуванням того, що двійкові $\left(n,k\right)$-біноміальні числа X_j є префіксними тільки для постійного значення k [3; 4], то для однозначного відновлення $A_j \in A = \left\{0,1\right\}^n$ з чисел X_j випливає необхідність додатково використовувати значення k одиниць, вираженого у двійковому вигляді $\operatorname{Bin} k$.

Стискуючи A_j, необхідно використовувати функцію f_w (2.1.7), що ставить у відповідність вихідній послідовності A_j вибірку $\left(k, Y_j\right)$, де $Y_j = A_j$. Далі, якщо отримане значення k задовольняє нерівності $0 < k < n$, то для стиснення рівноважної комбінації Y_j, що відповідає A_j, використовується кодування f_b на основі двійкових біноміальних чисел. Водночас до стиснутих комбінацій для однозначного відновлення додається $\mathrm{Bin}\,k$, тобто виконується додатково кодування вигляду f_k. Якщо ж значення k задовольняє системі рівностей $(k=0)\vee(k=n)$, то кодована результуюча комбінація буде складатися тільки з $\mathrm{Bin}\,k$, тобто використано єдиний метод кодування f_k.

Отже, розглянемо відображення вигляду

$$f_{bg} : A \to Z\ ,$$

яке задано відповідною функцією

$$Z_j = f_{bg}\left(A_j\right),$$

де $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, $A_j \in A = \{0,1\}^n$, $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\,k, X_j\right)$ або $Z_j = \mathrm{Bin}\,k$, $Z_j \in Z$, $j = \overline{1, 2^n}$. Теорема 2.4 наводить властивості відображення f_{bg} і спосіб його реалізації.

Теорема 2.4. Будь-якій двійковій послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, $A_j \in A = \{0,1\}^n$, $j = \overline{1, 2^n}$ можна поставити у взаємну однозначну відповідність двійкову комбінацію $Z_j \in Z$ такого вигляду:

1) якщо $0 < k < n$, то

$$Z_j = \mathrm{Bin}\,k + + X_j, \tag{2.2.1}$$

де $k = \sum_{i=1}^{n} a_i$ і $X_j = f_b\left(Y_j\right)$, $X_j \in X[n,k]$, $Y_j \in Y[n,k] \subset A$;

2) в іншому разі, якщо $(k=0)\vee(k=n)$, то

$$Z_j = \mathrm{Bin}\,k\,. \tag{2.2.2}$$

Доведення. Наведемо доказ від зворотного. Спочатку розглянемо пряме $f_{bg}: A \to Z$ й зворотне $f_{bg}^{-1}: Z \to A$ відображення для першого випадку – комбінації Z_j вигляду (2.2.1).

Припустимо, що за умови прямого відображення f_{bg} для A_j існують дві двійкові комбінації Z'_j і Z''_j, $Z'_j \neq Z''_j$. Нехай рівноважна комбінація Y_j є результатом дії функції f_w (2.1.7), яка відбиває функціональну відповідність між A_j і (k, Y_j), де $Y_j = A_j$, тобто $A_j \underset{f_w}{\to} (k, Y_j)$. Оскільки $Y_j = A_j$, то згідно з теоремою 2.1 у комбінаціях вигляду

$$Z'_j = \mathrm{Bin}\,k' ++ X'_j \text{ і } Z''_j = \mathrm{Bin}\,k'' ++ X''_j$$

не можуть бути різними X'_j і X''_j, тобто $X'_j = X''_j$. Дотримуючись нашого припущення від зворотного, повинно бути $\mathrm{Bin}\,k' \neq \mathrm{Bin}\,k''$, але A_j не може мати два різні значення числа k одиниць, тобто $\mathrm{Bin}\,k' = \mathrm{Bin}\,k''$. Унаслідок цього $Z'_j = Z''_j = Z_j$ і наше припущення для прямого відображення f_{bg} є неправильним. Отже, двійковій послідовності A_j можна поставити у відповідність єдину комбінацію Z_j вигляду (2.2.1).

Тепер припустимо, що за умови зворотного відображення f_{bg}^{-1} для Z_j існують дві двійкові послідовності A'_j і A''_j, $A'_j \neq A''_j$. Згідно з теоремою 2.2 двійковому

(n,k)-біноміальному числу X_j можна поставити у відповідність єдину комбінацію Y_j. Дотримуючись зворотної функції f_w^{-1}, маємо $(k,Y_j)\underset{f_w^{-1}}{\rightarrow} A_j$ і $Y_j = A_j$, тобто $A'_j = A''_j = A_j$. Тоді наше припущення про різні A'_j і A''_j для комбінації Z_j, що належить до першого випадку (2.2.1), також є неправильним.

Звідси для (2.2.1) за умови прямого f_{bg} і зворотного f_{bg}^{-1} відображень є взаємна однозначність між A_j і Z_j.

Для другого випадку (2.2.2) взаємна однозначна відповідність Z_j і A_j обумовлюється одиничністю значень $k=0$ або $k=n$ для A_j, які складаються з одних тільки нулів або одиниць відповідно.

Очевидно, що справедливість доказування не зміниться і в разі розгляду більш ніж двох різних Z'_j, Z''_j, … або A'_j, A''_j, … . Отже, є взаємна однозначна відповідність між A_j і Z_j за умови прямого f_{bg} і зворотного f_{bg}^{-1} відображень. **Теорему доведено.**

Наслідок. Відображення $f_{bg}: A \rightarrow Z$ є бієктивним.

Насправді кожний елемент A_j має єдиний образ, а кожний елемент Z_j – єдиний прообраз для всіх $A_j \in A$ і $Z_j \in Z$. Звідси випливає бієктивність розглянутого відображення f_{bg}.

Способи практичної реалізації відображень f_{bg} і f_{bg}^{-1}, зазначених у теоремі 2.4, можуть бути різними. Обрані підходи до побудови f_{bg} і f_{bg}^{-1}, методи кодування і сформовані для них моделі процесів у кінцевому підсумку впливають на швидкодію та об'єм апаратно-програмних витрат за умови практичної реалізації узагальненого методу стиснення f_{bg} двійкових послідовностей, коли кількість k одиниць може набувати будь-яких значень у $0 \le k \le n$.

Визначення 2.2. *Узагальненим методом стиснення f_{bg} на основі двійкових (n,k)-біноміальних чисел (або узагальненим біноміальним стисненням) називається відображення*

$$f_{bg} : A \to Z ,$$

задане складною функцією вигляду

$$f_{bg} = \begin{cases} f_k \circ f_w, \ (k=0) \vee (k=n) \\ f_k \circ f_b \circ f_w, \ 0 < k < n , \end{cases} \tag{2.2.3}$$

де A – множина вихідних двійкових n-розрядних послідовностей A_j

$$A_j \in A = \{0,1\}^n , \ j = \overline{1,2^n} , \ A = \bigcup_{k=0}^{n} Y[n,k],$$

$$Y[n,k'] \cap Y[n,k''] = \varnothing , \ k' \ne k'' , \ 0 \le k', k'' \le n ;$$

Z *– множина результуючих послідовностей Z_j*

$$Z = Z_o \cup Z_b ,$$

$$Z_o = Q \times \varnothing = \left\{ Z_j \,/\, Z_j = \mathrm{Bin}\, k, (k=0) \vee (k=n) \right\},$$

$$Z_b = Q \times X[n,k] = \left\{ Z_j \,/\, Z_j = \left(\mathrm{Bin}\, k, X_j \right), 0 < k < n \right\},$$

$$Q = \left\{ \mathrm{Bin}\, k \,/\, 0 \le k \le n \right\};$$

f_k – *функція* $Z_j = f_k\left(Y_j\right)$, *яка ставить у відповідність рівноважній комбінації* $Y_j = A_j$ *двійковий запис* $\mathrm{Bin}\,k$ *числа* k *одиниць, де* $\left(k = 0\right) \vee \left(k = n\right)$, *і визначає відображення вигляду*

$$f_k : Y\left[n, k\right] \to Z_o,$$

або функція $Z_j = f_k\left(X_j\right)$, *яка ставить у відповідність двійковому* $\left(n, k\right)$*-біноміальному числу* $X_j \in X\left[n, k\right]$ *результуючу послідовність* $Z_j = \mathrm{Bin}\,k + +X_j$, *якщо* $0 < k < n$, *і визначає відображення вигляду*

$$f_k : X\left[n, k\right] \to Z_b;$$

f_b – *функція* $X_j = f_b\left(Y_j\right)$, *яка ставить у відповідність рівноважній комбінації* Y_j *двійкове* $\left(n, k\right)$*-біноміальне число* $X_j \in X\left[n, k\right]$ *і визначає біноміальне відображення вигляду*

$$f_b : Y\left[n, k\right] \to X\left[n, k\right];$$

f_w – *функція* $Y_j = f_w\left(A_j\right)$, *яка ставить у відповідність вихідній послідовності* A_j *упорядковану вибірку* $\left(k, Y_j\right)$, *де* $Y_j = A_j$, *і визначає відображення вигляду*

$$f_w : A \to M,$$

$$M = \left\{ \left(k, Y_j\right) / 0 < k < n, Y_j \in Y\left[n, k\right] \right\}.$$

На підставі визначення 2.2 і виразу (2.2.3) складну функцію, що реалізує відображення $f_{bg}: A \to Z$, можна записати як

$$Z_j = f_{bg}\left(A_j\right) = \begin{cases} f_k\left(f_w\left(A_j\right)\right), \ (k=0) \vee (k=n) \\ f_k\left(f_b\left(f_w\left(A_j\right)\right)\right), \ 0<k<n \ . \end{cases} \qquad (2.2.4)$$

Зі свого боку, зворотне відображення $f_{bg}^{-1}: Z \to A$, яке задається зворотною складною функцією

$$f_{bg}^{-1} = \begin{cases} f_w^{-1} \circ f_k^{-1}, \ (k=0) \vee (k=n) \\ f_w^{-1} \circ f_b^{-1} \circ f_k^{-1}, \ 0<k<n \ , \end{cases} \qquad (2.2.5)$$

являє собою відновлення з урахуванням наявного значення k вихідних двійкових послідовностей A_j. У разі $0<k<n$ відновлення A_j проводиться на основі $\mathrm{Bin}\,k$ і двійкових (n,k)-біноміальних чисел $X_j \in X[n,k]$, а в разі $k=0$ або $k=n$ – на основі $\mathrm{Bin}\,k$ за допомогою генерування n нулів або одиниць відповідно. Такий вид відновлення будемо називати узагальненим біноміальним. На підставі (2.2.5) складну функцію, що реалізує зворотне відображення $f_{bg}^{-1}: Z \to A$, можна виразити ще як

$$A_j = f_{bg}^{-1}\left(Z_j\right) = \\ = \begin{cases} f_w^{-1}\left(f_k^{-1}\left(Z_j\right)\right), \ (k=0) \vee (k=n) \\ f_w^{-1}\left(f_b^{-1}\left(f_k^{-1}\left(Z_j\right)\right)\right), \ 0<k<n \ . \end{cases} \qquad (2.2.6)$$

Способи реалізації f_b і f_b^{-1} для методів узагальнених стиснення f_{bg} (2.2.4) і відновлення f_{bg}^{-1} (2.2.6) на підобласті визначення $0<k<n$ є аналогічними побудові цих функцій (теореми 2.1 і 2.2) для методів стиснення і відновлення рівноважних комбінацій на основі двійкових біноміальних чисел.

Способи реалізації складних функцій (2.2.4) і (2.2.6) на підобласті визначення $(k=0)\vee(k=n)$ визначаються простою операцією обчислення k одиниць за умови стиснення f_{bg} і формуванням вихідної нульової або одиничної послідовності A_j за умови відновлення f_{bg}^{-1}.

З теорем 2.1 і 2.2, які обґрунтовують методи реалізації відповідності, сформульованої теоремою 2.4, а також із самої теореми 2.4 випливають моделі процесів узагальнених біноміальних стиснення f_{bg} і відновлення f_{bg}^{-1} двійкових послідовностей.

Моделювання процесу стиснення f_{bg} двійкових послідовностей $A_j=a_1a_2...a_i...a_n$, $A_j\in A=\{0,1\}^n$, $j=\overline{1,2^n}$ здійснюється на основі теорем 2.1 і 2.4, функції (2.1.1) і складається з таких етапів.

Етап 1. Визначається кількість s розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\,k$ числа k одиниць, $0\le k\le n$, вихідної n-розрядної послідовності $A_j=a_1a_2...a_i...a_n$

$$s=\left\lceil \log_2(n+1)\right\rceil.$$

Етап 2. Проводиться обчислення числа k одиниць у вихідній n-розрядній послідовності $A_j=a_1a_2...a_i...a_n$

$$k=\sum_{i=1}^{n}a_i\ ,$$

у такий спосіб реалізуючи функцію $f_w\left(A_j\right)=\left(k,Y_j\right)$ і визначаючи клас $Y\left[n,k\right]$ рівноважних комбінацій, до якого належить $Y_j \in Y\left[n,k\right]$, $Y_j = A_j$.

Етап 3. Виконується перетворення числа k одиниць до його двійкового вигляду $\mathrm{Bin}\,k$, що складається із s розрядів.

Етап 4. Якщо число k задовольняє системі рівностей $(k=0)\vee(k=n)$, тобто $k\in\{0,n\}$, то результуючою буде комбінація вигляду $Z_j=\mathrm{Bin}\,k$, $Z_j \in Z_o$. В іншому разі наявне значення n і обчислене значення k являють собою параметри двійкової (n,k)-біноміальної системи числення і здійснюється перехід до наступних етапів для реалізації кодування $f_k\left(f_b\left(Y_j\right)\right)=Z_j$, $Z_j \in Z_b$.

Етап 5. Визначається в n-розрядній рівноважній комбінації $Y_j = y_1y_2...y_i...y_n$, що має число k одиниць, значення останнього розряду y_n.

Етап 6. Якщо $y_n=0$, то

$$X_j = Y_j/00...0 = y_1y_2...y_i...y_{n-1}0/00...0 = x_1x_2...x_i...x_{r-1}1,$$

тобто від комбінації $Y_j = y_1y_2...y_i...y_{n-1}0$ відкидаються всі нульові розряди, починаючи з $y_n=0$, до появи першої одиниці $y_r=1$, котра буде являти собою значення останнього розряду $x_r=y_r=1$ (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1x_2...x_i...x_{r-1}1$. В іншому разі

$$X_j = Y_j/11...1 = y_1y_2...y_i...y_{n-1}1/11...1 = x_1x_2...x_i...x_{r-1}0,$$

тобто від комбінації $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1$ відкидаються всі одиничні розряди, починаючи з $y_n = 1$, до появи першого нуля $y_r = 0$, котрий буде являти собою значення останнього розряду $x_r = y_r = 0$ (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0$. Водночас в обох випадках значення інших розрядів залишаються без змін: $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, …, $x_{r-1} = y_{r-1}$.

Етап 7. Виконується конкатенація двійкових значення $\mathrm{Bin}\,k$ і (n,k)-біноміального числа X_j, тобто кодування $f_k\left(X_j\right) = Z_j$ для випадку $0 < k < n$

$$Z_j = \mathrm{Bin}\,k + + X_j,$$

у такий спосіб отримуючи результуючу комбінацію $Z_j \in Z_b$.

У моделі процесу стиснення f_{bg} за умови використання двійкового рахунку етапи 2 і 3 можна сполучити.

Моделювання процесу відновлення f_{bg}^{-1} послідовностей $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, $A_j \in A = \{0,1\}^n$, $j = \overline{1, 2^n}$, з комбінацій-образів $Z_j, Z_j \in Z_o \cup Z_b$, здійснюється на основі теорем 2.2 і 2.4, функції (2.1.3) і складається з таких етапів.

Етап 1. Визначається кількість s розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\,k$ числа k одиниць, $0 \le k \le n$, відновлюваної n-розрядної послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$

$$s = \left\lceil \log_2 (n+1) \right\rceil.$$

Етап 2. Здійснюється декатенація s розрядів, починаючи з першого розряду комбінації Z_j

$$\mathrm{Bin}\,k = Z_j / X_j \text{ або } \mathrm{Bin}\,k = Z_j,$$

у такий спосіб витягується $\mathrm{Bin}\,k = z_1 z_2 ... z_s$ зі стислого образу Z_j, що відповідає шуканій n-розрядній A_j. Остання рівність є випадком, коли тільки $\mathrm{Bin}\,k$ становить образ нульової або одиничної A_j. Отже, реалізується декодування $f_k^{-1}\left(Z_j\right)$.

Етап 3. Виконується перетворення двійкового значення $\mathrm{Bin}\,k$ до його десяткового еквівалента

$$k = \mathrm{dec}\left(\mathrm{Bin}\,k\right).$$

Етап 4. Якщо для k виконується $(k=0)\vee(k=n)$, то комбінація, що перетворюється, має вигляд $Z_j = \mathrm{Bin}\,k$ і тоді формується вихідна послідовність A_j вигляду

$$A_j = f_{bg}^{-1}\left(Z_j\right) = f_w^{-1}\left(f_k^{-1}\left(Z_j\right)\right) = f_w^{-1}\left(\mathrm{Bin}\,n\right) = 11...1$$

або

$$A_j = f_{bg}^{-1}\left(Z_j\right) = f_w^{-1}\left(f_k^{-1}\left(Z_j\right)\right) = f_w^{-1}\left(\mathrm{Bin}\,0\right) = 00...0\,.$$

В іншому разі комбінація має вигляд $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\,k, X_j\right)$, а значення n і k являють собою параметри двійкової (n,k)-біноміальної системи числення. Далі здійснюється перехід до наступних етапів для реалізації декодування вигляду

$$f_{bg}^{-1}\left(Z_j\right)=f_w^{-1}\left(\left(k,Y_j\right)\right)=$$
$$=f_w^{-1}\left(f_b^{-1}\left(X_j\right)\right)=f_w^{-1}\left(f_b^{-1}\left(f_k^{-1}\left(Z_j\right)\right)\right).$$

Етап 5. Здійснюється декатенація r розрядів, починаючи із $(s+1)$-го розряду комбінації Z_j

$$X_j=Z_j/\mathrm{Bin}\,k,$$

у такий спосіб витягується $X_j=z_{s+1}z_{s+2}\ldots z_{s+r}=x_1x_2\ldots x_i\ldots x_r$, $X_j\in X\left[n,k\right]$, $r<n$, зі стислого образу Z_j, що відповідає шуканій n-розрядній послідовності A_j.

Етап 6. Визначається у двійковому (n,k)-біноміальному r-розрядному числі $X_j=x_1x_2\ldots x_i\ldots x_r$ значення останнього розряду x_r.

Етап 7. Якщо $x_r=0$, то

$$Y_j=X_j++11\ldots1=x_1x_2\ldots x_i\ldots x_{r-1}0++11\ldots1=y_1y_2\ldots y_i\ldots y_{n-1}1,$$

тобто до (n,k)-біноміального числа $X_j=x_1x_2\ldots x_i\ldots x_{r-1}0$ приєднуються одиничні розряди $11\ldots1$: $y_{r+1}=y_{r+2}=\ldots=y_n=1$. В іншому разі

$$Y_j=X_j++00\ldots0=x_1x_2\ldots x_i\ldots x_{r-1}1++00\ldots0=y_1y_2\ldots y_i\ldots y_{n-1}0,$$

тобто до (n,k)-біноміального числа $X_j=x_1x_2\ldots x_i\ldots x_{r-1}1$ приєднуються нульові розряди $00\ldots0$: $y_{r+1}=y_{r+2}=\ldots=y_n=0$. В обох випадках загальна кількість розрядів отриманої двійкової рівноважної комбінації Y_j повинно становити n, $Y_j \in Y[n,k]$. Водночас значення інших розрядів залишаються без змін: $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, …, $y_r = x_r$. Унаслідок $f_w^{-1}((k, Y_j)) = A_j$ отримуємо шукану n-розрядну послідовність $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, де $A_j = Y_j$ і $a_1 = y_1$, $a_2 = y_2$, …, $a_n = y_n$.

Для реалізації етапу 7 процесу відновлення f_{bg}^{-1} рівноважних комбінацій $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$ на основі двійкових (n,k)-біноміальних чисел X_j можна також використовувати функцію $Y_j = f_b^{-1}(X_j)$ вигляду (2.1.6), яка вимагає обчислення $q < n$ або $l < n$. У цьому разі етапи 1–5 зберігають свій колишній зміст, а етапи 6 і 7 перетворяться до наступного вигляду.

Етап 6. Обчислюється у двійковому (n,k)-біноміальному числі $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ кількість $q = \sum_{i=1}^{r} x_i$ одиниць, $0 \le q \le k$.

Етап 7. Якщо $0 \le q < k$, то

$$Y_j = X_j + +11...1 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0 + +11...1 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1,$$

тобто до (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ приєднуються одиничні розряди 11...1 доти, поки їх не стане $q = k$. В іншому разі

$$Y_j = X_j + +00...0 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1 + +00...0 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0,$$

тобто до (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ приєднуються нульові розряди 00...0 доти, поки їх не стане $l = n - k$. В обох випадках маємо вихідну рівноважну комбінацію Y_j, $Y_j \in Y[n,k]$, значення інших розрядів якої $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, …, $y_r = x_r$. Унаслідок $f_w^{-1}((k, Y_j)) = A_j$ отримуємо шукану n-розрядну послідовність $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, де $A_j = Y_j$ і $a_1 = y_1$, $a_2 = y_2$, …, $a_n = y_n$.

Під час виконання операцій порівняння над двійковими числами етапи 3 і 4 у моделі відновлення f_{bg}^{-1} можна сполучити.

З метою зменшення часу відновлення A_j операцію обчислення на етапі 1 можна замінити операцією пошуку значень s у таблицях із довільним доступом, у яких залежно від k утримуються шукані значення чисел розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\,k$.

Деякі результати відображень $f_{bg} : A \to Z$, $f_{bg}^{-1} : Z \to A$ для $n = 24$, де $A_j \in A = \{0,1\}^{24}$, $j = \overline{1, 2^{24}}$, наведені в таблиці 2.2. Якщо $0 < k < 23$, то застосовується складна функція кодування $f_k \circ f_b \circ f_w$, в іншому разі, тобто за умови $(k = 0) \vee (k = 24)$ – складна функція кодування $f_k \circ f_w$. Відношення довжин двійкового подання A_j і Z_j для цієї таблиці змінюється в межах від 0,86 до 4,8, а їхнє середнє значення для всієї розглянутої таблиці становить приблизно 2,15.

Таблиця 2.2 – Відповідність між деякими двійковими A_j і Z_j за умови $n = 24$

Двійкова послідовність A_j	**Двійкова комбінація** Z_j	
	$\mathrm{Bin}\,k$	X_j **або порожній рядок** ε
000000000000000000000000	00000	
000000000000000000001001	00010	00000000000000000000100
000000001000011000000000	00011	000000001000011
001100001110011100100000	01001	0011000011100111001
011100010000000000000000	00100	01110001
011111011001010000101100	01100	0111110110010100001011
100000000000000000000000	00001	1
111000010001110111111111	10000	111000010001110
111111111111111111111110	10111	11111111111111111111111
111111111111111111111111	11000	

Як приклад розглянемо узагальнене біноміальне стиснення двійкової 24-розрядної послідовності вигляду

$$A_j = 100010011000111100000000,$$

використовуючи вищенаведену модель процесу стиснення f_{bg} на основі теорем 2.1 і 2.4, функції (2.1.1).

Етап 1. Визначається кількість s розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\,k$ числа k одиниць, $0 \le k \le 24$, вихідної 24-розрядної послідовності A_j

$$s = \lceil \log_2 25 \rceil = 5.$$

Етап 2. Проводимо обчислення числа k двійкових одиниць у вихідній 24-розрядній послідовності $A_j = 100010011000111100000000$

$$k = \sum_{i=1}^{24} a_i = 8.$$

у такий спосіб реалізуючи функцію $f_w\left(A_j\right) = \left(k, Y_j\right)$ і визначаючи клас рівноважних комбінацій $Y\left[24,8\right]$, до якого ставиться A_j, $A_j = Y_j \in Y\left[24,8\right]$.

Етап 3. Виконується перетворення числа $k = 8$ одиниць до його двійкового вигляду $\mathrm{Bin}\,8 = 01000$, що складається із $s = 5$ розрядів.

Етап 4. Оскільки число $k = 8$ двійкових одиниць не задовольняє системі рівностей $\left(k = 0\right) \vee \left(k = 24\right)$, то наявне значення $n = 24$ та обчислене значення $k = 8$ являють собою параметри двійкової $\left(24,8\right)$-біноміальної системи числення і здійснюється перехід до наступних етапів для реалізації кодування $f_k\left(f_b\left(Y_j\right)\right) = Z_j$, $Z_j \in Z_b$.

Етап 5. Визначається в 24-розрядній рівноважній комбінації $Y_j = 100010011000111100000000$, що має число $k = 8$ одиниць, значення останнього розряду $y_{24} = 0$.

Етап 6. Оскільки $y_{24} = 0$, то

$$X_j = Y_j / 00000000 = 1000100110001111,$$

тобто від комбінації $Y_j = 100010011000111100000000$ відкидаються всі нульові розряди, починаючи з $y_{24} = 0$, до появи першої одиниці $y_{16} = 1$, яка буде являти собою значення останнього розряду $x_{16} = y_{16} = 1$ $(24,8)$-біноміального числа $X_j = 1000100110001111$. Водночас значення інших розрядів залишаються без змін: $x_1 = y_1 = 1$, $x_2 = y_2 = 0$, …, $x_{15} = y_{15} = 1$.

Етап 7. Виконується конкатенація двійкових $\mathrm{Bin}\,8 = 01000$ і $(24,8)$-біноміального числа $X_j = 1000100110001111$, тобто кодування вигляду $f_k\left(X_j\right) = Z_j$ для випадку $0 \le k \le 24$

$$Z_j = 01000 + +1000100110001111 =$$
$$= 010001000100110001111,$$

у такий спосіб отримуючи результуючу комбінацію Z_j.

Тепер розглянемо приклад узагальненого біноміального відновлення з комбінації-образу

$$Z_j = 10000111000010001110,$$

двійкової 24-розрядної послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_{24}$ (значення $n = 24$ попереднє відомо), використовуючи вищенаведену модель процесу відновлення f_{bg}^{-1} на основі теорем 2.2 і 2.4, функції (2.1.3).

Етап 1. Визначається кількість s розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\,k$ числа k одиниць, $0 \le k \le 24$, відновлюваної 24-розрядної послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_{24}$

$$s = \lceil \log_2 25 \rceil = 5.$$

Етап 2. Здійснюється декатенація $s = 5$ розрядів, починаючи з першого розряду комбінації Z_j, у такий спосіб витягується

$$\mathrm{Bin}\,k = 10000\,,$$

зі стислого образу Z_j, що відповідає шуканій 24-розрядній послідовності A_j. Отже, реалізується $f_k^{-1}\left(Z_j\right) = \mathrm{Bin}\,k$.

Етап 3. Виконується перетворення двійкового значення $\mathrm{Bin}\,k = 10000$ до його десяткового еквівалента

$$k = \mathrm{dec}\left(10000\right) = 16\,.$$

Етап 4. Оскільки для значення k не виконується $\left(k = 0\right) \vee \left(k = 24\right)$, то комбінація має вигляд $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\left(16\right), X_j\right)$, а значення $n = 24$ і $k = 16$ являють собою параметри двійкової $\left(24{,}16\right)$-біноміальної системи числення. Далі здійснюється перехід до наступних етапів для реалізації декодування вигляду

$$f_{bg}^{-1}\left(Z_j\right) = f_w^{-1}\left(\left(k, Y_j\right)\right) = f_w^{-1}\left(f_b^{-1}\left(X_j\right)\right),$$

тобто декатенації запису $\mathrm{Bin}\left(16\right) = 10000$ і $\left(24{,}16\right)$-біноміального числа X_j із наявної комбінації $Z_j = 100001110000010001110$, формування рівноважної комбінації Y_j, що має $k = 16$ двійкових одиниць, і на її основі вихідної послідовності A_j.

Етап 5. Здійснюється декатенація $r = 15$ розрядів, починаючи з 6-го розряду комбінації $Z_j = 100001110000010001110$

$$X_j = Z_j / 10000 = 1110000010001110\,,$$

у такий спосіб витягується $X_j = 111000010001110$, $X_j \in X[24,16]$, $r = 15 < n = 24$, зі стислого образу Z_j, що відповідає шуканій 24-розрядній A_j.

Етап 6. Визначається у двійковому $(24,16)$-біноміальному 15-розрядному числі $X_j = 111000010001110$ значення останнього розряду $x_{15} = 0$.

Етап 7. Оскільки $x_{15} = 0$, то

$$Y_j = X_j + +111111111 = 111000010001110 + +111111111 = \\ = 111000010001110111111111,$$

тобто до біноміального числа $X_j = 111000010001110$ приєднуються одиничні розряди 111111111: $y_{16} = y_{17} = \ldots = y_{24} = 1$. Загальна кількість розрядів одержуваної двійкової рівноважної комбінації Y_j повинна становити $n = 24$, $Y_j \in Y[24,16]$. Водночас значення інших розрядів Y_j залишаються без змін: $x_1 = y_1 = 1$, $x_2 = y_2 = 1$, …, $x_{15} = y_{15} = 0$. Унаслідок виконання $f_w^{-1}((16, Y_j)) = A_j$ одержуємо шукану 24-розрядну послідовність

$$A_j = 111000010001110111111111,$$

де $A_j = Y_j$ і $a_1 = y_1 = 1$, $a_2 = y_2 = 1$, …, $a_{24} = y_{24} = 1$.

2.3 Метод оцінювання меж застосування стиснення на основі двійкових біноміальних чисел

Область застосування будь-якого методу стиснення інформації визначено насамперед тим, що довжина результуючого стислого образу повинна бути менше, ніж довжина вихідної інформаційної послідовності [5–7]. З метою підвищення ефективності застосування біноміального стиснення f_b необхідно розв'язати такі задачі [24]:

1) визначення області застосування f_b для випадку, коли k є величина постійна, а вихідний масив, який стискається, являє собою масив двійкових n-розрядних кодів-комбінацій Y_j, що задовольняють обмеженню $R_Y = k,$ тобто масив рівноважних комбінацій $Y_j \in Y\left[n,k\right]$;

2) визначення області застосування f_b для випадку, коли k може набувати будь-які значення із заданого діапазону $0 \le k \le n,$ а вихідний масив, який стискається, являє собою масив двійкових n-розрядних кодів-комбінацій Y_j із різними значеннями обмежень $R_Y = k$.

Розв'язок першої задачі ґрунтується на теоремі 1.1 і властивості (1.1.7) (підрозділ 1.1), з яких випливає, що довжина r двійкових $\left(n,k\right)$-біноміальних чисел задовольняє нерівності $\min\left(k,n-k\right) \le r \le n-1$. Водночас, очевидно, що для повної множини $Y\left[n,k\right],$ $\mathrm{Card}\left(Y\left[n,k\right]\right) = C_n^k,$ середня довжина L_{cp} двійкових $\left(n,k\right)$-біноміальних чисел, яка визначається згідно з теоремою 1.3 і співвідношенню (1.2.3), буде менше ніж n. Отже, стиснення n-розрядних двійкових комбінацій $Y_j \in Y\left[n,k\right]$ на основі $\left(n,k\right)$-біноміальних чисел застосоване для будь-якого фіксованого значення k.

Графік середньої довжини $L_{cp} = f\left(k\right)$ за умови $n = 32$ і $0 \le k \le 32$, відповідно до таблиці 2.3, подано на рисунку 2.1. Вигляд графічної залежності та її значення за умови $0 \le k \le 32$ демонструють, що середня довжина L_{cp}

стиснених образів – двійкових $(32,k)$-біноміальних чисел – менше за вихідну довжину $n=32$ двійкових комбінацій $Y_j \in Y[32,k]$, які стискаються.

Таблиця 2.3 – Значення середньої довжини $L_{cp} = f(k)$ за умови $n=32$ і $0 \le k \le 32$

k	0	2	4	6	8	10	12	14	16
L_{cp}	0	21,94	26,26	28,06	29,01	29,57	29,89	30,06	30,12
k	18	20	22	24	26	28	30	32	–
L_{cp}	30,06	29,89	29,57	29,01	28,06	26,26	21,94	0	–

Розв’язок другої задачі – визначення області стиснення f_b для випадку, коли $0 \le k \le n$ пов’язаний із рішенням щодо значень n і k нерівності вигляду

$$s + r < n, \tag{2.3.1}$$

де s – кількість розрядів, необхідних для зберігання числа k одиниць послідовності Y_j, яка стискається.

Сума в лівій частині нерівності (2.3.1) являє собою довжину $l_j = s + r$ результуючої стислої послідовності після f_{bg} для випадку, коли k є змінна з діапазону $0 \le k \le n.$ Оскільки кількість різних значень k дорівнює $n+1$, то число двійкових розрядів s для подання k, зберігання якого необхідно для однозначного відновлення Y_j зі стислого образу X_j, становить $s = \lceil \log_2(n+1) \rceil$. Тоді загальний вигляд для довжини l_j стислої послідовності

$$l_j = \lceil \log_2(n+1) \rceil + r, \tag{2.3.2}$$

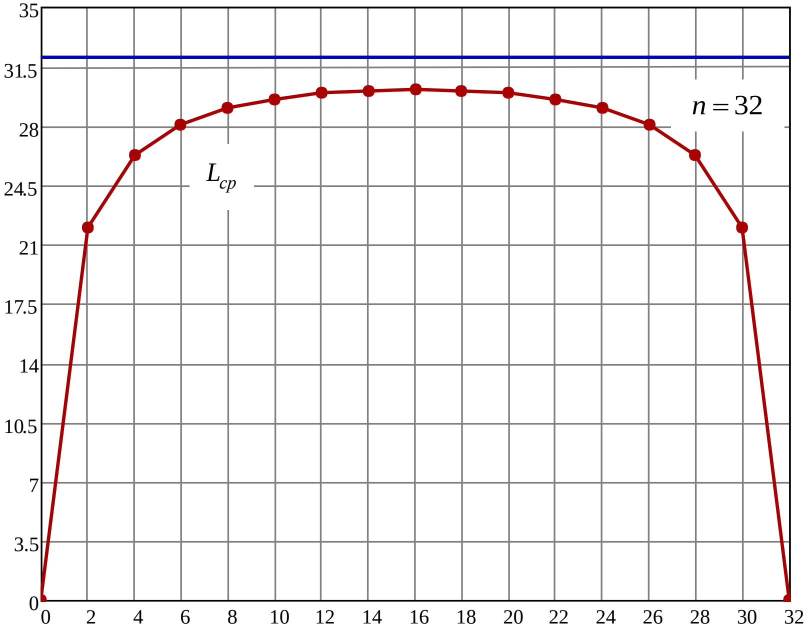

Рисунок 2.1 – Графік середньої довжини $L_{cp} = f(k)$ за умови $n = 32$ і $0 \le k \le 32$

а нерівність (2.3.2) для визначення області стиснення f_{bg} перетворюється як

$$\lceil \log_2(n+1) \rceil + r < n .$$

Теорема 2.5. За відображення f_{bg} максимальне значення для l_j

$$L_{\max} = \max_{0 \le k \le n} l_j = n + \lceil \log_2(n+1) \rceil - 1, \qquad (2.3.3)$$

а мінімальне

$$L_{\min} = \min_{0 \le k \le n} l_j = \min(k, n-k) + \lceil \log_2(n+1) \rceil. \quad (2.3.4)$$

Доведення. Максимум $L_{\max}$ і мінімум $L_{\min}$ довжини l_j (2.3.2) визначаються максимальним $r_{\max}$ і мінімальним $r_{\min}$ кількостями розрядів двійкового (n,k)-біноміального числа. Згідно з теоремою 1.1 і властивістю (1.1.7) (підрозділ 1.1), відповідно, маємо $r_{\max} = n-1$, а $r_{\min} = \min(k, n-k)$. Звідси випливають рівності (2.3.3) і (2.3.4). **Теорему доведено.**

Теорема 2.6. Для будь-яких цілих $n \ge 2$ виконується нерівність

$$L_{\max} = n + \lceil \log_2(n+1) \rceil - 1 > n, \quad (2.3.5)$$

а для будь-яких цілих $n \ge 10$ і $0 \le k \le n$ наявне

$$L_{\min} = \min(k, n-k) + \lceil \log_2(n+1) \rceil < n. \quad (2.3.6)$$

Доведення. Доведемо спочатку справедливість $L_{\max} > n$ за умови $n \ge 2$. Перейдемо від (2.3.5) до нерівності

$$n + \log_2(n+1) - 1 > n, \quad (2.3.7)$$

доказ якого однозначно буде визначати істинність (2.3.5), оскільки $\lceil \log_2(n+1) \rceil \ge \log_2(n+1)$. Після перетворень у лівій і правій частинах нерівності (2.3.7), використовуючи властивість логарифмів [26, 27], одержуємо

$$\log_2(n+1) > 1 \text{ або } \log_2(n+1) > \log_2 2.$$

На підставі того, що логарифмічна функція є функцією, що точно монотонно зростає [26; 27], можемо зробити висновок, що $n+1>2$ або $n\geq 2$. Отже, істинність нерівності (2.3.5) за умови $n\geq 2$ доведено.

Тепер наведемо обґрунтування $L_{\min}<n$ за умови будь-яких цілих $n\geq 10$ і $0\leq k\leq n$. Нехай n – парне число й $k=n/2$, що визначає доказ $L_{\min}<n$ для найгіршого випадку, означаючи в такий спосіб, що за умови n – непарне й $k\neq n/2$ нерівність (2.3.6) тим паче буде виконуватися. Отже,

$$\frac{n}{2}+\left\lceil \log_2(n+1)\right\rceil < n.$$

Скористаємося рівністю $\left\lceil \log_2(n+1)\right\rceil = \left\lfloor \log_2(n+1)\right\rfloor + 1$ і перейдемо до нерівності такого вигляду

$$\frac{n}{2}+\log_2(n+1)+1<n,$$

обґрунтування якої однозначно буде визначати і посилювати істинність (2.3.6), оскільки $\left\lfloor \log_2(n+1)\right\rfloor \leq \log_2(n+1)$.

У вищенаведеній нерівності перенесемо одиницю і доданок $n/2$ з лівої частини в праву для зручності потенціювання

$$\log_2(n+1)<\frac{n}{2}-1.$$

Далі, потенціюючи обидві частини цієї нерівності за ступенем 2, отримуємо

$$n+1<2^{(n-2)/2} \text{ або } 2n+2<2^{n/2}.$$

Відомо [16; 17; 25], що числа сполучень $C_{n/2}^{0} = C_{n/2}^{n/2} = 1$ і $C_{n/2}^{1} = C_{n/2}^{(n-2)/2} = n/2$. Праву частину нерівності подамо в такому вигляді:

$$2^{n/2} = \sum_{k=0}^{n/2} C_{n/2}^{k} = C_{n/2}^{0} + C_{n/2}^{1} + C_{n/2}^{(n-2)/2} + C_{n/2}^{n/2} + \sum_{k=2}^{(n-4)/2} C_{n/2}^{k} =$$
$$= (n+2) + \sum_{k=2}^{(n-4)/2} C_{n/2}^{k}.$$

Звідси випливає, що

$$2n + 2 < (n+2) + \sum_{k=2}^{(n-4)/2} C_{n/2}^{k} \text{ або } n < \sum_{k=2}^{(n-4)/2} C_{n/2}^{k}.$$

Ліва частина нерівності n є $n = n/2 + n/2 = C_{n/2}^{1} + C_{n/2}^{1}$. Звідси

$$C_{n/2}^{1} + C_{n/2}^{1} < \sum_{k=2}^{(n-4)/2} C_{n/2}^{k}.$$

Але в правій частині нерівності будь-який із біноміальних коефіцієнтів $C_{n/2}^{k}$ за умови $k = 2, 3, ..., (n-4)/2$ є більшим за значенням, ніж $C_{n/2}^{1}$, оскільки $k > 1$. Водночас кількість коефіцієнтів $C_{n/2}^{k}$ повинна бути не менше ніж два і, відповідно, повинна виконуватися умова $((n-4)/2) > 2$, тобто $n \geq 10$. З огляду на те, що доказ проводився для найгіршого випадку, коли n – парне число і $k = n/2$, то нерівність (2.3.6) буде істинною і для непарного n, $k \leq \lfloor n/2 \rfloor$

або $k \geq \lceil n/2 \rceil$. Отже, нерівність (2.3.6) виконується для будь-яких цілих $n \geq 10$ і $0 \leq k \leq n$. **Теорему доведено.**

З погляду практики застосування стиснення на основі двійкових (n,k)-біноміальних чисел X_j для випадку вихідних послідовностей $A_j \in A = \{0,1\}^n$, $j = \overline{1,2^n}$ теорема 2.6 дозволяє зробити висновки:

1) умови для стиснення двійкових n-розрядних A_j з'являються, якщо $n \geq 10$;

2) існує область значень r, для яких з урахуванням (2.3.2) виконується нерівність вигляду

$$l_j = \lceil \log_2(n+1) \rceil + r < n. \tag{2.3.8}$$

Очевидно, необхідність використання $\mathrm{Bin}\,k$ для однозначного відновлення стислих комбінацій на основі двійкових (n,k)-біноміальних чисел, коли значення k може змінюватися в межах $0 \leq k \leq n$, буде призводити до зниження ступеня стиснення. Мінімізувати негативний ефект від застосування $\mathrm{Bin}\,k$, пов'язаний із збільшенням кількості розрядів стислої комбінації, можливо, завдяки використанню процедури перемикання між кодуванням f_b і векторним кодуванням f_v, тобто тотожним перетворенням вихідної послідовності в саму себе, що дозволить збільшити швидкість стиснення і відновлення даних. Як основу для вибору між f_b і f_v можна запропонувати нерівність вигляду (2.3.8), але тоді разом із $\mathrm{Bin}\,k$ для однозначного декодування виникає необхідність застосовувати двійкові значення $\mathrm{Bin}\,q$ або $\mathrm{Bin}\,l$, оскільки довжина r є функцією q або l (властивості (1.1.8), (1.1.9), підрозділ 1.1). Як наслідок, це ще більшою мірою знизить ступінь стиснення. Тому значення r у нерівності (2.3.8) пропонується замінити значенням L_{cp} середньої довжини двійкових (n,k)-біноміальних чисел

$$L\left(f_{bg}\right)=\left\lceil \log_2(n+1)\right\rceil + L_{cp} < n, \qquad (2.3.9)$$

яке є функцією відомого n і обчисленого k і дає можливість обмежитися для відновлення початкової послідовності із стислого образу службовим словом $\mathrm{Bin}\,k$.

За умови відображення f_{bg} максимальне значення для $L\left(f_{bg}\right)$ на підставі теореми 1.4 (підрозділ 1.2) становить

$$L_{\max}\left(f_{bg}\right)=\max_{0\le k\le n} L\left(f_{bg}\right)=$$

$$=\max_{1\le k\le n-1} L\left(f_b\right)=\left\lceil \log_2(n+1)\right\rceil+\frac{n^2}{n+2}$$

за умови n парного значення або

$$L_{\max}\left(f_{bg}\right)=\max_{0\le k\le n} L\left(f_{bg}\right)=\max_{1\le k\le n-1} L\left(f_b\right)=$$

$$=\left\lceil \log_2(n+1)\right\rceil+\frac{(n-1)(n+2)}{n+3}$$

за умови n непарного значення. Мінімальне значення для $L\left(f_{bg}\right)$ має вигляд

$$L_{\min}\left(f_{bg}\right)=\min_{0\le k\le n} L\left(f_{bg}\right)=\left\lceil \log_2(n+1)\right\rceil.$$

Теорема 2.7. Для будь-яких цілих $n\ge 2$ виконується нерівність

$$L_{\max}\left(f_{bg}\right)=\left\lceil \log_2(n+1)\right\rceil+\frac{n^2}{n+2}>n, \qquad (2.3.10)$$

якщо n – парне число, або

$$L_{\max}\left(f_{bg}\right)=\left\lceil \log_2\left(n+1\right)\right\rceil+\frac{\left(n-1\right)\left(n+2\right)}{n+3}>n \text{ ,} \quad (2.3.11)$$

якщо n – непарне число, а для будь-яких цілих $n\geq 4$ наявне

$$L_{\min}\left(f_{bg}\right)=\left\lceil \log_2\left(n+1\right)\right\rceil<n. \quad (2.3.12)$$

Доведення. Доведемо справедливість $L_{\max}\left(f_{bg}\right)>n$ за умови парного $n\geq 2$. Перейдемо від (2.3.10) до нерівності

$$\log_2\left(n+1\right)+\frac{n^2}{n+2}>n, \quad (2.3.13)$$

доказ якого однозначно буде визначати істинність (2.3.10), оскільки $\left\lceil \log_2\left(n+1\right)\right\rceil\geq \log_2\left(n+1\right)$. Після перетворень у лівій і правій частинах нерівності (2.3.13) одержуємо

$$\frac{\left(n+2\right)\log_2\left(n+1\right)+n^2}{n+2}>n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(n+2\right)\log_2\left(n+1\right)+n^2>n\left(n+2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(n+2\right)\log_2\left(n+1\right)+n^2}{n+2}>n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(n+2\right)\log_2\left(n+1\right)+n^2>n\left(n+2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(n+2\right)\log_2\left(n+1\right)+n^2>n^2+2n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(n+2\right)\log_2\left(n+1\right)>2n.$$

Використовуючи властивості логарифмів [26; 27], останню нерівність можна уявити так:

$$\log_2 (n+1)^{(n+2)} > \log_2 4^n .$$

На підставі того, що логарифмічна функція є функцією, що точно монотонно зростає [26; 27] можемо зробити висновок, що виконання попередньої нерівності обумовлено виконанням нерівності вигляду

$$(n+1)^{(n+2)} > 4^n . \qquad (2.3.14)$$

Загалом функція n^n зростає значно швидше, ніж функція a^n, де a – постійна [17]. Як свідчить вигляд (2.3.14), уже для парних $n \geq 2$ указана нерівність стає справедливою.

Доведемо справедливість $L_{\max}\left(f_{bg}\right) > n$ за умови непарного значення $n > 1$. Провівши такі перетворення, як у попередньому випадку, використовуючи (2.3.11), отримуємо внаслідок цього нерівність

$$(n+1)^{(n+3)} > 4^{n+1}, \qquad (2.3.15)$$

умови виконання якої визначають умови справедливості (2.3.11). На підставі тих же самих міркувань, що функція n^n зростає значно швидше, ніж функція a^n, де a – постійна [17], і вигляду (2.3.15) можна зробити висновок, що вже для непарних $n \geq 3$ вказана нерівність стає справедливою.

Отже, можна зробити висновок, що $L_{\max}\left(f_{bg}\right) > n$ виконується для будь-яких $n \geq 2$.

Тепер наведемо обґрунтування $L_{\min}\left(f_{bg}\right)<n$ за умови $n \geq 4$. Скористаємося нерівністю $\left\lceil \log_2\left(n+1\right)\right\rceil <$ $< \log_2\left(n+1\right)+1$ і перейдемо від (2.3.12) до нерівності

$$\log_2\left(n+1\right)+1<n,$$

доказування якої однозначно визначає і підсилює істинність (2.3.12).

У наведеній вище нерівності перенесемо одиницю з лівої частини в праву для зручності потенціювання. Далі, потенціюючи обидві частини цієї нерівності за основою 2, отримуємо

$$n+1<2^{n-1} \text{ або } 2n+2<2^n .$$

Відомо [17; 25], що числа сполучень $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ і $C_n^0 = C_n^n = 1$. Праву частину нерівності подамо в такому вигляді:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^{n-1} + C_n^n + \sum_{k=2}^{n-2} C_n^k =$$

$$= \left(2n+2\right) + \sum_{k=2}^{n-2} C_n^k .$$

Повертаючись до попередньої нерівності, маємо

$$2n+2 < \left(2n+2\right) + \sum_{k=2}^{n-2} C_n^k .$$

Очевидно, що ліва частина нерівності точно менша за праву за умови будь-яких цілих $n \geq 4$. Звідси нерівність (2.3.12) також справедлива. **Теорему доведено.**

З теореми 2.7 можна зробити висновок, що за умови $n \geq 4$ функція $L\left(f_{bg}\right)$ (2.3.9) має точки перетину з лінією $f(k) = n$, паралельною осі абсцис. Зважаючи, що функція L_{cp} є симетричною щодо лінії $k = n/2$ (припустимо, що n – непарне, значення $k = n/2$ є числом раціональним), паралельній осі ординат, можна зробити висновок, що таких точок перетину буде дві – α_b і β_b, де $\beta_b = n - \alpha_b$. Водночас

$$\alpha_b - 1 = \max_{k \in L_b} k,$$

$$\beta_b + 1 = \min_{k \in H_b} k,$$

являють собою межі множин – нижньої $L_b = \{1, 2, ..., \alpha_b - 1\}$ і верхньої $H_b = \{\beta_b + 1, \beta_b + 2, ..., n - 1\}$ областей значень k двійкових одиниць, для яких використання методу стиснення f_{bg} на основі двійкових (n, k)-біноміальних чисел є доцільним. І, навпаки, існує множина $M_v = \{\alpha_b, \alpha_b + 1, ..., \beta_b\}$ – область значень k двійкових одиниць, що розташована на числовій осі між L_b і H_b, для якої метод f_{bg}, що розглядається, дає збільшення середньої довжини $L\left(f_{bg}\right)$ результуючої комбінації. За умови $(k = 0) \vee (k = n)$ розглядається тільки двійкове $\mathrm{Bin}\, k$.

Графіки функцій $L\left(f_{bg}\right) = \varphi(k)$ і $\varphi(k) = n$ за умови $n = 64$ і $0 \leq k \leq 64$ подані на рисунку 2.3. Їхній перетин існує для значень $\alpha_b = 7$ і $\beta_b = 57$ чисел одиниць (за умови округлення до найближчого цілого), які розташовуються симетрично щодо вертикальної лінії $k = n/2 = 32$. Очевидно, що діапазони $0 < k < 7$ і $57 < k < 64$ значень k одиниць за заданого $n = 64$ становлять, відповідно, області L_b і H_b застосування стиснення f_b на основі двійкових біноміальних чисел, коли $L\left(f_{bg}\right) < 64$.

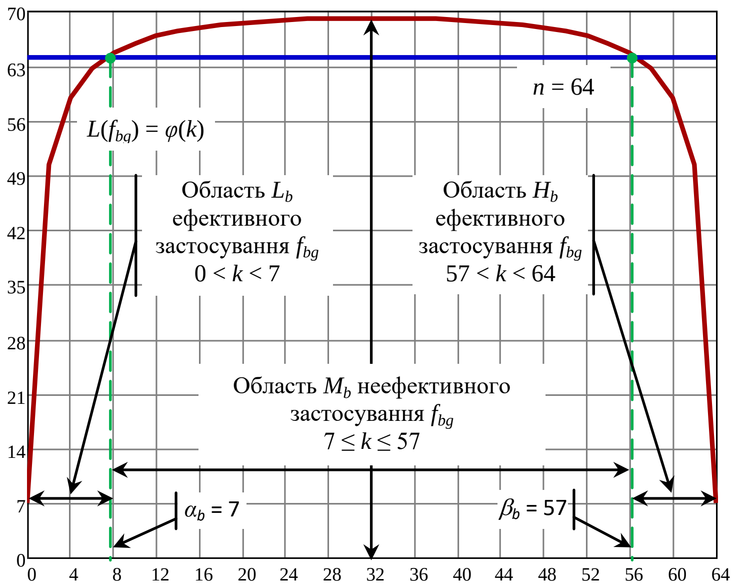

Рисунок 2.3 – Графіки $L\left(f_{bg}\right) = \varphi(k)$ і $\varphi(k) = 64$, області L_b і H_b ефективного і M_b неефективного використання f_{bg} за умови заданого $n = 64$

Розв'язання рівняння

$$\left\lceil \log_2(n+1) \right\rceil + \frac{k(n-k)(k+2)}{(k+1)(n-k+1)} = n, \qquad (2.3.16)$$

яке випливає із (2.3.9), щодо $k = \alpha_b$ і $k = \beta_b$, де $\beta_b = n - \alpha_b$, для пошуку областей L_b і H_b дозволить ефективно використовувати стиснення f_{bg} на основі двійкових біноміальних чисел.

За допомогою групування доданків, які мають однакові ступені k^2 і k, від рівності (2.3.16) перейдемо до повного квадратного рівняння вигляду

$$(\lambda+2)k^2 - n(\lambda+2)k + (n-\lambda)(n+1) = 0, \qquad (2.3.17)$$

де $\lambda = \lceil \log_2(n+1) \rceil$. Знаходження коренів α_b, β_b рівняння (2.3.17) проводиться відповідно до формули [27; 28]

$$\alpha_b, \beta_b = \left| \frac{-n(\lambda+2) \pm \sqrt{D}}{2(\lambda+2)} \right|,$$

де $D = n^2(\lambda+2)^2 - 4(\lambda+2)(n-\lambda)(n+1)$ – дискримінант рівняння (2.3.17).

Деякі значення α_b і β_b, отримані внаслідок програмного моделювання в системі комп'ютерної алгебри Mathcad для різних n, подано в додатку А.

2.4 Моделі адаптивного стиснення і відновлення на основі двійкових біноміальних чисел

Наявність області M_b (рис. 2.3) неефективного використання методу стиснення f_{bg} на основі двійкових біноміальних чисел означає, що для значень $\alpha_b \le k \le \beta_b$

відношення довжини n вихідної послідовності A_j до середньої довжини $L\left(f_{bg}\right)$ результуючих $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\,k, X_j\right)$

$$\frac{n}{\left\lceil \log_2\left(n+1\right)\right\rceil + L_{cp}} < 1.$$

Незважаючи на це, у множині випадків для всього обсягу повідомлень, що генерує інформаційне джерело A, це співвідношення може бути більше ніж одиниця, що залежить від значень імовірнісних (статистичних) показників самого джерела A даних.

З метою збільшення швидкодії методів стиснення і відновлення на основі двійкових біноміальних чисел пропонується (за умови їхньої практичної реалізації) ввести в моделі процесів стиснення і відновлення процедуру вибору методів кодування f_b або f_v для вихідної двійкової n-розрядної послідовності $A_j \in A = \{0,1\}^n$, яка містить $0 \le k \le n$ одиниць.

Під час стиснення A_j необхідно застосовувати функцію f_w, яка ставить у відповідність вихідній послідовності A_j вибірку $\left(k, Y_j\right)$, де $Y_j = A_j$ ((2.1.7), підрозділ 2.1). Далі, якщо отримане значення k одиниць задовольняє системі нерівностей виду

$$\begin{cases} 0 < k < \alpha_b \\ \beta_b < k < n\,, \end{cases} \tag{2.4.1}$$

то для кодування послідовності $A_j = Y_j \in Y\left[n,k\right]$ використовують кодування f_b на основі двійкових біноміальних чисел. Якщо для значення k виконується нерівність вигляду $\alpha_b \le k \le \beta_b$, то реалізується метод векторного кодування f_v. Водночас в обох випадках до комбінацій, які кодуються, для однозначного відновлення стислої послідовності додається двійкове число k одиниць – $\mathrm{Bin}\,k$, тобто виконується додаткове кодування f_k. Якщо ж значення k одиниць задовольняє системі рівностей $(k=0)\vee(k=n)$, то результуюча комбінація складається тільки з $\mathrm{Bin}\,k$, тобто застосовують лише метод f_k.

Отже, розглянемо відображення вигляду

$$f_{bv} : A \to Z ,$$

яке задається відповідною функцією

$$Z_j = f_{bv}\left(A_j\right),$$

де $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, $A_j \in A = \{0,1\}^n$, а $Z_j \in Z$ може набувати вигляду $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\,k, X_j\right)$, $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\,k, Y_j\right)$ або $Z_j = \mathrm{Bin}\,k$, $j = \overline{1, 2^n}$. Нижченаведена теорема 2.8 наводить властивості відображення f_{bv} і спосіб його реалізації.

Теорема 2.8. Будь-якій двійковій n-розрядній послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n \in A$ можна поставити у взаємну однозначну відповідність за допомогою відображень f_{bv} і f_{bv}^{-1} двійкову комбінацію $Z_j \in Z$ такого вигляду:

1) якщо $(0 < k < \alpha_b) \vee (\beta_b < k < n)$, то

$$Z_j = \mathrm{Bin}\,k + + X_j , \qquad (2.4.2)$$

де $k = \sum_{i=1}^{n} a_i$ і $X_j \in X[n,k]$;

2) якщо $\alpha_b \le k \le \beta_b$, то

$$Z_j = \mathrm{Bin}\,k + + Y_j, \qquad (2.4.3)$$

де $Y_j \in Y[n,k]$, $Y_j = A_j$;

3) в іншому разі, якщо $(k=0)\vee(k=n)$, то

$$Z_j = \mathrm{Bin}\,k. \qquad (2.4.4)$$

Доведення. Перш ніж почати доведення зазначимо, що рівноважна комбінація Y_j є результатом дії функції f_w, яка відображає відповідність $A_j \xrightarrow[f_w]{} (k, Y_j)$, $Y_j = A_j$.

Наведемо доказування від протилежного. Спочатку розглянемо пряме відображення $f_{bv} : A \to Z$. Припустимо, що для A_j існують дві двійкові комбінації Z'_j і Z''_j, $Z'_j \ne Z''_j$.

Для випадку (2.4.2), коли $Z_j = \mathrm{Bin}\,k + + X_j$, відображення f_{bv} являє собою звуження f_b на множині $A' = Y[n,k']$, $A' \subset A$, елементи $Y_j = A_j$ якого задовольняють умовам (2.4.1). Звідси f_{bv} зберігає властивості відображення f_b і, відповідно, підпадає під дію теореми 2.1. Отже, у комбінаціях (2.4.2)

$$Z'_j = \mathrm{Bin}\,k' + + X'_j \text{ і } Z''_j = \mathrm{Bin}\,k'' + + X''_j$$

не можуть бути різними X'_j і X''_j, тобто $X'_j = X''_j$. На підставі нашого припущення має бути $\mathrm{Bin}\,k' \ne \mathrm{Bin}\,k''$, але A_j не може мати два різних значення числа k одиниць, тобто $\mathrm{Bin}\,k' = \mathrm{Bin}\,k''$. Унаслідок цього $Z'_j = Z''_j = Z_j$ і наше припущення для випадку (2.4.2) є неправильним.

Для випадку (2.4.3) рівність $Z'_j = Z''_j = Z_j$ визначається тим, що в комбінаціях вигляду

$$Z'_j = \mathrm{Bin}\, k' + +Y'_j \text{ і } Z'_j = \mathrm{Bin}\, k'' + +Y''_j$$

послідовності $Y'_j = A'_j$ і $Y''_j = A''_j$ не можуть бути різними за умовою теореми, тобто $A'_j = A''_j = A_j$, а два відмінних один від одного значення числа k одиниць для єдиної A_j не є можливими, тобто $\mathrm{Bin}\, k' = \mathrm{Bin}\, k''$. Звідси маємо $Z'_j = Z''_j = Z_j$ і для випадку (2.4.3).

Для випадку (2.4.4) однозначна відповідність A_j і Z_j обумовлюється одиничністю значень $k=0$ або $k=n$ для A_j, що складаються з одних тільки нулів або одиниць відповідно.

Отже, наше припущення для прямого відображення f_{bv} виявляється неправильним. Отже, вихідній A_j можна поставити у відповідність єдину Z_j вигляду (2.4.2), (2.4.3) або (2.4.4).

Тепер розглянемо зворотне відображення $f_{bv}^{-1} : Z \to A$. Припустимо, що для Z_j існують дві двійкові послідовності A'_j і A''_j, $A'_j \neq A''_j$.

Для випадку (2.4.2), коли $Z_j = \mathrm{Bin}\, k + +X_j$, відображенням f_{bv}^{-1} також, як і f_{bv}, є звуження відображення f_b^{-1} на множину $Z' \subset Z$, елементи Z_j якого є образами послідовностей A_j, котрі задовольняють (2.4.1). Тоді f_{bv}^{-1} зберігає властивості f_b^{-1} і підпадає під дію теореми 2.2, тобто $A'_j = A''_j = A_j$. Наше припущення щодо різних A'_j і A''_j для комбінації Z_j у випадку (2.4.2) виявляється неправильним.

Для випадку (2.4.3) рівність $A'_j = A''_j = A_j$ визначено самою комбінацією $Z_j = \mathrm{Bin}\, k + +Y_j$, яка містить A_j в явному вигляді, оскільки $Y_j = A_j$, тобто припущення про дві A'_j і A''_j, $A'_j \neq A''_j$ для Z_j за умови розгляду цього випадку також є неправильним.

Для випадку (2.4.4) однозначна відповідність Z_j і A_j обумовлена одиничністю значень $k = 0$ або $k = n$ для A_j, що складаються з одних тільки нулів або одиниць відповідно.

Очевидно, що справедливість доказування не зміниться і в разі розгляду більш ніж двох різних Z'_j, Z''_j, … або A'_j, A''_j, … . Отже, є взаємна однозначна відповідність між A_j і Z_j за умови прямого f_{bv} і зворотного f_{bv}^{-1} відображень. **Теорему доведено.**

Наслідок. Відображення $f_{bv} : A \to Z$ є бієктивним.

Насправді кожний елемент A_j має єдиний образ, а кожний елемент Z_j – єдиний прообраз для всіх $A_j \in A$ та $Z_j \in Z$. Звідси випливає бієктивність відображення f_{bv}.

Об’єднуючи в одну систему рівності (2.4.2), (2.4.3) і (2.4.4) з урахуванням умов їхнього застосування, для результуючої комбінації Z_j отримаємо

$$Z_j = \begin{cases} \mathrm{Bin}\, k, \ (k = 0) \vee (k = n) \\ \mathrm{Bin}\, k + +X_j, \ (0 < k < \alpha_b) \vee (\beta_b < k < n) \\ \mathrm{Bin}\, k + +Y_j, \ \alpha_b \le k \le \beta_b \ . \end{cases} \qquad (2.4.5)$$

Способи практичної реалізації відображень f_{bv} і f_{bv}^{-1}, указаних у теоремі 2.8, можуть бути різними. Вибрані підходи до побудови f_{bv} і f_{bv}^{-1}, розроблені методи кодування та моделі процесів, які для них формуються, у кінцевому підсумку впливають на швидкодію та обсяг витрат пропонованого методу стиснення f_{bv} даних, який використовує процедуру перемикання між біноміальним кодуванням f_b на основі двійкових біноміальних чисел і векторним кодуванням f_v.

Визначення 2.3. *Методом біноміально-векторного стиснення* f_{bv} *називається відображення*

$$f_{bv} : A \to Z ,$$

яке задається складною функцією вигляду

$$f_{bv} = \begin{cases} f_k \circ f_w, \ (k = 0) \vee (k = n) \\ f_k \circ f_b \circ f_w, \ (0 < k < \alpha_b) \vee (\beta_b < k < n) \\ f_k \circ f_v \circ f_w, \ \alpha_b \le k \le \beta_b \ , \end{cases} \qquad (2.4.6)$$

де A *– множина вихідних двійкових* n *-розрядних послідовностей* A_j

$$A_j \in A = \{0,1\}^n, \ j = \overline{1, 2^n}, \ A = \bigcup_{k=0}^{n} Y[n,k],$$

$$Y[n,k'] \cap Y[n,k''] = \varnothing, \ k' \ne k'', \ 0 \le k', k'' \le n;$$

Z *– множина результуючих послідовностей* Z_j

$$Z = Z_o \cup Z_b \cup Z_v,$$

$$Z_o = Q \times \varnothing = \left\{ Z_j \,/\, Z_j = \mathrm{Bin}\, k, (k=0) \vee (k=n) \right\},$$

$$Z_b = Q \times X\left[n,k\right] =$$
$$= \left\{ Z_j \,/\, Z_j = \left(\mathrm{Bin}\, k, X_j\right), (0 < k < \alpha_b) \vee (\beta_b < k < n) \right\},$$

$$Z_v = Q \times Y\left[n,k\right] = \left\{ Z_j \,/\, Z_j = \left(\mathrm{Bin}\, k, Y_j\right), \alpha_b \le k \le \beta_b \right\},$$

$$Q = \left\{ \mathrm{Bin}\, k \,/\, 0 \le k \le n \right\};\ Y_j \in Y\left[n,k\right],\ Y_j = f_w\left(A_j\right);$$

f_k – *функція* $Z_j = f_k\left(Y_j\right)$*, яка ставить у відповідність рівноважній комбінації* $Y_j = A_j$ *двійковий запис* $\mathrm{Bin}\, k$ *числа* k *одиниць, де* $(k=0) \vee (k=n)$*, і визначає відображення вигляду*

$$f_k : Y\left[n,k\right] \to Z_o,$$

або функція $Z_j = f_k\left(X_j\right)$*, яка ставить у відповідність двійковому* (n,k)*-біноміальному числу* $X_j \in X\left[n,k\right]$ *результуючу послідовність* $Z_j = \mathrm{Bin}\, k + +X_j$*, якщо* $(0 < k < \alpha_b) \vee (\beta_b < k < n)$*, і визначає відображення вигляду*

$$f_k : X\left[n,k\right] \to Z_b,$$

або функція $Z_j = f_k\left(Y_j\right)$*, яка ставить у відповідність* $Y_j = A_j$ *результуючу послідовність* $Z_j = \mathrm{Bin}\, k + +Y_j$*, якщо* $\alpha_b \le k \le \beta_b$*, і визначає відображення вигляду*

$$f_k : Y\left[n,k\right] \to Z_v;$$

f_b – *функція* $X_j = f_b\left(Y_j\right)$, *яка ставить у відповідність рівноважній комбінації* Y_j *двійкове* $\left(n,k\right)$-*біноміальне число* $X_j \in X\left[n,k\right]$ *і визначає біноміальне відображення вигляду*

$$f_b : Y\left[n,k\right] \to X\left[n,k\right];$$

f_v – *функція* $Y_j = f_v\left(Y_j\right)$ *або* $\mathrm{id}_Y\left(Y_j\right) = Y_j$, *яка переводить рівноважну комбінацію* Y_j *у себе і визначає тотожне відображення (перетворення) вигляду*

$$f_v : Y\left[n,k\right] \to Y\left[n,k\right];$$

f_w – *функція* $Y_j = f_w\left(A_j\right)$, *яка ставить у відповідність вихідній послідовності* A_j *упорядковану вибірку* $\left(k,Y_j\right)$, *де* $Y_j = A_j$, *і визначає відображення вигляду*

$$f_w : A \to M ,$$

$$M = \left\{\left(k,Y_j\right) / \, 0 < k < n, Y_j \in Y\left[n,k\right]\right\} .$$

На підставі визначення 2.3 і виразу (2.4.6) складну функцію, що реалізує відображення $f_{bv} : A \to Z$, можна записати як

$$Z_j = f_{bv}\left(A_j\right) = \\
= \begin{cases} f_k\left(f_w\left(A_j\right)\right), \left(k=0\right) \vee \left(k=n\right) \\ f_k\left(f_b\left(f_w\left(A_j\right)\right)\right), \left(0<k<\alpha_b\right) \vee \left(\beta_b<k<n\right) \\ f_k\left(f_v\left(f_w\left(A_j\right)\right)\right), \alpha_b \le k \le \beta_b \ . \end{cases} \tag{2.4.7}$$

Зі свого боку, зворотне відображення $f_{bv}^{-1}: Z \to A$, яке задає зворотна складна функція (беручи до уваги $f_v^{-1} = f_v$)

$$f_{bv}^{-1} = \\ = \begin{cases} f_w^{-1} \circ f_k^{-1}, \ (k=0) \vee (k=n) \\ f_w^{-1} \circ f_b^{-1} \circ f_k^{-1}, \ (0<k<\alpha_b) \vee (\beta_b < k < n) \\ f_w^{-1} \circ f_v \circ f_k^{-1}, \ \alpha_b \le k \le \beta_b \ , \end{cases} \qquad (2.4.8)$$

являє собою відновлення з урахуванням наявного значення k вихідних двійкових послідовностей A_j. У випадку $(k=0) \vee (k=n)$ відновлення A_j проводиться на основі $\mathrm{Bin}\,k$, у випадку $(0<k<\alpha_b) \vee (\beta_b < k < n)$ – на основі $\mathrm{Bin}\,k$ і двійкових біноміальних чисел $X_j \in X[n,k]$, а у випадку $\alpha_b \le k \le \beta_b$ – на основі тотожного відображення відновлюваної комбінації в себе $Y_j = A_j$. Такий вид відновлення будемо називати біноміально-векторним. На підставі (2.4.8) складну функцію, що реалізує зворотне відображення $f_{bv}^{-1}: Z \to A$, можна виразити ще як

$$A_j = f_{bv}^{-1}(Z_j) = \\ = \begin{cases} f_w^{-1}\left(f_k^{-1}(Z_j)\right), (k=0) \vee (k=n) \\ f_w^{-1}\left(f_b^{-1}\left(f_k^{-1}(Z_j)\right)\right), (0<k<\alpha_b) \vee (\beta_b < k < n) \\ f_w^{-1}\left(f_v\left(f_k^{-1}(Z_j)\right)\right), \alpha_b \le k \le \beta_b \ . \end{cases} \qquad (2.4.9)$$

Способи реалізації складних функцій (2.4.7) і (2.4.9) на підобласті визначення, коли $(k=0) \vee (k=n)$ і

$(0 < k < \alpha_b) \vee (\beta_b < k < n)$, для методу біноміально-векторного стиснення f_{bv} є аналогічними способам побудови функцій (2.1.1) або (2.1.3) для методу стиснення f_{bg} на основі двійкових біноміальних чисел на всій області значень $0 \le k \le n$.

Способи реалізації складних функцій (2.4.7) і (2.4.9) на підобласті визначення, коли $\alpha_b \le k \le \beta_b$, ґрунтуються на досить простих операціях обчислення k одиниць, конкатенації і декатенації двійкового коду $\mathrm{Bin}\,k$ і відображення вихідної послідовності A_j в саму себе.

З теорем 2.1 і 2.2, які вказують і обґрунтовують методи реалізації відповідності, сформульованої теоремою 2.8, а також із самої теореми 2.8, випливають моделі процесів біноміально-векторного стиснення f_{bv} і відновлення f_{bv}^{-1} двійкових послідовностей.

Моделювання процесу стиснення f_{bv} двійкових послідовностей $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, $A_j \in A = \{0,1\}^n$, $j = \overline{1, 2^n}$ здійснюється на основі теорем 2.1 і 2.8, функції (2.1.1) і складається з таких етапів.

Етап 1. Визначається кількість s розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\,k$ числа k одиниць, $0 \le k \le n$, вихідної n-розрядної послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$

$$s = \lceil \log_2 (n+1) \rceil .$$

Етап 2. Проводиться обчислення числа k двійкових одиниць у вихідній n-розрядній послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$

$$k = \sum_{i=1}^{n} a_i ,$$

у такий спосіб реалізуючи функцію $f_w\left(A_j\right)=\left(k,Y_j\right)$ і визначаючи клас $Y\left[n,k\right]$ рівноважних комбінацій, до якого належить $Y_j \in Y\left[n,k\right]$, $Y_j = A_j$.

Етап 3. Виконується перетворення числа k одиниць до його двійкового вигляду $\mathrm{Bin}\,k$, що складається із s розрядів.

Етап 4. Якщо число k задовольняє системі рівностей $\left(k=0\right)\vee\left(k=n\right)$, то результуючою буде комбінація вигляду $Z_j = \mathrm{Bin}\,k$, $Z_j \in Z_o$. В іншому разі виконується перехід до наступного етапу.

Етап 5. Якщо число k задовольняє системі нерівностей

$$\begin{cases} 0 < k < \alpha_b \\ \beta_b < k < n \end{cases},$$

то наявне значення n і обчислене значення k являють собою параметри двійкової $\left(n,k\right)$-біноміальної системи числення і здійснюється перехід до наступних етапів для реалізації кодування $f_k\left(f_b\left(Y_j\right)\right)=Z_j$, $Z_j \in Z_b$. В іншому разі виконується перехід до етапу 9 для реалізації кодування вигляду $f_k\left(f_v\left(Y_j\right)\right)=Z_j$, $Z_j \in Z_v$.

Етап 6. Визначається в n-розрядній рівноважній комбінації $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$, що має число k одиниць, значення останнього розряду y_n.

Етап 7. Якщо $y_n = 0$, то

$$X_j = Y_j / 00...0 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0 / 00...0 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1,$$

тобто від комбінації $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0$ відкидаються всі нульові розряди, починаючи з $y_n = 0$, до появи першої двійкової одиниці $y_r = 1$, котра являтиме собою значення останнього розряду $x_r = y_r = 1$ (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1$. В іншому разі

$$X_j = Y_j / 11...1 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1 / 11...1 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0,$$

тобто від комбінації $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1$ відкидаються всі одиничні розряди, починаючи з $y_n = 1$, до появи першого двійкового нуля $y_r = 0$, котрий являтиме собою значення останнього розряду $x_r = y_r = 0$ (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0$. Водночас в обох випадках значення інших розрядів залишаються без змін: $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, …, $x_{r-1} = y_{r-1}$.

Етап 8. Виконується конкатенація двійкових значень $\mathrm{Bin}\,k$ і (n,k)-біноміального числа X_j, тобто кодування вигляду $f_k\left(X_j\right) = Z_j$, для випадку $\left(0 < k < \alpha_b\right) \vee \left(\beta_b < k < n\right)$

$$Z_j = \mathrm{Bin}\,k + + X_j,$$

у такий спосіб отримуючи результуючу комбінацію $Z_j \in Z_b$.

Етап 9. Виконується конкатенація двійкових значення $\mathrm{Bin}\,k$ і рівноважної комбінації Y_j, тобто кодування вигляду $f_k\left(f_v\left(Y_j\right)\right) = Z_j$, для випадку $\alpha_b \le k \le \beta_b$

$$Z_j = \mathrm{Bin}\,k + + Y_j,$$

у такий спосіб отримуючи результуючу комбінацію $Z_j \in Z_v$.

У моделі процесу стиснення f_{bv} за умови використання двійкового рахунку етапи 2 і 3 можна сполучити.

Моделювання процесу відновлення f_{bv}^{-1} послідовностей $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, $A_j \in A = \{0,1\}^n$, $j = \overline{1, 2^n}$ з комбінацій-образів Z_j, $Z_j \in Z_o \cup Z_b \cup Z_v$ здійснюється на основі теорем 2.2 і 2.8, функції (2.1.3) і складається з таких етапів.

Етап 1. Визначається кількість s розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\, k$ числа k одиниць, $0 \le k \le n$, відновлюваної n-розрядної послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$

$$s = \left\lceil \log_2 (n+1) \right\rceil.$$

Етап 2. Здійснюється декатенація s розрядів, починаючи з першого розряду комбінації Z_j

$$\mathrm{Bin}\, k = Z_j / X_j, \ \mathrm{Bin}\, k = Z_j / Y_j \ \text{або} \ \mathrm{Bin}\, k = Z_j,$$

у такий спосіб витягується $\mathrm{Bin}\, k = z_1 z_2 ... z_s$ зі стислого образу Z_j, що відповідає шуканій n-розрядній послідовності A_j. Остання рівність є випадком, коли тільки $\mathrm{Bin}\, k$ являє собою образ нульової або одиничної A_j. Тоді реалізується декодування $f_k^{-1}(Z_j)$.

Етап 3. Виконується перетворення двійкового значення $\mathrm{Bin}\, k$ до його десяткового еквівалента

$$k = \mathrm{dec}(\mathrm{Bin}\, k).$$

Етап 4. Якщо для значення k виконується $(k=0) \vee (k=n)$, то комбінація, що перетворюється, має вигляд $Z_j = \mathrm{Bin}\, k$, і тоді формується послідовність A_j вигляду

$$A_j = f_{bv}^{-1}(Z_j) = f_w^{-1}\left(f_k^{-1}(Z_j)\right) = f_w^{-1}(\mathrm{Bin}\, n) = 11...1$$

або

$$A_j = f_{bv}^{-1}\left(Z_j\right) = f_w^{-1}\left(f_k^{-1}\left(Z_j\right)\right) = f_w^{-1}\left(\mathrm{Bin}\,0\right) = 00...0\,.$$

В іншому разі робиться перехід до наступного етапу.

Етап 5. Якщо для значення k виконується

$$\begin{cases} 0 < k < \alpha_b \\ \beta_b < k < n\,, \end{cases}$$

то комбінація має вигляд $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\,k, X_j\right)$, а значення n і k являють собою параметри двійкової (n,k)-біноміальної системи числення. Далі здійснюється перехід до подальших етапів для реалізації декодування вигляду $f_{bv}^{-1}\left(Z_j\right) = f_w^{-1}\left(f_b^{-1}\left(X_j\right)\right) = f_w^{-1}\left(f_b^{-1}\left(f_k^{-1}\left(Z_j\right)\right)\right)$. В іншому разі комбінація має вигляд $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\,k, Y_j\right)$ і для реалізації $f_{bv}^{-1}\left(Z_j\right) = f_w^{-1}\left(f_v\left(Y_j\right)\right) = f_w^{-1}\left(f_v\left(f_k^{-1}\left(Z_j\right)\right)\right)$ виконується перехід до етапу 9.

Етап 6. Здійснюється декатенація r розрядів, починаючи з $(s+1)$-го розряду комбінації Z_j

$$X_j = Z_j / \mathrm{Bin}\,k\,,$$

у такий спосіб витягується $X_j = z_{s+1}z_{s+2}...z_{s+r} = x_1x_2...x_i...x_r$, $X_j \in X[n,k]$, $r < n$, зі стислого образу Z_j, що відповідає шуканій n-розрядній послідовності A_j.

Етап 7. Визначається у двійковому (n,k)-біноміальному r-розрядному числі $X_j = x_1x_2...x_i...x_r$ значення останнього розряду x_r.

Етап 8. Якщо $x_r = 0$, то

$$Y_j = X_j + +11...1 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0 + +11...1 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1,$$

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0$ приєднуються одиничні розряди $11...1$: $y_{r+1} = y_{r+2} = ... = y_n = 1$. В іншому разі

$$Y_j = X_j + +00...0 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1 + +00...0 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0,$$

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1$ приєднуються нульові розряди $00...0$: $y_{r+1} = y_{r+2} = ... = y_n = 0$. В обох випадках загальна кількість розрядів отриманої двійкової рівноважної комбінації Y_j повинна становити n, $Y_j \in Y[n,k]$. Водночас значення інших розрядів залишаються без змін: $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, …, $y_r = x_r$. Унаслідок $f_w^{-1}((k, Y_j)) = A_j$ отримуємо шукану n-розрядну послідовність $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, де $A_j = Y_j$ і $a_1 = y_1$, $a_2 = y_2$, …, $a_n = y_n$.

Етап 9. Виконується декатенація n розрядів, починаючи з $(s+1)$-го розряду комбінації Z_j

$$Y_j = Z_j / \mathrm{Bin}\, k,$$

у такий спосіб витягується рівноважна комбінація Y_j зі стислого образу Z_j. Унаслідок $f_w^{-1}((k, Y_j)) = A_j$ отримуємо шукану n-розрядну послідовність $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, де $A_j = Y_j$ і $a_1 = y_1$, $a_2 = y_2$, …, $a_n = y_n$.

Для реалізації етапу 8 процесу відновлення f_{bv}^{-1} рівноважних комбінацій $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$ на основі двійкових (n,k)-біноміальних чисел X_j можна також використовувати функцію $Y_j = f_b^{-1}\left(X_j\right)$ вигляду (2.1.6), яка вимагає обчислення $q < n$ або $l < n$. У цьому разі етапи 1–6 і 9 зберігають свій колишній зміст, а етапи 7 і 8 перетворяться до наступного вигляду.

Етап 7. Обчислюється у двійковому (n,k)-біноміальному числі $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ кількість – $q = \sum_{i=1}^{r} x_i$ одиниць, $0 \le q \le k$.

Етап 8. Якщо $0 \le q \le k$, то

$$Y_j = X_j + +11...1 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0 + +11...1 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1,$$

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ приєднуються одиничні розряди 11...1 доти, поки їх не стане $q = k$. В іншому разі

$$Y_j = X_j + +00...0 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1 + +00...0 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0,$$

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ приєднуються нульові розряди 00...0 доти, поки їх не стане $l = n - k$. В обох випадках маємо вихідну рівноважну комбінацію Y_j, $Y_j \in Y[n,k]$, значення інших розрядів якої $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, …, $y_r = x_r$. Унаслідок $f_w^{-1}\left(\left(k, Y_j\right)\right) = A_j$ отримуємо шукану n-розрядну послідовність $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, де $A_j = Y_j$ і $a_1 = y_1$, $a_2 = y_2$, …, $a_n = y_n$.

Під час виконання операцій порівняння двійкових чисел етапи 3 і 4, а також етапи 3 і 5 у моделі відновлення f_{bv}^{-1} можна сполучити.

З метою зменшення часу відновлення A_j операцію обчислення на етапі 1 можна замінити операцією пошуку значень s у таблицях із довільним доступом, у яких залежно від k утримуються шукані значення чисел розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\, k$.

Деякі результати відображень $f_{bv} : A \to Z$, $f_{bv}^{-1} : Z \to A$ для $n = 54$, де $A = \{0,1\}^{54}$, $j = \overline{1, 2^{54}}$, наведено в таблиці 2.4. Системи умов для реалізації функцій кодування $f_k \circ f_w$, $f_k \circ f_b \circ f_w$ і $f_k \circ f_v \circ f_w$ для цього випадку вказані в таблиці 2.5 (на основі додатка А, табл. А.1).

Таблиця 2.4 – Відповідність між деякими двійковими A_j і Z_j за умови $n = 54$

1.1	000000000000000000000000000000000000000000000000000000
1.2	000000
2.1	001100100000000000000000000000000000000000000000000000
2.2	000011.0011001
3.1	100000000000000000100000000000100000000000000000000000
3.2	000011.1000000000000000001000000000001
4.1	001111111110011111111011111111111111111111111111111111
4.2	110001.0011111111100111111110
5.1	101111000111001110010101111010111011101111100111011100
5.2	100011.101111000111001110010101111010111011101111100111011100

Таблиця 2.5 – Умови застосування функцій кодування $f_k \circ f_w$, $f_k \circ f_b \circ f_w$ і $f_k \circ f_v \circ f_w$ за умови $n = 54$

$f_k \circ f_w$	$f_k \circ f_b \circ f_w$	$f_k \circ f_v \circ f_w$
$\begin{cases} k = 0 \\ k = 54 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 < k < 6 \\ 48 < k < 54 \end{cases}$	$6 \le k \le 48$

У таблиці 2.4 у рядках, пронумерованих 1.1, 2.1, 3.1, 4.1 і 5.1, указані вихідні двійкові послідовності $A_j \in \{0,1\}^{54}$, а в рядках 1.2, 2.2, 3.2, 4.2 і 5.2 – стиснені комбінації Z_j, які їм відповідають. У рядку 1.2 міститься результат кодування $f_k \circ f_w$, у рядках 2.2, 3.2 і 4.2 – результат застосування функції $f_k \circ f_b \circ f_w$, а в рядку 5.2 – результат застосування функції $f_k \circ f_v \circ f_w$. Двійковий запис числа k одиниць у комбінаціях Z_j умовно відділений крапкою від X_j або Y_j. Відношення довжин двійкового подання A_j і Z_j для цієї таблиці змінюється в межах від 0,9 до 9, а їхнє середнє значення для всієї таблиці 2.4 становить приблизно 3,49.

Як приклад розглянемо біноміально-векторне стиснення двійкової 54-розрядної послідовності A_j вигляду

101111011110111101111111111111111111111111111111111111,

використовуючи вищенаведену модель процесу стиснення f_{bv} на основі теорем 2.1 і 2.8, функції (2.1.1).

Етап 1. Визначається кількість s розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\,k$ числа k одиниць, $0 \le k \le 54$, вихідної 54-розрядної послідовності A_j

$$s = \lceil \log_2 55 \rceil = 6 .$$

Етап 2. Проводиться обчислення числа k двійкових одиниць у вихідній 54-розрядній послідовності A_j

$$k = \sum_{i=1}^{54} a_i = 50 ,$$

у такий спосіб реалізуючи функцію $f_w\left(A_j\right) = \left(k, Y_j\right)$ і визначаючи клас рівноважних комбінацій $Y\left[54, 50\right]$, до якого належать A_j, $A_j = Y_j \in Y\left[54, 50\right]$.

Етап 3. Виконується перетворення числа $k = 50$ одиниць до його двійкового вигляду $\mathrm{Bin}\,50 = 110010$, який складається із $s = 6$ розрядів.

Етап 4. Оскільки число $k = 50$ не задовольняє системі рівностей $\left(k = 0\right) \vee \left(k = 54\right)$, то виконується перехід до наступного етапу.

Етап 5. Оскільки число $k = 50$ задовольняє системі нерівностей

$$\begin{cases} 0 < k < 6 \\ 48 < k < 54 \end{cases} ,$$

то наявне значення $n = 54$ та обчислене значення $k = 50$ являють собою параметри двійкової $\left(54, 50\right)$-біноміальної системи числення і здійснюється перехід до подальших етапів для реалізації кодування вигляду $f_k\left(f_b\left(Y_j\right)\right) = Z_j$, $Y_j = A_j$: формування $\left(54, 50\right)$-біноміального числа $X_j = f_b\left(Y_j\right)$, $X_j \in X\left[54, 50\right]$, і конкатенації двійкового запису $\mathrm{Bin}\,50 = 110010$ до сформованого X_j.

Етап 6. Визначається в 54-розрядній рівноважній комбінації Y_j, яка має число $k = 50$ двійкових одиниць, значення останнього розряду $y_{54} = 1$.

Етап 7. Оскільки $y_{54} = 1$, то

$$X_j = Y_j / 1111111111111111111111111111111111111 = \\ = 10111101111011111 0,$$

тобто від комбінації Y_j відкидаються всі одиничні розряди, починаючи з $y_{54} = 1$, до появи першого двійкового нуля $y_{18} = 0$, який буде являти собою значення останнього $x_{18} = y_{18} = 0$ $(54,50)$-біноміального числа $X_j = 101111011110111110$. Водночас значення інших розрядів залишаються без змін: $x_1 = y_1 = 1$, $x_2 = y_2 = 0$, …, $x_{17} = y_{17} = 1$.

Етап 8. Виконується конкатенація двійкових значення $\mathrm{Bin}\,50 = 110010$ і $(54,50)$-біноміального числа $X_j = 101111011110111110$, тобто кодування вигляду $f_k\left(X_j\right) = Z_j$ для випадку $(0 < k < 6) \vee (48 < k < 54)$

$$Z_j = 110010 + +101111011110111110 = \\ = 110010101111011110111110,$$

у такий спосіб отримуючи результуючу комбінацію Z_j.

Тепер розглянемо приклад біноміально-векторного відновлення двійкової 54-розрядної послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_{54}$ (значення $n = 54$ є попередньо відомим) з комбінації-образу

$$Z_j = 110010101111011110111110,$$

використовуючи вищенаведену модель процесу відновлення f_{bv}^{-1} на основі теорем 2.2 і 2.8, функції (2.1.3).

Етап 1. Визначається кількість s розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\,k$ числа k одиниць, $0 \le k \le 54$, відновлюваної 54-розрядної послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_{54}$

$$s = \lceil \log_2 55 \rceil = 6 .$$

Етап 2. Здійснюється декатенація $s = 6$ розрядів, починаючи з першого розряду комбінації Z_j, у такий спосіб витягується

$$\mathrm{Bin}\,k = 110010$$

зі стислого образу Z_j, відповідного шуканій двійковій 54-розрядній послідовності A_j. Отже, реалізується $f_k^{-1}\left(Z_j\right) = \mathrm{Bin}\,k$.

Етап 3. Виконується перетворення двійкового значення $\mathrm{Bin}\,k = 110010$ до його десяткового еквівалента

$$k = \mathrm{dec}\left(110010\right) = 50 .$$

Етап 4. Оскільки для значення $k = 50$ не виконується $\left(k = 0\right) \vee \left(k = 54\right)$, то здійснюється перехід до етапу 5.

Етап 5. Оскільки для значення $k = 50$ виконується

$$\begin{cases} 0 < k < 6 \\ 48 < k < 54 \end{cases},$$

то комбінація має вигляд $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\,50, X_j\right)$, а значення $n = 54$ і $k = 50$ являють собою параметри двійкової $\left(54, 50\right)$-біноміальної системи числення. Далі здійснюється перехід до наступних етапів, починаючи з етапу 6, для реалізації декодування

$$f_{bv}^{-1}\left(Z_j\right) = f_w^{-1}\left(\left(k, Y_j\right)\right) =$$
$$= f_w^{-1}\left(f_b^{-1}\left(X_j\right)\right) = f_w^{-1}\left(f_b^{-1}\left(f_k^{-1}\left(Z_j\right)\right)\right),$$

тобто декатенації двійкових запису $\mathrm{Bin}\,50 = 110010$ і $(54,50)$-біноміального числа X_j із наявної комбінації $Z_j = 110010101111011110111110$, формування рівноважної комбінації Y_j, яка має $k = 50$ двійкових одиниць, і на її основі вихідної послідовності A_j.

Етап 6. Здійснюється декатенація $r = 18$ розрядів, починаючи із 7-го розряду комбінації $Z_j = 110010101111011110111110$

$$X_j = Z_j / 110010 = 101111011110111110,$$

у такий спосіб витягується $X_j = 101111011110111110$, $X_j \in X[54,50]$, $r = 18 < n = 54$ зі стислого образу Z_j, відповідного шуканій 54-розрядній послідовності A_j.

Етап 7. Визначається у двійковому $(54,50)$-біноміальному 18-розрядному числі $X_j = 101111011110111110$ значення останнього розряду $x_{18} = 0$.

Етап 8. Оскільки $x_{18} = 0$, то

$$Y_j = X_j + +\underbrace{11...1}_{36} = 101111011110111110 + +\underbrace{11...1}_{36} =$$
$$= 101111011110111110\underbrace{11...1}_{36},$$

тобто до двійкового біноміального числа $X_j = 101111011110111110$ приєднуються одиничні розряди $\underbrace{11...1}_{36}$: $y_{19} = y_{20} = ... = y_{54} = 1$. Загальна кількість розрядів одержуваної двійкової рівноважної комбінації Y_j повинна становити $n = 54$, $Y_j \in Y[54, 50]$. Водночас значення інших розрядів залишаються без змін: $y_1 = x_1 = 1$, $y_2 = x_2 = 0$, …, $y_{18} = x_{18} = 0$. Унаслідок цього отримуємо вихідну 54-розрядну послідовність

$$A_j = 101111011110111110\underbrace{11...1}_{36},$$

де $A_j = Y_j$ і $a_1 = y_1 = 1$, $a_2 = y_2 = 0$, …, $a_{53} = y_{53} = 1$, $a_{54} = y_{54} = 1$.

Розділ 3
СТИСНЕННЯ НА ОСНОВІ БІНОМІАЛЬНОЇ ЧИСЛОВОЇ ФУНКЦІЇ

3.1 Моделі стиснення і відновлення рівноважних комбінацій на основі біноміальної числової функції

Подальшим розвитком біноміального стискального кодування є розроблення методу стиснення на основі біноміальної числової функції (1.1.2) [29–31]. Функція (1.1.2), що є нумераційною, дозволяє ставити у відповідність двійковим (n,k)-біноміальним числам X_j їхні десяткові еквіваленти – номери

$$D_j = \mathrm{Bin}\left(\mathrm{dec}\, X_j\right),$$

які подають у двійковому вигляді.

Обґрунтування доцільності розроблення методу стиснення двійкових n-розрядних кодів-сполучень $Y_j \in Y\left[n, R_Y\right]$ на основі біноміальної числової функції (1.1.2) містить такі твердження [32]:

1) довжина номерів D_j задовольняє нерівностям $\left|D_j\right| < n$ і $\left|D_j\right| < L_{cp}$, що забезпечує коефіцієнт стиснення більше ніж одиниця;

2) функціональність відповідностей $H \subseteq D \times X$, $\left(D_j, X_j\right) \in H$ і $S \subseteq X \times D$, $\left(X_j, D_j\right) \in S$ між множинами D двійкових номерів D_j і X двійкових біноміальних чисел X_j заснована на теоремах однозначності подання біноміальних чисел [3; 4], що призводить до бієктивних біноміальних відображень вигляду $\psi^{-1} : D \to X$ та $\psi : X \to D$,

і забезпечує взаємну однозначність кодування та декодування;

3) рівномірність двійкових номерів D_j, що суттєво дозволяє знизити апаратні та/або програмні витрати за умови побудови пристроїв та/або програмних модулів стиснення і відновлення кодів-сполучень Y_j на основі біноміальної числової функції;

4) поширеність кодів-сполучень Y_j (рівноважних, квазірівноважних, з обмеженнями на взаємне розташування одиниць тощо), які використовують для подання інформації в цифрових пристроях і системах [22; 23].

Реалізація біноміального відображення вигляду $\psi : X \to D$ за умови існування бієктивного відображення $f_b : Y[n,k] \to X[n,k]$ (теорема 2.1) у межах побудови математичної моделі перерахування [22; 33; 34] для вихідних двійкових n-розрядних послідовностей $Y_j \in Y[n,R_Y]$ із заданим обмеженням $R_Y = k$ являє собою стиснення

$$f_e : Y[n,k] \to D[n,k] \qquad (3.1.1)$$

рівноважних комбінацій $Y_j \in Y[n,k]$ на основі двійкових номерів $D_j \in D[n,k]$, які обчислюються за допомогою біноміальної числової функції (1.1.2). Такий вид стиснення будемо називати біноміальним нумераційним стисненням, або стисненням на основі біноміальної числової функції. Отже, маємо складну функцію $f_e = \psi \circ \varphi^{-1} = \psi \circ f_b$

$$D_j = f_e(Y_j) = \psi\left(\varphi^{-1}(Y_j)\right) = \psi\left(f_b(Y_j)\right). \qquad (3.1.2)$$

Зі свого боку, реалізація біноміального відображення $\psi^{-1} : D \to X$ за умови існування бієктивного відображення $f_b^{-1} : X[n,k] \to Y[n,k]$ (теорема 2.2) у межах побудови математичної моделі генерування [22; 33; 34] для $Y_j \in Y[n, R_Y]$ із заданим обмеженням $R_Y = k$ означає відновлення

$$f_e^{-1} : D[n,k] \to Y[n,k] \qquad (3.1.3)$$

вихідних рівноважних комбінацій $Y_j \in Y[n,k]$ на основі двійкових номерів $D_j \in D[n,k]$, які обчислюють за допомогою біноміальної числової функції (1.1.2). Такий вид відновлення будемо називати біноміальним нумераційним, або відновленням на основі біноміальної числової функції. Отже, маємо складну зворотну функцію $f_e^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1} = f_b^{-1} \circ \psi^{-1}$

$$Y_j = f_e^{-1}(D_j) = \varphi\left(\psi^{-1}(D_j)\right) = f_b^{-1}\left(\psi^{-1}(D_j)\right). \qquad (3.1.4)$$

Для розроблення методу біноміального нумераційного стиснення як методу комбінаторного кодування задачі перерахування і генерування рівноважних комбінацій $Y_j \in Y[n,k]$ зводяться до знаходження способів практичної реалізації складних функцій (3.1.2), (3.1.4) і відповідних їм відображень (3.1.1), (3.1.3), в основу побудови яких запропоновано взяти біноміальні відображення вигляду $\psi : X \to D$ і $\psi^{-1} : D \to X$.

Побудову відображень $\psi : X \to D$ і $\psi^{-1} : D \to X$ визначено числовою функцією (1.1.2) і системами кодоутворювальних обмежень (1.1.3) і (1.1.4).

Нижченаведена теорема 3.1 наводить властивості відображення f_e і спосіб його практичної реалізації.

Теорема 3.1. Будь-якій двійковій послідовності $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$, $Y_j \in Y[n,k]$, $j = \overline{1, C_n^k}$, складеної з n розрядів y_i, сума значень яких рівна k, можна поставити у відповідність єдине ціле позитивне число $D_j \in D[n,k] = \left\{ \mathrm{Bin}\left(\overline{0, C_n^k - 1} \right) \right\}$ за допомогою відображення f_e у два етапи:

1) перехід від послідовності $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$ до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$, $X_j \in X[n,k]$, $r < n$ за допомогою функції $X_j = f_b(Y_j)$

$$X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r = \left[\begin{array}{l} y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0/00...0 \\ y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1/11...1 \end{array} \right. ;$$

2) обчислення номера $D_j = \mathrm{Bin}\left(\mathrm{dec}\, X_j \right)$ двійкового (n,k)-біноміального числа X_j відповідно до числової функції (1.1.2)

$$\mathrm{dec}\, X_j = \sum_{i=1}^{r} x_i \rho_i ,$$

де $\rho_i = C_{n-i}^{k-q_i}$.

Доведення. Перший етап $f_b : Y[n,k] \to X[n,k]$ узагальненого відображення $f_e : Y[n,k] \to D[n,k]$ обґрунтовано теоремою 2.1.

Для доказування другого етапу (можливості відображення вигляду $\psi : X[n,k] \to D[n,k]$ за допомогою (1.1.2)) зробимо послідовне ділення номера $\operatorname{dec} X_j$ із залишком. На кожному черговому i-му кроці будемо ділити залишок τ_{i-1} на ρ_i, отримуючи приватне δ_i і залишок τ_i

$$\operatorname{dec} X_j = \delta_1 \rho_1 + \tau_1 ,\ \tau_1 = \delta_2 \rho_2 + \tau_2 ,\ldots,$$

$$\tau_{i-1} = \delta_i \rho_i + \tau_i ,\ldots,\ \tau_{r-2} = \delta_{r-1} \rho_{r-1} + \tau_{r-1} ,\ \tau_{r-1} = \delta_r \rho_r + \tau_r ,$$

де $i = \overline{1,r}$, а $\rho_i = C_{n-i}^{k-q_i}$ є ваговий коефіцієнт i-го кроку ділення. Загальна кількість (n,k)-біноміальних чисел є $N = C_n^k$, тобто значення біноміального числа $\operatorname{dec} X_j$ лежить у діапазоні $0 \le \operatorname{dec} X_j < C_n^k$ [3; 4]. Тоді, якщо $\operatorname{dec} X_j = \delta_1 \rho_1 + \tau_1$, то за умови $i = 1$ отримуємо $\rho_1 = C_{n-1}^{k-q_1}$ і $\operatorname{dec} X_j = \delta_1 C_{n-1}^{k-q_1} + \tau_1$, але відомим є вираз суми біноміальних коефіцієнтів $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ [16; 17; 25]. Отже, з одного боку

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} , \tag{3.1.5}$$

а з іншого –

$$\operatorname{dec} X_j = \delta_1 C_{n-1}^{k-q_1} + \tau_1 . \tag{3.1.6}$$

Порівнюючи два вирази (3.1.5), (3.1.6), і з огляду на $\operatorname{dec} X_j < C_n^k$ доходимо висновку, що $0 \le \delta_1 \le 1$, $q_1 = 0$ і $\tau_1 < C_{n-1}^{k-1}$.

Далі проводимо ділення залишку τ_1 на ваговий коефіцієнт ρ_2 за умови $i = 2$, тобто $\tau_1 = \delta_2 \rho_2 + \tau_2$. За заданого $i=2$ отримуємо $\rho_2 = C_{n-2}^{k-q_2}$. Розглядаючи (3.1.5) уже у вигляді

$$C_{n-1}^{k-1} = C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2},$$

а вираз (3.1.6), подавши як

$$\tau_1 = \delta_2 C_{n-2}^{k-q_2} + \tau_2,$$

можна зробити висновок, що $0 \le \delta_2 \le 1$, $q_2 = 1$ і $\tau_2 < C_{n-2}^{k-2}$.

На i-му кроці ділення залишку τ_{i-1} вирази для суми біноміальних коефіцієнтів і ділення $(i-1)$-го залишку матимуть вигляд

$$C_{n-i+1}^{k-i+1} = C_{n-i}^{k-i+1} + C_{n-i}^{k-i}, \ \tau_{i-1} = \delta_i C_{n-i}^{k-q_i} + \tau_i,$$

на підставі якого можна зробити висновок, що за умови $\tau_{i-1} < C_{n-i+1}^{k-i+1}$ маємо $0 \le \delta_i \le 1$, $q_i = i-1$ і $\tau_i < C_{n-i}^{k-i}$.

На $i = r-1$ кроці маємо $\tau_{r-2} < C_{n-r+2}^{k-r+2}$, біноміальний коефіцієнт уже вигляду C_{n-r+2}^{k-r+2} розбиваємо відповідно до властивості підсумовування чисел сполучень [16; 17; 25] і здійснюємо ділення залишку τ_{r-2} на ваговий коефіцієнт ρ_{r-1}

$$C_{n-r+2}^{k-r+2} = C_{n-r+1}^{k-r+2} + C_{n-r+1}^{k-r+1}, \ \tau_{r-2} = \delta_{r-1} C_{n-r+1}^{k-q_{r-1}} + \tau_{r-1}.$$

На підставі наведених виразів для кроку $i = r-1$ за умови $\tau_{r-2} < C_{n-r+2}^{k-r+2}$ отримуємо $0 \le \delta_{r-1} \le 1$, $q_{r-1} = r-2$ і $\tau_{r-1} < C_{n-r+1}^{k-r+1}$.

На останньому кроці $i = r$, аналогічно формуючи вирази суми біноміальних коефіцієнтів і ділення залишку, отримуємо

$$C_{n-r+1}^{k-r+1} = C_{n-r}^{k-r+1} + C_{n-r}^{k-r},\ \tau_{r-1} = \delta_r C_{n-r}^{k-q_r} + \tau_r .$$

На підставі вигляду наведених рівностей можна зробити висновок, що за умови $\tau_{r-1} < C_{n-r+1}^{k-r+1}$ маємо $0 \le \delta_r \le 1,\ q_r = r-1$ і $\tau_r < C_{n-r}^{k-r}$.

Розглянемо нерівність для останнього залишку

$$\tau_r < C_{n-r}^{k-r} .$$

Змінна k являє собою максимальну кількість включень вагових коефіцієнтів вигляду $\rho_i = C_{n-i}^{k-q_i}$ у число $\operatorname{dec} X_j$. Очевидно, якщо r – кількість етапів поділу вихідного числа $\operatorname{dec} X_j$, то $r = k$. Звідси

$$\tau_r < C_{n-r}^{k-r} = C_{n-r}^{k-k} = C_{n-r}^{0} = 1,$$

а отже, $\tau_r = 0$.

Виконавши послідовну підстановку виразів для τ_i у рівності для τ_{i-1}, отримуємо необхідне подання

$$\operatorname{dec} X_j = \delta_1 C_{n-1}^{k} + \delta_2 C_{n-2}^{k-q_2} + \ldots + \delta_i C_{n-i}^{k-q_i} + \ldots + \delta_r C_{n-r}^{k-q_r} = \\ = \sum_{i=1}^{r} \delta_i C_{n-i}^{k-q_i},$$

де $0 \le \delta_i \le 1,\ q_i$ – сума δ_i від першого до $(i-1)$-го кроку включно, тобто

$$q_i = \sum_{t=1}^{i-1} \delta_t \ .$$

Отже, прирівнюючи $\delta_i = x_i$, існування розкладання вигляду (1.1.2) доведено.

Доведемо тепер єдиність розкладання (1.1.2). Нехай за умови незмінних параметрів n і k номера $\operatorname{dec} X_j$ відповідають два біноміальних числа $X'_j = x'_1 x'_2 ... x'_i ... x'_{r'}$ і $X''_j = x''_1 x''_2 ... x''_i ... x''_{r''}$, які мають розкладання вигляду (1.1.2)

$$\operatorname{dec} X_j = F' = \sum_{i=1}^{r'} x'_i C_{n-i}^{k-q'_i} \ ,$$
$$\operatorname{dec} X_j = F'' = \sum_{i=1}^{r''} x''_i C_{n-i}^{k-q''_i} \ , \qquad (3.1.7)$$

причому $0 \le x'_i \le 1$ і $0 \le x''_i \le 1$.

Біноміальні числа X'_j і X''_j можна розбити на загальні X'^g_j, X''^g_j і власні X'^s_j, X''^s_j частини [3; 4]. Водночас для відповідних номерів F' і F'', обчислених відповідно до (3.1.7), повинні виконуватися рівності $F' = F'^g + F'^s$ і $F'' = F''^g + F''^s$, де F'^g, F''^g і F'^s, F''^s – кількісні еквіваленти відповідно до загальних і власних кодових частин біноміальних чисел X'_j і X''_j. Очевидно, для загальних частин $F'^g = F''^g$. Тоді $F'' - F' = F''^s - F'^s$ і з урахуванням нашого припущення ця різниця повинна бути рівною нулю.

Припустимо, що власні частини X''^s_j і X'^s_j відрізняються один від одного максимально, маючи протилежні значення відповідних розрядів, починаючи зі старших. Нехай $X''^s_j = 100...0$ і $X'^s_j = 011...1$. Але відповідно до

[4, теорема 7.5] для такого випадку $F'' - F' = F''^S - F'^S = 1$, тобто $F'' \neq F'$. З [4, лема 5.1] випливає, що власна частина $X_j'^S = 011...1$ досягає свого максимального значення. Тому поява одного або декількох нулів замість одиниць у $X_j'^S = 011...1$ змінить величину F'^S у менший бік і, відповідно, різниця $F'' - F'$ стане більше за одиницю.

Поява однієї або декількох одиниць замість нулів у $X_j''^S = 100...0$ призведе до збільшення F''^S і, відповідно, до збільшення різниці $F'' - F'$, яка стане також більшою за одиницю.

Одночасна наявність нулів і одиниць у старших розрядах у кодових частинах X_j'' і X_j' заборонена, оскільки вони тоді будуть належати до загальної частини розкладів F'' і F'. Інших варіантів побудови власних частин $X_j''^S$ і $X_j'^S$ із тим, щоб домогтися рівності нулю різниці $F'' - F'$, немає.

Унаслідок цього за умови будь-яких можливих значень цифр у розрядах власних частин $X_j'^S$ і $X_j''^S$ буде спостерігатися нерівність $F'^S \neq F''^S$ і, отже, $F'' \neq F'$. Тоді за умови незмінних параметрів n і k номера $\mathrm{dec}\, X_j$ не можуть відповідати два різних біноміальних числа $X_j' = x_1'x_2'...x_i'...x_{r'}'$ і $X_j'' = x_1''x_2''...x_i''...x_{r''}''$, тобто $x_i' = x_i''$, $r' = r''$ і звідси $X_j'' = X_j'$. Оскільки $X_j'' = X_j' = X_j$, то можна зробити висновок, що розкладання (1.1.2) є єдиним для номера $\mathrm{dec}\, X_j$. **Теорему доведено.**

Визначення 3.1. *Методом стиснення* f_e *на основі біноміальної числової функції (біноміальним нумераційним стисненням) називається відображення*

$$f_e : Y[n,k] \to D[n,k],$$

яке задається функцією вигляду

$$f_e = \psi \circ f_b,$$

де $Y[n,k]$ *– множина вихідних двійкових* n *-розрядних послідовностей* $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$, *які мають число* k *одиниць,* $Y_j \in Y[n,k]$

$$Y[n,k] = \left\{ Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n \,/\, \sum_{i=1}^{n} y_i = k, y_i \in \{0,1\} \right\};$$

$D[n,k]$ *– множина двійкових номерів* $D_j \in D[n,k]$, *обчислення яких проводять відповідно до біноміальної числової функції* (1.1.2)

$$D[n,k] = \left\{ \mathrm{Bin}\left(\overline{0, C_n^k - 1} \right) \right\}.$$

Моделювання процесу стиснення f_e двійкових рівноважних комбінацій $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$ на основі двійкової біноміальної числової функції (1.1.2) з використанням теореми 3.1 і виразу (2.1.1) складається з таких етапів.

Етап 1. Визначається в n -розрядній рівноважній комбінації $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$, що має число k одиниць, значення останнього розряду y_n .

Етап 2. Якщо $y_n = 0$, то

$$X_j = Y_j / 00...0 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0 / 00...0 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1,$$

тобто від комбінації $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0$ відкидаються всі нульові розряди, починаючи з $y_n = 0$, до появи першої двійкової одиниці $y_r = 1$, котра являтиме собою значення останнього розряду $x_r = y_r = 1$ вихідного (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1$. В іншому разі

$$X_j = Y_j / 11...1 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1 / 11...1 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0 ,$$

тобто від комбінації $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1$ відкидаються всі одиничні розряди, починаючи з $y_n = 1$, до появи першого двійкового нуля $y_r = 0$, котрий являтиме собою значення останнього розряду $x_r = y_r = 0$ вихідного (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0$. Водночас в обох випадках значення інших розрядів залишаються без змін: $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \ldots,$ $x_{r-1} = y_{r-1}$.

Етап 3. Обчислюється кількісний еквівалент $\operatorname{dec} X_j$ двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ відповідно до числової функції (1.1.2)

$$\operatorname{dec} X_j = \sum_{i=1}^{r} x_i C_{n-i}^{k-q_i} .$$

Етап 4. Виконується перетворення кількісного еквівалента $\operatorname{dec} X_j$ до його двійкового вигляду

$$D_j = \operatorname{Bin}\left(\operatorname{dec} X_j\right),$$

у такий спосіб отримуючи шуканий номер $D_j \in D[n,k] = \left\{\operatorname{Bin}\left(\overline{0, C_n^k - 1}\right)\right\}$, – стислий образ вихідної n-розрядної послідовності $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$.

Подаючи вагові коефіцієнти $C_{n-i}^{k-q_i}$ у двійковому вигляді і проводячи операції в числовій функції (1.1.2), за правилами двійкової арифметики етапи 3 і 4 моделі стиснення f_e можна сполучити.

Теорема 3.2. Усякому двійковому номеру $D_j \in D[n,k] = \left\{ \text{Bin}\left(\overline{0, C_n^k - 1} \right) \right\}$ можна поставити у взаємну однозначну відповідність єдину двійкову послідовність $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$, $Y_j \in Y[n,k]$, $j = \overline{1, C_n^k}$, складену з n розрядів y_i, сума значень яких рівна k, за допомогою відображення f_e^{-1} у два етапи:

1) обчислення значень розрядів $x_i \in \{0,1\}$ нерівномірного (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$, $X_j \in X[n,k]$, $r < n$ відповідно до рекурентного співвідношення

$$\text{sign}\left(\text{sign}\left(F(i) - \rho_i \right) + 1 \right), \tag{3.1.8}$$

де $F(1) = F_j$, $F(i+1) = F(i) - x_i \rho_i$, $\rho_i = C_{n-i}^{k-q_i}$, $F_j = \text{dec}\, D_j$;

2) перехід від двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ до двійкової послідовності $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$ за допомогою функції $Y_j = f_b^{-1}\left(X_j \right)$ вигляду

$$Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n = \left[\begin{array}{l} x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0 + +11...1 \\ x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1 + +00...0 \end{array} \right. .$$

Доведення. Для доведення істинності першого етапу, за допомогою якого виконується $\psi^{-1}: D \to X[n,k]$, продемонструємо спочатку, що для рекурентного співвідношення (3.1.8) $x_i \in \{0,1\}$. Насправді, за визначенням функції $\operatorname{sign} x$ [34] маємо:

1) якщо $F(i) \geq \rho_i$, то $x_i = 1$;

2) якщо $F(i) < \rho_i$, то $x_i = 0$.

Оскільки інших варіантів порівняння $F(i)$ і ρ_i немає, то для (3.1.8) $x_i \in \{0,1\}$.

Доведемо тепер правильність рекурентного співвідношення (3.1.8). Розкладання на вагові коефіцієнти, яке визначає числову функцію (1.1.2), на першому кроці за умови знаходженні x_1 можна подати як

$$F(1) - x_1\rho_1 = x_2\rho_2 + \ldots + x_{r-1}\rho_{r-1} + x_r\rho_r,$$

де $F(1) = F_j = \operatorname{dec} D_j$.

Позначивши $F(2) = F(1) - x_1\rho_1$, на другому кроці за умови знаходження x_2 отримуємо розкладання вигляду

$$F(2) - x_2\rho_2 = x_3\rho_3 + \ldots + x_{r-1}\rho_{r-1} + x_r\rho_r.$$

Далі, на i-му кроці за умови знаходження x_i

$$F(i) - x_i\rho_i = x_{i+1}\rho_{i+1} + \ldots + x_{r-1}\rho_{r-1} + x_r\rho_r. \qquad (3.1.9)$$

Процес віднімання з лівої і правої частин $x_i\rho_i$ (3.1.9) триватиме доти, поки $F(i) - x_i\rho_i = 0$.

Значення x_i визначає факт входження (одноразового) вагового коефіцієнта ρ_i у число F_j. Тоді з урахуванням (3.1.9) і того, що

$$F(1) = F_j = \operatorname{dec} D_j, \; F(i+1) = F(i) - x_i \rho_i, \; \rho_i = C_{n-i}^{k-q_i},$$

доходимо виразу (3.1.8).

Однозначність зіставлення чисел $F_j = \operatorname{dec} D_j$ і $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ випливає з існування та єдиності розкладання (1.1.2), яке обґрунтовано теоремою 3.1. Звідси правильність першого етапу $\psi^{-1} : D \to X[n,k]$ на основі (3.1.8) доведено.

Другий етап $f_b^{-1} : X[n,k] \to Y[n,k]$ як частину зворотного відображення $f_e^{-1} : D \to Y[n,k]$ обґрунтовує теорема 2.2. **Теорему доведено.**

Моделювання процесу відновлення f_e^{-1} двійкових рівноважних комбінацій $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$ на основі двійкової біноміальної числової функції (1.1.2) з використанням теореми 2.2 і функції (2.1.3) складається з таких етапів.

Етап 1. Виконується перетворення двійкового номера $D_j \in D[n,k] = \left\{ \operatorname{Bin}\left(\overline{0, C_n^k - 1} \right) \right\}$ стислого образу шуканої n-розрядної послідовності $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$ до його десяткового еквівалента

$$F_j = \operatorname{dec} D_j.$$

Етап 2. Проводиться обчислення розрядів $x_i \in \{0,1\}$

$$x_i = \operatorname{sign}\left(\operatorname{sign}\left(F(i) - \rho_i\right) + 1\right),$$

де $F(1) = F_j$, $F(i+1) = F(i) - x_i\rho_i$, $\rho_i = C_{n-i}^{k-q_i}$, у такий спосіб формуючи (n,k)-біноміальне число $X_j = x_1x_2...x_i...x_r$, $X_j \in X[n,k]$, $r < n$. Обчислення x_i триває доти, поки $F(i) - x_i\rho_i = 0$.

Етап 3. Визначається у двійковому (n,k)-біноміальному числі $X_j = x_1x_2...x_i...x_r$ значення останнього розряду x_r.

Етап 4. Якщо $x_r = 0$, то

$$Y_j = X_j + +11...1 = x_1x_2...x_i...x_{r-1}0 + +11...1 = y_1y_2...y_i...y_{n-1}1,$$

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1x_2...x_i...x_{r-1}0$ приєднуються одиничні розряди 11...1: $y_{r+1} = y_{r+2} = ... = y_n = 1$. В іншому разі

$$Y_j = X_j + +00...0 = x_1x_2...x_i...x_{r-1}1 + +00...0 = y_1y_2...y_i...y_{n-1}0,$$

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1x_2...x_i...x_{r-1}1$ приєднуються нульові розряди $00...0$: $y_{r+1} = y_{r+2} = ... = y_n = 0$. В обох випадках загальна кількість розрядів отриманої двійкової рівноважної комбінації Y_j повинна становити n, $Y_j \in Y[n,k]$. Водночас значення інших розрядів залишаються без змін: $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, …, $y_r = x_r$.

Для реалізації етапу 4 процесу відновлення f_e^{-1} двійкових рівноважних комбінацій $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$ на основі двійкової біноміальної числової функції (1.1.2) можна також використовувати функцію $Y_j = f_b^{-1}\left(X_j\right)$ вигляду (2.1.6), яка потребує обчислення $q < n$ або $l < n$. У цьому разі етапи 1 і 2 зберігають колишній зміст, а етапи 3 і 4 перетворюються до наступного вигляду.

Етап 3. Обчислюється у двійковому (n,k)-біноміальному числі $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ кількість $q = \sum_{i=1}^{r} x_i$ одиниць, $0 \le q \le k$.

Етап 4. Якщо $0 \le q < k$, то

$$Y_j = X_j ++ 11...1 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0 ++ 11...1 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1,$$

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ приєднуються одиничні розряди 11...1 доти, поки їх не стане $q = k$. В іншому разі

$$Y_j = X_j ++ 00...0 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1 ++ 00...0 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0,$$

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ приєднуються нульові розряди 00...0 доти, поки їх не стане $l = n - k$. В обох випадках маємо шукану рівноважну комбінацію Y_j, $Y_j \in Y[n,k]$, значення інших розрядів якої $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, …, $y_r = x_r$.

Теорема 3.3. Відображення $f_e : Y[n,k] \to D[n,k]$ є бієктивним.

Доведення. Відповідності $D_j = f_e\left(Y_j\right)$ і $Y_j = f_e^{-1}\left(D_j\right)$ є функціональні (теореми 3.1 і 3.2). Під час відображення f_e кожний елемент $Y_j \in Y\left[n,k\right]$ має єдиний образ $X_j \in X\left[n,k\right]$, який, зі свого боку, має єдиний образ $D_j \in D\left[n,k\right]$. Під час відображення f_e^{-1} кожний елемент $D_j \in D\left[n,k\right]$ має єдиний образ $X_j \in X\left[n,k\right]$, який, зі свого боку, має єдиний образ $Y_j \in Y\left[n,k\right]$. Звідси $f_e : Y\left[n,k\right] \to D\left[n,k\right]$ є взаємно однозначним, або бієктивним. **Теорему доведено.**

Результати відображень $f_e : Y\left[n,k\right] \to D\left[n,k\right]$ і, отже, $f_e^{-1} : D\left[n,k\right] \to Y\left[n,k\right]$ для випадку $n = 8$ і $k = 2$ наведено в таблиці 3.1, у нижньому рядку якої вказують довжини $L_{8,2}$ і $L_н$ двійкових біноміальних чисел X_j і номерів D_j. Значення $L_{8,2}$ визначається відповідно до (1.2.3), а значення $L_н$ обчислюється як $L_н = \left\lceil \log_2 C_8^2 \right\rceil = 5$ розрядів.

Як приклад розглянемо біноміальне нумераційне стиснення двійкової 8-розрядної рівноважної комбінації, яка має $k = 2$ одиниць, вигляду

$$Y_j = 10000100,$$

використовуючи вищенаведену модель процесу стиснення f_e на основі біноміальної числової функції (1.1.2).

Етап 1. Визначається у 8-розрядній рівноважній комбінації $Y_j = 10000100$, яка має число $k = 2$ двійкових одиниць, значення останнього розряду рівне $y_8 = 0$.

Етап 2. Оскільки $y_8 = 0$, то відповідне $(8,2)$-біноміальне число $X_j \in X[8,2]$ має вигляд

$$X_j = 10000100/00 = 100001,$$

тобто від комбінації $Y_j = 10000100$ відкидаються всі нульові розряди, починаючи з $y_8 = 0$, до появи першої двійкової одиниці $y_6 = 1$, яка являтиме собою значення останнього розряду $x_6 = y_6 = 1$ $(8,2)$-біноміального числа $X_j = 100001$. Водночас значення інших розрядів залишаються без змін: $x_1 = y_1 = 1$, $x_2 = y_2 = 0$, $x_3 = y_3 = 0$, $x_4 = y_4 = 0$, $x_5 = y_5 = 0$.

Етап 3. Обчислюється кількісний еквівалент $\operatorname{dec} X_j$ двійкового $(8,2)$-біноміального числа $X_j = 100001$ відповідно до числової функції (1.1.2) з використанням рівності (1.1.1)

$$\operatorname{dec}(100001) = \sum_{i=1}^{6} x_i C_{8-i}^{2-q_i} =$$
$$= C_{8-1}^{2-q_1} + C_{8-6}^{2-q_6} = C_7^2 + C_2^1 = 21 + 2 = 23\ .$$

Етап 4. Виконується перетворення кількісного еквівалента $\operatorname{dec}(100001) = 23$ до його двійкового вигляду

$$D_j = \operatorname{Bin}(\operatorname{dec}(100001)) = \operatorname{Bin} 23 = 10111,$$

у такий спосіб отримуючи шуканий номер із множини $D[8,2] = \left\{\operatorname{Bin}\left(\overline{0,27}\right)\right\}$ – стислий образ вихідної 8-розрядної послідовності $Y_j = 10000100$.

Таблиця 3.1 – Відповідність між $Y[8,2]$, $X[8,2]$ і двійковими номерами

№ пор.	Рівноважний код $Y[8,2]$	Множина $X[8,2]$	Двійковий номер
0	0 0 0 0 0 0 1 1	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
1	0 0 0 0 0 1 0 1	0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 1
2	0 0 0 0 0 1 1 0	0 0 0 0 0 1 1	0 0 0 1 0
3	0 0 0 0 1 0 0 1	0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 1 1
4	0 0 0 0 1 0 1 0	0 0 0 0 1 0 1	0 0 1 0 0
5	0 0 0 0 1 1 0 0	0 0 0 0 1 1	0 0 1 0 1
6	0 0 0 1 0 0 0 1	0 0 0 1 0 0 0	0 0 1 1 0
7	0 0 0 1 0 0 1 0	0 0 0 1 0 0 1	0 0 1 1 1
8	0 0 0 1 0 1 0 0	0 0 0 1 0 1	0 1 0 0 0
9	0 0 0 1 1 0 0 0	0 0 0 1 1	0 1 0 0 1
10	0 0 1 0 0 0 0 1	0 0 1 0 0 0 0	0 1 0 1 0
11	0 0 1 0 0 0 1 0	0 0 1 0 0 0 1	0 1 0 1 1
12	0 0 1 0 0 1 0 0	0 0 1 0 0 1	0 1 1 0 0
13	0 0 1 0 1 0 0 0	0 0 1 0 1	0 1 1 0 1
14	0 0 1 1 0 0 0 0	0 0 1 1	0 1 1 1 0
15	0 1 0 0 0 0 0 1	0 1 0 0 0 0 0	0 1 1 1 1
16	0 1 0 0 0 0 1 0	0 1 0 0 0 0 1	1 0 0 0 0

Продовження таблиці 3.1

№ пор.	Рівноважний код $Y[8,2]$	Множина $X[8,2]$	Двійковий номер
17	0 1 0 0 0 1 0 0	0 1 0 0 0 1	1 0 0 0 1
18	0 1 0 0 1 0 0 0	0 1 0 0 1	1 0 0 1 0
19	0 1 0 1 0 0 0 0	0 1 0 1	1 0 0 1 1
20	0 1 1 0 0 0 0 0	0 1 1	1 0 1 0 0
21	1 0 0 0 0 0 0 1	1 0 0 0 0 0 0	1 0 1 0 1
22	1 0 0 0 0 0 1 0	1 0 0 0 0 0 1	1 0 1 1 0
23	1 0 0 0 0 1 0 0	1 0 0 0 0 1	1 0 1 1 1
24	1 0 0 0 1 0 0 0	1 0 0 0 1	1 1 0 0 0
25	1 0 0 1 0 0 0 0	1 0 0 1	1 1 0 0 1
26	1 0 1 0 0 0 0 0	1 0 1	1 1 0 1 0
27	1 1 0 0 0 0 0 0	1 1	1 1 0 1 1
	$n=8$	$L_{8,2} \approx 5,71$	$L_н = 5$

Отриманий двійковий номер далі можна використовувати для зберігання в пам'яті, передання по каналу зв'язку або обчислювального оброблення. Отже, 8-розрядна послідовність $Y_j = 10000100$ перетворюється у двійкове $(8,2)$-біноміальне 6-розрядне число $X_j = 100001$ і двійковий 5-розрядний номер $D_j = 10111$, довжини яких менше, відповідно, на два та три розряди від довжини вихідної комбінації.

Тепер розглянемо зворотне перетворення f_e^{-1} за заданим двійковим номером $D_j = 10111$ відновлення двійкової рівноважної комбінації, складеної з $n = 8$ розрядів і яка містить $k = 2$ одиниць, у межах вищенаведеної моделі процесу відновлення f_e^{-1} на основі біноміальної числової функції (1.1.2).

Етап 1. Виконується перетворення двійкового номера $D_j = 10111$ з множини $D[8,2] = \left\{\mathrm{Bin}\left(\overline{0,27}\right)\right\}$, стисло-го образу вихідної 8-розрядної послідовності $Y_j = y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 y_7 y_8$ до його десяткового еквівалента

$$F_j = \mathrm{dec}(10111) = 23 .$$

Етап 2. Проводиться обчислення згідно з (3.1.8) значень розрядів $x_i \in \{0,1\}$ $(8,2)$-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$, $X_j \in X[8,2]$, $r < 8$

значення розряду x_1: $F(1) = F_j = 23$, $\rho_1 = C_{8-1}^{2-q_1} = C_7^2 = 21$,

$$x_1 = \mathrm{sign}\left(\mathrm{sign}\left(F(1) - \rho_1\right) + 1\right) =$$
$$= \mathrm{sign}\left(\mathrm{sign}(23 - 21) + 1\right) = \mathrm{sign}(1+1) = 1 ;$$

значення розряду x_2: $F(2) = F(1) - x_1\rho_1 = 23 - 1 \cdot 21 = 2 \neq 0$,

$$\rho_2 = C_{8-2}^{2-q_2} = C_{8-2}^{2-1} = C_6^1 = 6,$$

$$x_2 = \mathrm{sign}\left(\mathrm{sign}\left(F(2) - \rho_2\right) + 1\right) =$$
$$= \mathrm{sign}\left(\mathrm{sign}(2 - 6) + 1\right) = \mathrm{sign}(-1+1) = 0 ;$$

значення розряду x_3: $F(3) = F(2) - x_2\rho_2 = 2 - 0 \cdot 6 = 2 \neq 0$,

$$\rho_3 = C_{8-3}^{2-q_3} = C_{8-3}^{2-1} = C_5^1 = 5,$$

$$x_3 = \operatorname{sign}\left(\operatorname{sign}\left(F(3) - \rho_3\right) + 1\right) =$$
$$= \operatorname{sign}\left(\operatorname{sign}(2-5)+1\right) = \operatorname{sign}(-1+1) = 0\ ;$$

значення розряду x_4: $F(4) = F(3) - x_3\rho_3 = 2 - 0\cdot 5 = 2 \neq 0$,

$$\rho_4 = C_{8-4}^{2-q_4} = C_{8-4}^{2-1} = C_4^1 = 4,$$

$$x_4 = \operatorname{sign}\left(\operatorname{sign}\left(F(4) - \rho_4\right) + 1\right) =$$
$$= \operatorname{sign}\left(\operatorname{sign}(2-4)+1\right) = \operatorname{sign}(-1+1) = 0\ ;$$

значення розряду x_5: $F(5) = F(4) - x_4\rho_4 = 2 - 0\cdot 4 = 2 \neq 0$,

$$\rho_5 = C_{8-5}^{2-q_5} = C_{8-5}^{2-1} = C_3^1 = 3,$$

$$x_5 = \operatorname{sign}\left(\operatorname{sign}\left(F(5) - \rho_5\right) + 1\right) =$$
$$= \operatorname{sign}\left(\operatorname{sign}(2-3)+1\right) = \operatorname{sign}(-1+1) = 0\ ;$$

значення розряду x_6: $F(6) = F(5) - x_5\rho_5 = 2 - 0\cdot 3 = 2 \neq 0$,

$$\rho_6 = C_{8-6}^{2-q_6} = C_{8-6}^{2-1} = C_2^1 = 2,$$

$$x_6 = \operatorname{sign}\left(\operatorname{sign}\left(F(6) - \rho_6\right) + 1\right) =$$
$$= \operatorname{sign}\left(\operatorname{sign}(2-2)+1\right) = \operatorname{sign}(0+1) = 1\ .$$

Оскільки $F(6) - x_6\rho_6 = 2 - 1\cdot 2 = 0$, то на розряді $x_6 = 1$ застосування рекурентного співвідношення (3.1.8) завершується. Оскільки водночас кількість отриманих двійкових одиниць $q = k = 2$, то відповідно до системи кодоутворювальних обмежень (1.1.4) потрібно вважати

$(8,2)$-біноміальне число X_j довжини $r = 6 < 8$ сформованим

$$X_j = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 = 100001.$$

Етап 3. Визначається у $(8,2)$-біноміальному 6-розрядному числі $X_j = 100001$ значення останнього розряду $x_6 = 1$.

Етап 4. Оскільки $x_6 = 1$, то

$$Y_j = 100001 + +00 = 10000100,$$

тобто до двійкового біноміального числа $X_j = 100001$ приєднуються нульові розряди 00: $y_7 = y_8 = 0$ так, щоб загальна кількість розрядів шуканої двійкової рівноважної комбінації Y_j становило $n = 8$, $Y_j \in Y[8,2]$. Водночас значення інших розрядів залишаються без змін: $y_1 = x_1 = 1$, $y_2 = x_2 = 0$, $y_3 = x_3 = 0$, $y_4 = x_4 = 0$, $y_5 = x_5 = 0$, $y_6 = x_6 = 1$.

Унаслідок цього отримуємо шукану двійкову 8-розрядну рівноважну комбінацію $Y_j = 10000100$, яка має $k = 2$ одиниць.

3.2 Моделі узагальнених стиснення і відновлення на основі біноміальної числової функції

Відображення вигляду $f_e = \psi \circ f_b$ і $f_e^{-1} = f_b^{-1} \circ \psi^{-1}$ оперують двійковими n-розрядними послідовностями $Y_j[R_Y] \in Y$ із заданим обмеженням $R_Y = k$, тобто число k

одиниць є величиною постійною, а $Y = Y[n,k]$. Водночас потрібно врахувати, що на підставі властивостей двійкових (n,k)-біноміальних чисел (1.1.6) $k_{\min} = 1$ і $k_{\max} = n-1$. Більш загальним є випадок, коли k може набувати будь-яких значень із діапазону $0 \le k \le n$, а масив A, що стискається, являє собою множину

$$A = \bigcup_{k=0}^{n} Y[n,k] \text{ і } A_j \in A = \{0,1\}^n,\ j = \overline{1,2^n},$$

двійкових n-розрядних послідовностей A_j, для яких відсутнє обмеження за числом k одиниць [32].

З урахуванням того, що двійкові номери D_j є рівномірними за довжиною тільки для постійного k, то для однозначного відновлення $A_j \in A = \{0,1\}^n$ із номерів D_j необхідно буде додатково використовувати значення k, виражене у двійковому вигляді $\mathrm{Bin}\,k$.

Під час стиснення A_j необхідно застосовувати функцію f_w ((1.2.7), підрозділ 1.2), яка ставить у відповідність вихідній послідовності A_j вибірку (k, Y_j), де $Y_j = A_j$. Далі, якщо отримане значення k задовольняє нерівності $0 < k < n,$ то для стиснення рівноважної комбінації Y_j, відповідній A_j, використовують кодування f_e на основі біноміальної числової функції. Водночас до стиснених комбінацій для однозначного відновлення додається $\mathrm{Bin}\,k$, тобто виконується додатково кодування f_k. Якщо ж значення k задовольняє системі рівностей $(k=0) \vee (k=n),$ то кодована результуюча комбінація буде складатися тільки з $\mathrm{Bin}\, k$, тобто використовується єдиний метод кодування f_k.

Отже, розглянемо відображення вигляду

$$f_{eg} : A \to Z,$$

яке задається відповідною функцією

$$Z_j = f_{eg}\left(A_j\right),$$

де $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, $A_j \in A = \{0,1\}^n$, $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\, k, D_j\right)$ або $Z_j = \mathrm{Bin}\, k$, $Z_j \in Z$, $j = \overline{1, 2^n}$. Теорема 3.4 наводить властивості відображення f_{eg} і спосіб його реалізації.

Теорема 3.4. Будь-якій двійковій <u>послідовності</u> $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, $A_j \in A = \{0,1\}^n$, $j = \overline{1, 2^n}$ можна поставити у взаємно однозначну відповідність двійкову комбінацію $Z_j \in Z$ такого вигляду:

1) якщо $0 < k < n$, то

$$Z_j = \mathrm{Bin}\, k + +D_j, \tag{3.2.1}$$

де $k = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $D_j = f_e\left(Y_j\right)$, $Y_j \in Y[n,k] \subset A$, $D_j \in D[n,k] = \left\{\mathrm{Bin}\left(\overline{0, C_n^k - 1}\right)\right\}$;

2) в іншому разі, якщо $(k = 0) \vee (k = n)$, то

$$Z_j = \mathrm{Bin}\, k. \tag{3.2.2}$$

Доведення. Наведемо доказ від протилежного. Спочатку розглянемо пряме $f_{eg} : A \to Z$ і зворотне

$f_{eg}^{-1}: Z \to A$ відображення для першого випадку – отримання комбінації Z_j вигляду (3.2.1).

Припустимо, що за умови прямого відображення f_{eg} для A_j існують дві двійкові комбінації Z'_j і Z''_j, $Z'_j \neq Z''_j$. Нехай рівноважна комбінація Y_j є результатом дії функції f_w (1.2.7), яка відображає функціональну відповідність між A_j і $\left(k, Y_j\right)$, де $Y_j = A_j$, тобто $A_j \underset{f_w}{\rightarrow} \left(k, Y_j\right)$. Оскільки $Y_j = A_j$, то відповідно до теореми 3.1 у комбінаціях вигляду

$$Z'_j = \operatorname{Bin} k' + +D'_j \text{ і } Z''_j = \operatorname{Bin} k'' + +D''_j$$

не можуть бути різними D'_j і D''_j, тобто $D'_j = D''_j$. На підставі нашого припущення від зворотного має бути $\operatorname{Bin} k' \neq \operatorname{Bin} k''$, але A_j не може мати два різних значення числа k одиниць, тобто $\operatorname{Bin} k' = \operatorname{Bin} k''$. Унаслідок цього $Z'_j = Z''_j = Z_j$ і наше припущення для прямого відображення f_{eg} є неправильним. Отже, послідовності A_j можна поставити у відповідність єдину комбінацію Z_j вигляду (3.2.1).

Тепер припустимо, що за умови зворотного відображення f_{eg}^{-1} для Z_j існують дві двійкові послідовності A'_j і A''_j, $A'_j \neq A''_j$. Згідно з теоремою 3.2 двійковому номеру D_j можна поставити у відповідність єдину комбінацію Y_j. На підставі зворотної функції f_w^{-1}, маємо $\left(k, Y_j\right) \underset{f_w^{-1}}{\rightarrow} A_j$ і $Y_j = A_j$, тобто $A'_j = A''_j = A_j$. Тоді наше припущення про різні послідовності A'_j і A''_j для комбінації Z_j і випадку (3.2.1) також є неправильним. Отже, для (3.2.1) за умови прямого f_{eg} і зворотного f_{eg}^{-1} відображеннях існує взаємна однозначна відповідність між A_j і Z_j.

Для другого випадку (3.2.2) взаємна однозначна відповідність Z_j і A_j обумовлюється одиничністю значень $k=0$ або $k=n$ для A_j, що складаються з одних тільки нулів або одиниць відповідно.

Очевидно, що справедливість доказування не зміниться і в разі розгляду більш ніж двох різних Z'_j, Z''_j, … або A'_j, A''_j, … . Отже, є взаємна однозначна відповідність між A_j і Z_j за умови прямого f_{eg} і зворотного f_{eg}^{-1} відображень. **Теорему доведено.**

Наслідок. Відображення $f_{eg} : A \to Z$ є бієктивним.

Насправді, кожен елемент A_j має єдиний образ, а кожен елемент Z_j – єдиний прообраз для всіх $A_j \in A$ і $Z_j \in Z$. Звідси випливає бієктивність відображення f_{eg}.

Способи практичної реалізації відображень f_{eg} і f_{eg}^{-1}, указаних у теоремі 3.4, можуть бути різними. Вибрані підходи до побудови f_{eg} і f_{eg}^{-1}, розроблені методи кодування і моделі процесів, які формуються для них, у кінцевому підсумку впливають на швидкодію та обсяг апаратно-програмних витрат за умови практичної реалізації пропонованого узагальненого методу стиснення f_{eg} двійкових послідовностей на основі біноміальної числової функції для випадку, коли кількість k двійкових одиниць може набувати будь-яких значень у діапазоні $0 \le k \le n$.

Визначення 3.2. *Узагальненим методом стиснення f_{eg} на основі біноміальної числової функції називається відображення*

$$f_{eg} : A \to Z ,$$

яке задається складною функцією вигляду

$$f_{eg} = \begin{cases} f_k \circ f_w, \ (k=0) \vee (k=n) \\ f_k \circ f_e \circ f_w, \ 0 < k < n , \end{cases} \tag{3.2.3}$$

де A – множина вихідних двійкових n-розрядних послідовностей A_j

$$A_j \in A = \{0,1\}^n , \ j = \overline{1, 2^n} , \ A = \bigcup_{k=0}^{n} Y[n,k],$$

$$Y[n,k'] \cap Y[n,k''] = \varnothing , \ k' \neq k'' , \ 0 \le k', k'' \le n ;$$

Z *– множина результуючих послідовностей Z_j*

$$Z = Z_o \cup Z_e ,$$

$$Z_o = Q \times \varnothing = \left\{ Z_j \,/\, Z_j = \mathrm{Bin}\, k, (k=0) \vee (k=n) \right\},$$

$$Z_e = Q \times D[n,k] = \left\{ Z_j \,/\, Z_j = \left(\mathrm{Bin}\, k, D_j \right), 0 < k < n \right\},$$

$$Q = \left\{ \mathrm{Bin}\, k \,/\, 0 \le k \le n \right\} , \ D_j \in D[n,k] = \left\{ \mathrm{Bin}\left(\overline{0, C_n^k - 1} \right) \right\};$$

f_k *– функція $Z_j = f_k\left(Y_j\right)$, яка ставить у відповідність рівноважній комбінації $Y_j = A_j$ двійкову запис $\mathrm{Bin}\, k$ числа k одиниць, де $(k=0) \vee (k=n)$, і визначає відображення вигляду*

$$f_k : Y[n,k] \to Z_o ,$$

або функція $Z_j = f_k\left(D_j\right)$*, яка ставить у відповідність двійковому номеру* D_j *результуючу послідовність* $Z_j = \mathrm{Bin}\,k + +D_j$*, якщо* $0 < k < n$*, і визначає відображення вигляду*

$$f_k : D\left[n,k\right] \to Z_e ;$$

$f_e = \psi \circ f_b$ *– складна функція* $D_j = f_e\left(Y_j\right) = \psi\left(f_b\left(Y_j\right)\right)$*, яка ставить у відповідність рівноважній комбінації* Y_j *на основі біноміальної числової функції її двійковий номер* $D_j \in D\left[n,k\right]$ *і визначає відображення вигляду*

$$f_e : Y\left[n,k\right] \to D\left[n,k\right];$$

f_w *– функція* $Y_j = f_w\left(A_j\right)$*, яка ставить у відповідність вихідній послідовності* A_j *упорядковану вибірку вигляду* $\left(k, Y_j\right)$*, де* $Y_j = A_j$*, і визначає відображення вигляду*

$$f_w : A \to M ,$$

$$M = \left\{\left(k, Y_j\right) / \, 0 < k < n, Y_j \in Y\left[n,k\right]\right\}.$$

На підставі визначення 3.2 і виразу (3.2.3) складну функцію, що реалізує відображення $f_{eg} : A \to Z$, можна записати як

$$Z_j = f_{eg}\left(A_j\right) = \begin{cases} f_k\left(f_w\left(A_j\right)\right), \ (k=0) \vee (k=n) \\ f_k\left(f_e\left(f_w\left(A_j\right)\right)\right), \ 0 < k < n \ . \end{cases} \qquad (3.2.4)$$

Зі свого боку, зворотне відображення $f_{eg}^{-1} : Z \to A$, яке задається зворотною складною функцією

$$f_{eg}^{-1} = \begin{cases} f_w^{-1} \circ f_k^{-1}, \ (k=0) \vee (k=n) \\ f_w^{-1} \circ f_e^{-1} \circ f_k^{-1}, \ 0 < k < n \ , \end{cases} \qquad (3.2.5)$$

являє собою відновлення з урахуванням наявного значення k вихідних двійкових послідовностей A_j. У разі $0 < k < n$ відновлення A_j здійснюється на основі $\mathrm{Bin}\, k$ і двійкових номерів $D_j \in D[n,k]$ із застосуванням біноміальних чисел $X_j \in X[n,k]$ за умови переходу від номера D_j до рівноважної комбінації Y_j, а в разі $k=0$ або $k=n$ – на основі $\mathrm{Bin}\, k$ за допомогою генерування n нулів або одиниць відповідно. Такий вид відновлення будемо називати узагальненим на основі біноміальної числової функції. На підставі (3.2.5) складну функцію, що реалізує зворотне відображення $f_{eg}^{-1} : Z \to A$, можна виразити ще як

$$A_j = f_{eg}^{-1}\left(Z_j\right) =$$

$$= \begin{cases} f_w^{-1}\left(f_k^{-1}\left(Z_j\right)\right), \ (k=0) \vee (k=n) \\ f_w^{-1}\left(f_e^{-1}\left(f_k^{-1}\left(Z_j\right)\right)\right), \ 0 < k < n \ . \end{cases} \qquad (3.2.6)$$

Способи реалізації f_e і f_e^{-1} для узагальнених стиснення f_{eg} (3.2.4) і відновлення f_{eg}^{-1} (3.2.6) на підобласті визначення $0 < k < n$ є аналогічними способам побудови цих функцій (теореми 3.1 і 3.2) для методів стиснення і відновлення рівноважних комбінацій на основі біноміальної числової функції.

Способи реалізації складних функцій (3.2.4) і (3.2.6) на підобласті визначення $(k=0)\vee(k=n)$ визначаються простою операцією обчислення k одиниць за умови стиснення f_{eg} і формуванням вихідної нульової або одиничної послідовності A_j за умови відновлення f_{eg}^{-1}.

З теореми 3.4, що обґрунтовує взаємну однозначність відображень f_{eg} і f_{eg}^{-1}, а також із теорем 3.1 і 3.2, які доводять взаємну однозначність відображень f_e і f_e^{-1}, які лежать в основі f_{eg} і f_{eg}^{-1} відповідно, випливають моделі процесів узагальнених стиснення f_{eg} і відновлення f_{eg}^{-1} на основі біноміальної числової функції.

Моделювання процесу стиснення f_{eg} двійкових послідовностей $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, $A_j \in A = \{0,1\}^n$, $j = \overline{1, 2^n}$ здійснюється на основі теорем 3.1 і 3.4, функції (2.1.1) і складається з таких етапів.

Етап 1. Визначається кількість s розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\,k$ числа k одиниць, $0 \le k \le n$, вихідної n-розрядної послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$

$$s = \left\lceil \log_2(n+1) \right\rceil.$$

Етап 2. Проводиться обчислення числа k двійкових одиниць у вихідній n-розрядній послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$

$$k = \sum_{i=1}^{n} a_i ,$$

у такий спосіб реалізуючи функцію $f_w\left(A_j\right)=\left(k,Y_j\right)$ і визначаючи клас $Y\left[n,k\right]$ рівноважних комбінацій, до якого належить $Y_j \in Y\left[n,k\right]$, $Y_j = A_j$.

Етап 3. Виконується перетворення числа k одиниць до його двійкового вигляду $\mathrm{Bin}\,k$, що складається із s розрядів.

Етап 4. Якщо число k задовольняє системі рівностей $(k=0)\vee(k=n)$, то результуючою буде комбінація вигляду $Z_j = \mathrm{Bin}\,k$, $Z_j \in Z_o$. В іншому разі наявне значення n і обчислене значення k являють собою параметри (n,k)-біноміальної системи числення і здійснюється перехід до подальших етапів для реалізації кодування $f_k\left(f_e\left(Y_j\right)\right)=Z_j$, $Z_j \in Z_e$.

Етап 5. Обчислюється кількість m розрядів для двійкового подання номера $D_j \in D\left[n,k\right]= =\left\{\mathrm{Bin}\left(\overline{0,C_n^k-1}\right)\right\}$, відповідного $Y_j \in Y\left[n,k\right]$

$$m=\left\lceil \log_2 C_n^k \right\rceil.$$

Етап 6. Визначається в n-розрядній рівноважній комбінації $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$, що має число k одиниць, значення останнього розряду y_n.

Етап 7. Якщо $y_n = 0$, то

$$X_j = Y_j/00...0 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1}0/00...0 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1}1,$$

тобто від комбінації $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1}0$ відкидаються всі нульові розряди, починаючи з $y_n = 0$, до появи першої двійкової одиниці $y_r = 1$, котра являтиме собою значення останнього розряду $x_r = y_r = 1$ (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1$. В іншому разі

$$X_j = Y_j / 11...1 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1 / 11...1 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0,$$

тобто від комбінації $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1$ відкидаються всі одиничні розряди, починаючи з $y_n = 1$, до появи першого двійкового нуля $y_r = 0$, котрий являтиме собою значення останнього розряду $x_r = y_r = 0$ (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0$. Водночас в обох випадках значення інших розрядів залишаються без змін: $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \ldots,$ $x_{r-1} = y_{r-1}$.

Етап 8. Обчислюється кількісний еквівалент $\operatorname{dec} X_j$ двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ відповідно до числової функції (1.1.2)

$$\operatorname{dec} X_j = \sum_{i=1}^{r} x_i C_{n-i}^{k-q_i} .$$

Етап 9. Виконується перетворення кількісного еквівалента $\operatorname{dec} X_j$ до його двійкового вигляду, що складається з m розрядів

$$D_j = \operatorname{Bin}\left(\operatorname{dec} X_j\right),$$

у такий спосіб отримуючи шуканий номер $D_j \in D[n,k] = \left\{\operatorname{Bin}\left(\overline{0, C_n^k - 1}\right)\right\}$, – стислий образ вихідної n-розрядної послідовності $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$.

Етап 10. Виконується конкатенація двійкових значення $\mathrm{Bin}\,k$ і номера D_j, тобто кодування вигляду $f_k\left(D_j\right)=Z_j$ для випадку $0<k<n$

$$Z_j=\mathrm{Bin}\,k++D_j,$$

у такий спосіб отримуючи результуючу комбінацію $Z_j \in Z_e$.

У моделі стиснення f_{eg} можна поєднати етапи 2 і 3 за умови використання двійкового рахунку, а також етапи 8 і 9 за умови подання вагових коефіцієнтів $C_{n-i}^{k-q_i}$ у двійковому вигляді і проведення операцій у біноміальній числовій функції (1.3.2) за правилами двійкової арифметики.

Моделювання процесу відновлення f_{eg}^{-1} послідовностей $A_j=a_1a_2...a_i...a_n$, $A_j \in A=\{0,1\}^n$, $j=\overline{1,2^n}$ з комбінацій-образів Z_j, $Z_j \in Z_o \cup Z_e$ здійснюється на основі теорем 3.2 і 3.4, функції (2.1.3) і складається з таких етапів.

Етап 1. Визначається кількість s розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\,k$ числа k одиниць, $0 \le k \le n$, відновлюваної n-розрядної послідовності $A_j=a_1a_2...a_i...a_n$

$$s=\left\lceil \log_2\left(n+1\right)\right\rceil.$$

Етап 2. Здійснюється декатенація s розрядів, починаючи з першого розряду комбінації Z_j

$$\mathrm{Bin}\,k=Z_j/D_j \text{ або } \mathrm{Bin}\,k=Z_j,$$

у такий спосіб витягується $\mathrm{Bin}\,k=z_1z_2...z_s$ зі стислого образу Z_j, що відповідає шуканій n-розрядній послідовності A_j. Остання рівність є випадком, коли тільки $\mathrm{Bin}\,k$ становить образ нульової або одиничної A_j. Отже, реалізується декодування $f_k^{-1}\left(Z_j\right)$.

Етап 3. Виконується перетворення двійкового значення $\mathrm{Bin}\,k$ до його десяткового еквівалента

$$k = \mathrm{dec}\left(\mathrm{Bin}\,k\right).$$

Етап 4. Якщо для значення k виконується $\left(k=0\right)\vee\left(k=n\right)$, то комбінація, що перетворюється, має вигляд $Z_j = \mathrm{Bin}\,k$ і тоді формується вихідна послідовність

$$A_j = f_{eg}^{-1}\left(Z_j\right) = f_w^{-1}\left(f_k^{-1}\left(Z_j\right)\right) = f_w^{-1}\left(\mathrm{Bin}\,n\right) = 11...1$$

або

$$A_j = f_{eg}^{-1}\left(Z_j\right) = f_w^{-1}\left(f_k^{-1}\left(Z_j\right)\right) = f_w^{-1}\left(\mathrm{Bin}\,0\right) = 00...0\,.$$

В іншому разі комбінація має вигляд $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\,k, D_j\right)$, а значення n і k являють собою параметри двійкової $\left(n,k\right)$-біноміальної системи числення. Далі здійснюється перехід до подальших етапів для реалізації декодування вигляду

$$f_{eg}^{-1}\left(Z_j\right) = f_w^{-1}\left(\left(k, Y_j\right)\right) =$$
$$= f_w^{-1}\left(f_e^{-1}\left(D_j\right)\right) = f_w^{-1}\left(f_b^{-1}\left(\psi^{-1}\left(D_j\right)\right)\right)\,.$$

Етап 5. Обчислюється кількість m розрядів для двійкового подання номера $D_j \in D\left[n,k\right] =$ $= \left\{\mathrm{Bin}\left(\overline{0, C_n^k - 1}\right)\right\}$, відповідного $Y_j \in Y\left[n,k\right]$

$$m = \left\lceil \log_2 C_n^k \right\rceil.$$

Етап 6. Здійснюється декатенація m розрядів, починаючи з $(s+1)$-го розряду комбінації Z_j

$$D_j = Z_j / \mathrm{Bin}\, k ,$$

у такий спосіб витягується двійковий номер D_j зі стислого образу Z_j, відповідного рівноважній комбінації Y_j.

Етап 7. Виконується перетворення двійкового номера $D_j \in D[n,k] = \left\{ \mathrm{Bin}\left(\overline{0, C_n^k - 1} \right) \right\}$ стислого образу n-розрядної послідовності $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$ до його десяткового еквівалента

$$F_j = \mathrm{dec}\, D_j .$$

Етап 8. Обчислюються значення розрядів $x_i \in \{0,1\}$

$$x_i = \mathrm{sign}\left(\mathrm{sign}\left(F(i) - \rho_i \right) + 1 \right),$$

де $F(1) = F_j$, $F(i+1) = F(i) - x_i \rho_i$, $\rho_i = C_{n-i}^{k-q_i}$, у такий спосіб формуючи (n,k)-біноміальне число $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$, $X_j \in X[n,k]$, $r < n$. Обчислення x_i триває доти, поки $F(i) - x_i \rho_i = 0$.

Етап 9. Визначається у двійковому (n,k)-біноміальному числі $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ значення останнього розряду x_r.

Етап 10. Якщо $x_r = 0$, то

$$Y_j = X_j + +11...1 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0 + +11...1 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1,$$

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0$ приєднуються одиничні розряди $11...1$: $y_{r+1} = y_{r+2} = ... = y_n = 1$. В іншому разі

$Y_j = X_j + +00...0 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1 + +00...0 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0$,

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1$ приєднуються нульові розряди $00...0$: $y_{r+1} = y_{r+2} = ... = y_n = 0$. В обох випадках загальна кількість розрядів отриманої двійкової рівноважної комбінації Y_j повинно становити n, $Y_j \in Y[n,k]$. Водночас значення інших розрядів залишаються без змін: $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, …, $y_r = x_r$. Унаслідок $f_w^{-1}((k,Y_j)) = A_j$ отримуємо шукану n-розрядну послідовність $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, де $A_j = Y_j$ і $a_1 = y_1$, $a_2 = y_2$, …, $a_n = y_n$.

Для реалізації етапу 10 процесу відновлення f_{eg}^{-1} рівноважних комбінацій $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$ на основі двійкових (n,k)-біноміальних чисел X_j можна також використовувати функцію $Y_j = f_b^{-1}(X_j)$ вигляду (2.1.6), яка потребує обчислення $q < n$ або $l < n$. У цьому разі етапи 1–8 зберігають свій колишній зміст, а етапи 9 і 10 перетворюються до наступного вигляду.

Етап 9. Обчислюється у двійковому (n,k)-біноміальному числі $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$, кількість $q = \sum_{i=1}^{r} x_i$ одиниць, $0 \le q \le k$.

Етап 10. Якщо $0 \le q < k$, то

$Y_j = X_j + +11...1 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0 + +11...1 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1$, тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ приєднуються одиничні розряди 11...1 доти, поки їх не стане $q = k$. В іншому разі

$$Y_j = X_j + +00...0 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1 + +00...0 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0,$$

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ приєднуються нульові розряди 00...0 доти, поки їх не стане $l = n - k$. В обох випадках маємо двійкову рівноважну комбінацію Y_j, $Y_j \in Y[n,k]$, значення інших розрядів якої $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, …, $y_r = x_r$. Унаслідок $f_w^{-1}((k, Y_j)) = A_j$ отримуємо шукану n-розрядну послідовність $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, де $A_j = Y_j$ і $a_1 = y_1$, $a_2 = y_2$, …, $a_n = y_n$.

Під час виконання операцій порівняння над двійковими числами етапи 3 і 4 в моделі процесу відновлення f_{eg}^{-1} можна сполучити. Аналогічно поєднуються етапи 7 і 8, якщо здійснювати обчислення значень розрядів x_i двійкового (n,k)-біноміального числа X_j за правилами двійкової арифметики.

З метою зменшення часу відновлення A_j операції обчислення в етапах 1 і 5 можна замінити на операції пошуку значень s і m у таблицях із довільним доступом, у яких залежно від k і n містяться шукані значення чисел розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\, k$ і D_j.

Деякі результати розглянутого відображення $f_{eg} : A \to Z$ і, отже, $f_{eg}^{-1} : Z \to A$ для $n = 24$, де $A_j \in A = \{0,1\}^{24}$, $j = \overline{1, 2^{24}}$, наведені в таблиці 3.2. Якщо

$0<k<23$, то застосовується складна функція кодування $f_k \circ f_e \circ f_w$, в іншому разі, тобто за умови $(k=0)\vee(k=24)$ – складна функція кодування $f_k \circ f_w$. Відношення довжин двійкового подання A_j і Z_j для цієї таблиці змінюється в межах від 0,89 до 4,8, а їхнє середнє значення для всієї розглянутої таблиці становить приблизно 2,16. Для кожної послідовності A_j в таблиці 3.2 вказані як відповідне двійкове $(24,k)$-біноміальне число X_j, що використовується за умови переходу до номера, так і сам результуючий номер D_j.

Як приклад розглянемо узагальнене нумераційне стиснення двійкової 24-розрядної послідовності вигляду

$$A_j = 000000001000011000000000,$$

використовуючи вищенаведену модель процесу стиснення f_{eg} на основі біноміальної числової функції (1.1.2).

Етап 1. Визначається кількість s розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\,k$ числа k одиниць, $0 \le k \le 24$, вихідної 24-розрядної послідовності $A_j = 000000001000011000000000$

$$s = \lceil \log_2 25 \rceil = 5.$$

Етап 2. Проводиться обчислення числа k двійкових одиниць у вихідній 24-розрядній послідовності $A_j = 000000001000011000000000$

$$k = \sum_{i=1}^{24} a_i = 3,$$

у такий спосіб реалізуючи функцію $f_w(A_j) = (k, Y_j)$ і визначаючи клас рівноважних комбінацій $Y[24,3]$, до якого належить $Y_j = A_j$, $Y_j \in Y[24,3]$.

Таблиця 3.2 – Відповідність f_{eg} між деякими A_j і Z_j за умови $n = 24$

Двійкова послідовність A_j	**Двійкова комбінація Z_j**	
	Bin k	**Число X_j або пустий рядок** / **Номер D_j або пустий рядок**
000000000000000000000000	00000	
000000000000000000001001	00010	00000000000000000000100
		000000011
000000001000011000000000	00011	000000001000011
		00111111101
001100001110011100100000	01001	0011000011100111001
		001101001001101101000
011100010000000000000000	00100	01110001
		10001010001011
011111011001010000101100	01100	0111110110010100001011
		0101000110100101110100
100000000000000000000000	00001	1
		10111
111000010001110111111111	10000	111000010001110
		10000010000001000000
111111111111111111111110	10111	11111111111111111111111
		10111
111111111111111111111111	11000	

Етап 3. Виконується перетворення числа $k=3$ одиниць до його двійкового вигляду $\mathrm{Bin}\,3=00011$, що складається із $s=5$ розрядів.

Етап 4. Оскільки число $k=3$ не задовольняє системі рівностей $(k=0)\vee(k=24)$, то наявне значення $n=24$ та обчислене значення $k=3$ являють собою параметри двійкової $(24,3)$-біноміальної системи числення, що генерує відповідне $(24,3)$-біноміальне число $X_j \in X[24,3]$, і здійснюється перехід до подальших етапів для реалізації $f_k\left(f_e\left(Y_j\right)\right)=Z_j$, $Z_j \in Z_e$.

Етап 5. Обчислюється кількість m розрядів для двійкового подання номера $D_j \in D[24,3]= =\left\{\mathrm{Bin}\left(\overline{0, C_{24}^3-1}\right)\right\}$, відповідного $Y_j \in Y[24,3]$

$$m=\left\lceil \log_2 C_{24}^3 \right\rceil=\left\lceil \log_2 2024 \right\rceil=11.$$

Етап 6. Визначається у 24-розрядній рівноважній комбінації $Y_j=000000001000011000000000$, яка має число $k=3$ одиниць, значення останнього розряду $y_{24}=0$.

Етап 7. Оскільки $y_{24}=0$, то відповідне $(24,3)$-біноміальне число $X_j \in X[24,3]$ має вигляд

$$X_j=000000001000011000000000/000000000= \\ =000000001000011,$$

тобто від комбінації $Y_j=000000001000011000000000$ відкидаються всі нульові розряди, починаючи з $y_{24}=0$, до появи першої одиниці $y_{15}=1$, яка являтиме собою значення останнього розряду $x_{15} = y_{15} = 1$ $(24,3)$-біноміального числа $X_j = 000000001000011$. Водночас значення інших розрядів залишаються без змін, тобто $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = y_2 = 0$, …, $x_{14} = y_{14} = 1$.

Етап 8. Обчислюється кількісний еквівалент $\operatorname{dec} X_j$ двійкового $(24,3)$-біноміального числа $X_j = 000000001000011$ відповідно до функції (1.1.2)

$$\operatorname{dec}(000000001000011) =$$
$$= \sum_{i=1}^{15} x_i C_{24-i}^{3-q_i} = C_{15}^{3} + C_{10}^{2} + C_{9}^{1} = 455 + 45 + 9 = 509 .$$

Етап 9. Виконується перетворення кількісного еквівалента $\operatorname{dec}(000000001000011) = 509$ до двійкового вигляду, що складається з $m = 11$ розрядів

$$D_j = \operatorname{Bin}\left(\operatorname{dec}(000000001000011)\right) =$$
$$= \operatorname{Bin} 509 = 00111111101 ,$$

у такий спосіб маємо шуканий номер $D_j \in D[24,3] = \left\{ \operatorname{Bin}\left(\overline{0, C_{24}^{3} - 1} \right) \right\}$ – стислий образ рівноважної 24-розрядної комбінації $Y_j = 000000001000011000000000$.

Етап 10. Виконується конкатенація двійкових значення $\operatorname{Bin} 3 = 00011$ і номера $D_j = \operatorname{Bin} 509 = 00111111101$, тобто кодування вигляду $f_k\left(D_j\right) = Z_j$ для випадку $0 < k < 24$

$$Z_j = 00011 + +00111111101 = 0001100111111101,$$

у такий спосіб отримуючи результуючу комбінацію $Z_j \in Z_e$.

Тепер розглянемо приклад узагальненого нумераційного відновлення двійкової 24-розрядної послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_{24}$ (значення $n = 24$ є попередньо відомим) з комбінації-образу

$$Z_j = 0001100111111101,$$

використовуючи вищенаведену модель процесу відновлення f_{eg}^{-1} на основі числової функції (1.1.2).

Етап 1. Визначається кількість s розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\, k$ числа k одиниць, $0 \le k \le 24$, відновлюваної 24-розрядної послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_{24}$

$$s = \lceil \log_2 25 \rceil = 5.$$

Етап 2. Здійснюється декатенація $s = 5$ розрядів, починаючи з першого розряду комбінації Z_j, у такий спосіб витягується

$$\mathrm{Bin}\, k = 00011,$$

зі стислого образу Z_j, відповідного шуканій 24-розрядній послідовності A_j. Отже, реалізується $f_k^{-1}\left(Z_j\right) = \mathrm{Bin}\, k$.

Етап 3. Виконується перетворення двійкового значення $\mathrm{Bin}\, k = 00011$ до його десяткового еквівалента

$$k = \mathrm{dec}\left(00011\right) = 3.$$

Етап 4. Оскільки для значення k не виконується $\left(k = 0\right) \vee \left(k = 24\right)$, то комбінація має вигляд $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\, 3, D_j\right)$, а значення $n = 24$ і $k = 3$ являють собою параметри двійкової $\left(24, 3\right)$-біноміальної системи числення. Далі здійснюється перехід до подальших етапів для реалізації декодування вигляду

$$f_{bg}^{-1}\left(Z_j\right) = f_w^{-1}\left(\left(k, Y_j\right)\right) =$$
$$= f_w^{-1}\left(f_e^{-1}\left(D_j\right)\right) = f_w^{-1}\left(f_b^{-1}\left(\psi^{-1}\left(D_j\right)\right)\right),$$

тобто декатенації двійкових запису $\mathrm{Bin}\,3 = 00011$ і номера D_j із наявної комбінації $Z_j = 0001100111111101$, отримання з номера D_j двійкового $(24,3)$-біноміального числа X_j, формування рівноважної комбінації $Y_j \in Y[24,3]$, яка має $k = 3$ двійкових одиниць, і на її основі формування вихідної двійкової послідовності A_j.

Етап 5. Обчислюється кількість m розрядів для двійкового подання номера $D_j \in D[24,3] = = \left\{\mathrm{Bin}\left(\overline{0, C_{24}^3 - 1}\right)\right\}$, відповідного $Y_j \in Y[24,3]$,

$$m = \left\lceil \log_2 C_{24}^3 \right\rceil = \lceil \log_2 2024 \rceil = 11.$$

Етап 6. Здійснюється декатенація $m = 11$ розрядів, починаючи з 6-го розряду комбінації $Z_j = 0001100111111101$

$$D_j = Z_j / 00011 = 00111111101,$$

так витягується двійковий номер $D_j = 00111111101$ зі стислого образу $Z_j = 0001100111111101$, відповідного 24-розрядній рівноважній комбінації $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_{24}$.

Етап 7. Виконується перетворення двійкового номера $D_j = 00111111101$ до його десяткового еквівалента

$$F_j = \mathrm{dec}\left(00111111101\right) = 509\,.$$

Етап 8. Обчислюються значення розрядів $x_i \in \{0,1\}$ $(24,3)$-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$, $X_j \in X[24,3]$, $r < 24$:

значення розряду x_1

$$F(1) = F_j = 509\,,\ \rho_1 = C_{24-1}^{3-q_1} = C_{23}^{3} = 1771$$

$$x_1 = \mathrm{sign}\left(\mathrm{sign}\left(F(1) - \rho_1\right) + 1\right) =$$
$$= \mathrm{sign}\left(\mathrm{sign}\left(509 - 1771\right) + 1\right) = \mathrm{sign}\left(-1 + 1\right) = 0\ ;$$

значення розряду x_2

$$F(2) = F(1) - x_1\rho_1 = 509 - 0 \cdot 1771 = 509 \neq 0\,,$$

$$\rho_2 = C_{24-2}^{3-q_2} = C_{22}^{3} = 1540\,,$$

$$x_2 = \mathrm{sign}\left(\mathrm{sign}\left(F(2) - \rho_2\right) + 1\right) =$$
$$= \mathrm{sign}\left(\mathrm{sign}\left(509 - 1540\right) + 1\right) = \mathrm{sign}\left(-1 + 1\right) = 0\ ;$$

значення розряду x_3

$$F(3) = F(2) - x_2\rho_2 = 509 - 0 \cdot 1540 = 509 \neq 0\,,$$

$$\rho_3 = C_{24-3}^{3-q_3} = C_{21}^{3} = 1330\,,$$

$$x_3 = \mathrm{sign}\left(\mathrm{sign}\left(F(3) - \rho_3\right) + 1\right) =$$
$$= \mathrm{sign}\left(\mathrm{sign}\left(509 - 1330\right) + 1\right) = \mathrm{sign}\left(-1 + 1\right) = 0\ ;$$

далі аналогічно здійснюється обчислення значень розрядів $x_4 = x_5 = ... = x_8 = 0$, $x_9 = 1$, $x_{10} = x_{11} = x_{12} = ... = x_{13} = 0$;

$x_{14} = x_{15} = 1$. Оскільки $F(15) - x_{15}\rho_{15} = 9 - 1 \cdot 9 = 0,$ то на розряді $x_{15} = 1$ застосування рекурентного співвідношення (3.1.8) закінчується. Оскільки водночас кількість отриманих одиниць $q = k = 3$, то згідно із системою кодоутворювальних обмежень (1.1.4) потрібно вважати $(24,3)$-біноміальне число X_j довжини $r = 15 < 24$ сформованим

$$X_j = x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{15} = 000000001000011.$$

Етап 9. Визначається у $(24,3)$-біноміальному числі $X_j = 000000001000011$ останній розряд $x_{15} = 1$.

Етап 10. Оскільки $x_{15} = 1$, то

$$Y_j = X_j + +000000000 = 000000001000011 + +000000000 = \\ = 000000001000011000000000 ,$$

тобто до двійкового $(24,3)$-біноміального числа $X_j = 000000001000011$ приєднуються нульові розряди 000000000: $y_{16} = y_{17} = \ldots = y_{24} = 0$. Водночас загальна кількість розрядів одержуваної двійкової рівноважної комбінації Y_j повинна становити $n = 24$, $Y_j \in Y[24,3]$. Значення інших розрядів залишаються без змін: $y_1 = x_1 = 0$, $y_2 = x_2 = 0$, …, $y_{15} = x_{15} = 1$. Унаслідок $f_w^{-1}\left(\left(3, Y_j\right)\right) = A_j$ отримуємо шукану 24-розрядну послідовність

$$A_j = 000000001000011000000000,$$

де $A_j = Y_j$ і $a_1 = y_1 = 0$, $a_2 = y_2 = 0$, …, $a_{24} = y_{24} = 0$.

3.3 Метод оцінювання меж застосування стиснення на основі біноміальної числової функції

Області застосування будь-якого методу стиснення інформації визначається насамперед тим, що довжина результуючого стисненого образу повинна бути менше, ніж довжина вихідної інформаційної послідовності [5–7]. З метою підвищення ефективності застосування методу нумераційного стиснення f_e на основі біноміальної числової функції необхідно виконати такі завдання:

1) визначення області застосування f_e для випадку, коли k є величиною постійною, а вихідний масив, який стискається, являє собою масив двійкових n-розрядних кодів-сполучень Y_j, які задовольняють обмеженню $R_Y = k$, тобто масив рівноважних комбінацій $Y_j \in Y\left[n,k\right]$;

2) визначення області застосування f_e для випадку, коли k може набувати будь-яких значень із заданого діапазону $0 \le k \le n$, а вихідний масив, який стискається, являє собою масив двійкових n-розрядних кодів-сполучень Y_j з різними значеннями обмежень $R_Y = k$.

Для нумераційного стиснення f_e двійкової n-розрядної послідовності $Y_j \in Y\left[n,k\right]$ у розв'язку першого завдання йдеться про виконання такої нерівності:

$$\left|D_j\right| < n, \qquad (3.3.1)$$

де $\left|D_j\right|$ – довжина результуючого стислого образу D_j. Розгляд рішень для (3.3.1) необхідно проводити для $0 < k < n$, зважаючи на те, що за умови $k = 0$ або $k = n$ існує єдина послідовність, що має всі нулі або всі одиниці. Унаслідок її єдиності така послідовність не містить інформації.

На підставі того, що кількість рівноважних комбінацій $Y_j \in Y[n,k]$ становить C_n^k [4; 33; 34], можна записати

$$\left|D_j\right| = \left\lceil \log_2 C_n^k \right\rceil \tag{3.3.2}$$

і, отже, (3.3.1) матиме вигляд $\left\lceil \log_2 C_n^k \right\rceil < n$.

Теорема 3.5. Для будь-яких значень $0 \le k \le n$ виконується нерівність

$$\left\lceil \log_2 C_n^k \right\rceil < n. \tag{3.3.3}$$

Доведення. З огляду на те, що [16; 17; 34]

$$\left\lceil \log_2 C_n^k \right\rceil = \left\lfloor \log_2 C_n^k \right\rfloor + 1, \tag{3.3.4}$$

нерівність (3.3.3) подамо як

$$\left\lfloor \log_2 C_n^k \right\rfloor + 1 < n. \tag{3.3.5}$$

Відомо також $\left\lfloor \log_2 C_n^k \right\rfloor \le \log_2 C_n^k$. Отже, доказ тільки посилиться, якщо буде доведено нерівність вигляду

$$\log_2 C_n^k + 1 < n \text{ або } \log_2 C_n^k < n - 1. \tag{3.3.6}$$

Виконаємо над лівою і правою частинами останньої нерівності операцію потенціонування

$$C_n^k < 2^{n-1}. \tag{3.3.7}$$

На підставі відомих [16; 17; 25] рівностей

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^n =$$
$$= C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots + C_n^{n-1} = 2^{n-1},$$

якщо n парне,

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^{n-1} =$$
$$= C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots + C_n^n = 2^{n-1} \ ,$$

якщо n непарне, можна зробити висновок, що за будь-яких значень k із діапазону $0 \le k \le n$ нерівність (3.3.7) є справедливою, а отже, істинними будуть і нерівності (3.3.6). Звідси випливає справедливість (3.3.5), а з урахуванням виразу (3.3.4) справедливою є і нерівність (3.3.3). **Теорему доведено.**

Отже, з погляду зменшення довжини комбінацій Y_j на підставі теореми 3.5 застосування нумераційного стиснення f_e є доцільним за умови будь-якого фіксованого значення $0 < k < n$ одиниць у послідовностях Y_j, що становлять вихідну множину $Y[n,k]$ рівноважних комбінацій.

Виконання другого завдання – визначення області стиснення f_e для випадку, коли $0 \le k \le n$, йдеться про розв'язок щодо значень n і k нерівності вигляду

$$s + |D_j| < n \,, \tag{3.3.8}$$

де s – кількість розрядів, необхідних для зберігання числа k одиниць послідовності Y_j, яка стискається.

Сума в лівій частині відношення (3.3.8) являє собою довжину $l_j = s + |D_j|$ результуючої стислої послідовності після f_{eg} для випадку, коли k є змінна величина з діапазону $0 \le k \le n.$ Оскільки кількість різних значень k дорівнює $n+1$, то число двійкових розрядів s для подання k, зберігання якого необхідно для однозначного відновлення Y_j зі стислого образу D_j, становить $s = \lceil \log_2(n+1) \rceil$.

Тоді загальний вигляд для довжини l_j стислої послідовності з урахуванням (3.3.2)

$$l_j = \left\lceil \log_2 (n+1) \right\rceil + \left\lceil \log_2 C_n^k \right\rceil, \qquad (3.3.9)$$

а нерівність (3.3.8) для визначення області стиснення f_{eg} з урахуванням (3.3.2) перетвориться до вигляду

$$\left\lceil \log_2 (n+1) \right\rceil + \left\lceil \log_2 C_n^k \right\rceil < n .$$

Теорема 3.6. Максимальне значення l_j, $j = \overline{1, C_n^k}$, наявне за умови $k = n/2 = \gamma$, якщо n – парне, або $k = [n/2] = \gamma$, якщо n – непарне число:

$$L_{\max} = \max_{0 \le k \le n} l_j = \left\lceil \log_2 (n+1) \right\rceil + \left\lceil \log_2 C_n^{\gamma} \right\rceil, \qquad (3.3.10)$$

а мінімальне –

$$L_{\min} = \min_{0 \le k \le n} l_j = \left\lceil \log_2 (n+1) \right\rceil \qquad (3.3.11)$$

за умови $k = 0$ або $k = n$, де $n \ge 2$.

Доведення. Максимум (3.3.10) і мінімум (3.3.11) за умови фіксованого цілого позитивного $n \ge 2$ визначається тільки найбільшим і найменшим значеннями доданка $\left\lceil \log_2 C_n^k \right\rceil$ із виразу (3.3.9).

На підставі властивості біноміальних коефіцієнтів [16; 17; 25] максимальне значення C_n^k наявне за умови $k = \gamma = n/2$, якщо n – парне, або $k = \gamma = [n/2]$, якщо n – непарне число. Оскільки функція логарифма за умови основи більшої за 1 є точно зростаючою, то за умови $n \ge 2$

$$\max_{0 \le k \le n} \left\lceil \log_2 C_n^k \right\rceil = \left\lceil \log_2 C_n^{\gamma} \right\rceil.$$

Отже, з (3.3.9) отримуємо рівність (3.3.10).

Мінімальне значення $C_n^k = 1$ наявне за умови $k = 0$ або $k = n$. Звідси

$$\min_{0 \le k \le n} \left\lceil \log_2 C_n^k \right\rceil = \min_{0 \le k \le n} \left\lceil \log_2 C_n^0 \right\rceil =$$
$$= \min_{0 \le k \le n} \left\lceil \log_2 C_n^n \right\rceil = \min_{0 \le k \le n} \left\lceil \log_2 1 \right\rceil = 0.$$

Отже, з (3.3.9) отримуємо рівність (3.3.11). **Теорему доведено.**

Наслідок. За умови n – непарне число

$$L_{\max} = \left\lceil \log_2 (n+1) \right\rceil + \left\lceil \log_2 C_n^{\lceil n/2 \rceil} \right\rceil =$$
$$= \left\lceil \log_2 (n+1) \right\rceil + \left\lceil \log_2 C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} \right\rceil .$$

Справедливість наслідку обґрунтовується на підставі властивості симетрії біноміальних коефіцієнтів [16; 17; 25]

$$C_n^{[n/2]} = C_n^{\lceil n/2 \rceil} = C_n^{n - \lceil n/2 \rceil} = C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Теорема 3.7. Для цілих $n \ge 2$ наявне

$$L_{\max} = \left\lceil \log_2 (n+1) \right\rceil + \left\lceil \log_2 C_n^{\gamma} \right\rceil > n, \qquad (3.3.12)$$

де $\gamma = n/2$, якщо n – парне число, і $\gamma = \lfloor n/2 \rfloor$ або $\gamma = \lceil n/2 \rceil$, якщо n – непарне число, а для $n > 2$ наявне

$$L_{\min} = \left\lceil \log_2 (n+1) \right\rceil < n. \qquad (3.3.13)$$

Доведення. Доведемо спочатку справедливість $L_{\max} > n$ за умови $n \ge 2$. Перейдемо від (3.3.12) до нерівності

$$\log_2(n+1)+\log_2 C_n^{\gamma} > n, \qquad (3.3.14)$$

доказ якого однозначно буде визначати істинність нерівності (3.3.12), оскільки $\lceil \log_2(n+1) \rceil \geq \log_2(n+1)$ і $\lceil \log_2 C_n^{\gamma} \rceil \geq \log_2 C_n^{\gamma}$.

Потенціюючи за основою логарифма ліву і праву частини вищенаведеної нерівності, отримуємо

$$(n+1)\cdot C_n^{\gamma} > 2^n.$$

Оскільки $(n+1)\cdot C_n^{\gamma} = \sum_{z=0}^{n} C_n^{\gamma}$, а $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$ [16; 17; 25], то

$$\sum_{z=0}^{n} C_n^{\gamma} > \sum_{k=0}^{n} C_n^k. \qquad (3.3.15)$$

Розглянемо цю нерівність, коли $n = 2,4,\ldots$ – парне. За умови $\gamma = n/2$, а також рівної $(n+1)$ кількості членів сум лівої і правої частин маємо один доданок $C_n^{\gamma} = C_n^{k=\gamma/2}$, коли $k = n/2$, і n інших $C_n^{\gamma} > C_n^k$, коли $0 \leq k < n/2$ і $n/2 < k \leq n$. Очевидно, що в цьому разі (3.3.15) виконується.

Розглянемо тепер (3.3.15), коли $n = 3,5,\ldots$ – непарне. Тоді $\gamma = (n-1)/2$, або $\gamma = (n+1)/2$. Відомо, що $C_n^k = C_n^{n-k}$ [16; 17; 25], тобто $C_n^{(n-1)/2} = C_n^{(n+1)/2}$. За рівної $(n+1)$ кількості членів сум лівої і правої частин маємо тепер два доданки у правій частині нерівності $C_n^{\gamma} = C_n^{k=(n-1)/2}$, коли $k = (n-1)/2$ і $k = (n+1)/2$ й інші $(n-2)$ доданків

$C_n^{\gamma} > C_n^k$, коли $0 \le k < (n-1)/2$ і $(n+1)/2 < k \le n$. Очевидно, що і в цьому разі (3.3.15) виконується.

Отже, як для парних, так і для непарних n, тобто для всіх цілих $n \ge 2$, виконується нерівність (3.3.15), звідси випливає істинність (3.3.14) і, отже, справедливість нерівності (3.3.12).

Тепер наведемо обґрунтування $L_{\min} < n$ за умови $n > 2$. Скористаємося рівністю $\lceil \log_2(n+1) \rceil = \lfloor \log_2(n+1) \rfloor + 1$ і перейдемо від (3.3.13) до нерівності

$$\log_2(n+1) + 1 < n,$$

доказ якого однозначно визначає і посилює істинність нерівності (3.3.13), оскільки $\lfloor \log_2(n+1) \rfloor \le \log_2(n+1)$.

У наведеній вище нерівності перенесемо одиницю з лівої частини в праву для зручності потенціонування. Далі, потенціюючи обидві частини цієї нерівності за основою 2, отримуємо $n+1 < 2^{n-1}$ або $2n+2 < 2^n$.

Відомо [16; 17; 25], що числа сполучень $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ і $C_n^0 = C_n^n = 1$. Праву частину нерівності подамо в такому вигляді:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^{n-1} + C_n^n + \sum_{k=2}^{n-2} C_n^k =$$
$$= (2n+2) + \sum_{k=2}^{n-2} C_n^k .$$

Повертаючись до попередньої нерівності, маємо

$$2n+2 < (2n+2) + \sum_{k=2}^{n-2} C_n^k .$$

Очевидно, що ліва частина нерівності точно менше за праву за умови цілих $n > 2$. Отже, нерівність (3.3.13) також справедлива. **Теорему доведено.**

З теореми 3.7 можна зробити висновок, що за умови $n > 2$ функція (3.3.9) має точки перетину з лінією $f(k) = n$, паралельною осі абсцис. З огляду на те, що функція біноміального коефіцієнта є симетричною щодо лінії $k = n/2$ (допустивши для n – непарного, що $k = n/2$ для цього випадку є раціональним числом), а також властивість симетрії біноміальних коефіцієнтів $C_n^k = C_n^{n-k}$ [16; 17; 25], можна зробити висновок, що таких точок перетину буде дві – α_e і β_e, де $\beta_e = n - \alpha_e$. Водночас

$$\alpha_e = \max_{k \in L_e} k \text{ і } \beta_e = \min_{k \in H_e} k$$

являють собою межі множин – нижньої $L_e = \{0, 1, ..., \alpha_e\}$ і верхньої $H_e = \{\beta_e, \beta_e + 1, ..., n\}$ області значень k двійкових одиниць, за умови яких застосування методу стиснення f_{eg} на основі біноміальної числової функції є доцільним. І, навпаки, існує множина $M_e = \{\alpha_e + 1, \alpha_e + 2, ..., \beta_e - 1\}$ – середня область значень k двійкових одиниць, за умови яких розглянутий раніше метод стиснення f_{eg} дає збільшення довжини l_j результуючої комбінації.

Графіки функцій $l_j = f(k)$ і $f(k) = n$ за умови $n = 64$ і $0 \le k \le 64$ подано на рисунку 3.1. Їхній перетин наявний для значень $\alpha = 22$ і $\beta = 42$ числа одиниць, які розташовуються симетрично щодо вертикальної лінії $k = n/2 = 32$. Очевидно, що діапазони $0 \le k < 22$ і $42 < k \le 64$ значень k за умови заданого $n = 64$ становлять, відповідно, області L_e і H_e використання нумераційного стиснення f_{eg} на основі біноміальної числової функції, коли $l_j < n$.

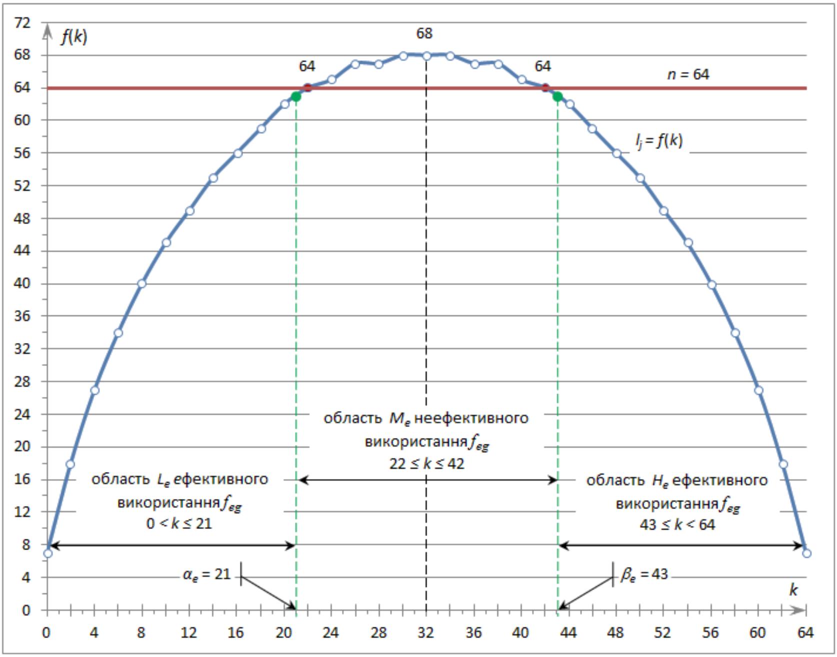

Рисунок 3.1 – Графіки $l_j = f(k)$, $f(k) = n$,
області L_e, H_e ефективного
і M_e неефективного використання f_{eg}
за умови заданого $n = 64$

Рішення нерівності

$$\left\lceil \log_2(n+1) \right\rceil + \left\lceil \log_2 C_n^{\alpha_e} \right\rceil < n \qquad (3.3.16)$$

щодо меж α_e (або $\beta_e = n - \alpha_e$) для пошуку областей L_e і H_e використання f_{eg} є важливим завданням для підвищення ефективності біноміального стиснення, але воно стикається з певними труднощами з вилучення шуканого α_e з біноміального коефіцієнта $C_n^{\alpha_e}$.

Тривіальним підходом до знаходження меж α_e і β_e є послідовне перебирання $0 < k < n$, поки не буде виконуватися умова рівності (3.3.16). Деякі значення α_e і β_e, отримані внаслідок програмного моделювання для різних n, подані в додатку Б. Вихідний код програми для знаходження α_e і β_e для різних n подано в додатку В.

Більш ефективним підходом до виявлення значень меж α_e і β_e є побудова регресійної моделі області використання біноміального нумераційного стиснення f_{eg} на основі базових методів регресійного аналізу [35; 36]. Цей підхід дозволить уникнути труднощів, пов'язаних із перебиранням рішень нерівності (3.3.16) і обчисленням біноміальних коефіцієнтів за умови великих значень n і k, і, отже, знизити обсяг обчислювальних витрат за умови знаходження α_e і β_e. Але водночас буде існувати погрішність обчислення α_e і β_e, яка з урахуванням дискретності функції $\alpha = f(n)$ і за умови великих n істотно мало впливає на визначення областей L_e і H_e використання методу стиснення f_{eg}.

У роботі [37] було зазначено про близький до лінійного характер залежності α_e від n, тому як вихідне рівняння для методу найменших квадратів застосовують лінійне рівняння $\alpha_e = a \cdot n + b$. Унаслідок цього для обчислення α_e і β_e була запропонована функція $\alpha_e = f(n)$ такого вигляду:

$$\alpha_e = \lceil 0,46284 \cdot n - 10,25 \rceil. \qquad (3.3.17)$$

Коефіцієнт кореляції, формула якого подана в [38] і який характеризує точність знайденого рівняння, становить $r_{лін} = 0,99986$.

Більш точну залежність можна отримати, якщо задаватися поліноміальною залежністю вигляду $\alpha_e = a \cdot n^2 + b \cdot n + c$. Унаслідок розрахунку за формулами з [35; 36] коефіцієнтів a, b і c отримуємо для визначення значення межі α_e поліноміальне рівняння

$$\alpha_e = \left\lceil 2,75 \cdot 10^{-5} \cdot n^2 + 0,4345 \cdot n - 5,3 \right\rceil. \qquad (3.3.18)$$

Коефіцієнт кореляції з [38], що характеризує точність отриманого поліноміального рівняння, становить $r_{пол} = 0,999978$.

Крім співвідношень (3.3.17) і (3.3.18), отриманих за допомогою методу найменших квадратів, експериментальним способом виявлено співвідношення, яке більш точно описує залежність $\alpha_e(n)$

$$\alpha_e = \left\lceil \frac{n}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\ln(10 \cdot n)}{n}}\right) \right\rceil. \qquad (3.3.19)$$

Коефіцієнт кореляції рівняння (3.3.19) становить $r_{екс} = 0,999983$.

На підставі того, що $r_{екс} < r_{пол} < r_{лін}$, можна зробити такі висновки:

– рівняння (3.3.18) і (3.3.19) дають більш точні рішення, ніж рівняння (3.3.17), що особливо важливо за умови малих значень n, коли точність знайденого значення α_e може суттєво впливати на ступінь стиснення двійкових послідовностей A_j;

– співвідношення (3.3.17) доцільно застосовувати для значень n, більших за 128, оскільки в цьому разі функція $\alpha_e = f(n)$ незначно відрізняється від лінійної;

– співвідношення (3.3.19) більш точно описує залежність $\alpha_e = f(n)$, особливо за умови n, кратних ступеню двійки, але обчислення меж α_e є більш складним, ніж обчислення з використанням формули (3.3.18), тому співвідношення (3.3.18) доцільно застосовувати, коли потрібна досить висока точність підрахунку α_e за умови обмеження на час обчислення та обсягу апаратно-програмних витрат.

3.4 Моделі адаптивного нумераційно-векторного стиснення і відновлення двійкових даних

Наявність області M_e (рис. 3.1) неефективного використання методу біноміального нумераційного стиснення f_{eg} означає, що для значень $\alpha < k < \beta$ відношення довжини n вихідної послідовності A_j до довжини l_j результуючої комбінації $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\, k, D_j\right)$

$$\frac{n}{\left\lceil \log_2(n+1) \right\rceil + \left\lceil \log_2 C_n^k \right\rceil} < 1. \qquad (3.4.1)$$

Незважаючи на це, у безлічі випадків для всього масиву повідомлень, що генеруються інформаційним джерелом A, це відношення може бути більше за одиницю, що залежить від значень імовірнісних (статистичних) показників власне джерела даних.

Потрібно звернути увагу на те, що за умови великих n і k формування $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\, k, D_j\right)$, для яких виконується нерівність (3.4.1), пов'язане зі значними часовими та апаратно-програмними витратами, що є наслідком застосування біноміальної числової функції (1.1.2), а саме обчислення вагових коефіцієнтів $C_{n-i}^{k-q_i}$, які в сумі дають номер D_j. Аналогічно, значний обсяг часових і апаратно-програмних витрат, як наслідок необхідності визначення $C_{n-i}^{k-q_i}$ за умови великих n і k, наявний і за умови відновлення на основі Z_j вихідної послідовності A_j, яка містить $\alpha < k < \beta$ одиниць.

Обчислення біноміальних коефіцієнтів $C_{n-i}^{k-q_i}$ за умови великих значень верхнього і нижнього параметрів являє собою складну задачу з погляду як практичної реалізації, так і зниження обчислювальних (часових) витрат [17; 39–41]. Насамперед це пов'язано з обчисленням факторіалів вигляду $(n-i)!$ і $(k-q_i)!$, значення яких можуть досягати величезних величин. Наприклад, якщо для вихідної послідовності Y_j маємо $n = 64$ і $k = 32$, тобто саме кількість одиниць з області M_e (див. рис. 3.1), то для одиничного розряду $x_{32} = 1$ двійкового біноміального числа X_j, відповідного Y_j, за умови $q_{32} = 15$ ваговий коефіцієнт C_{32}^{17} матиме значення, яке складається з 9 значущих цифр. Водночас обчислення C_{32}^{17} за спрощеною класичною схемою [17; 25] вимушено буде стикатися зі значеннями чисельника $32\times31\times...\times18$ і знаменника $15!$, які містять 21 і 13 десяткових знаків відповідно.

Очевидно, що труднощі, пов'язані з громіздкістю обчислень факторіалів і складністю уявлення кінцевого цілочислового результату біноміальних коефіцієнтів за умови великих значень їхніх параметрів, набувають особливої гостроти за умови обмежень на час стиснення / відновлення даних та обсягу апаратно-програмних витрат у процесі практичної реалізації систем біноміального нумераційного стиснення на основі біноміальної числової функції. Подолання зазначених труднощів або їхнє часткове вирішення можливе на основі підходів і методів канонічного розкладання чисел сполучень і їхнього двійково-канонічного кодування [39–41], обчислення біноміальних коефіцієнтів за допомогою послідовностей чисел сполучень [2], компактного розміщення біноміальних коефіцієнтів у пам'яті [42].

Іншим ефективним заходом для збільшення швидкодії методів стиснення і відновлення на основі біноміальної числової функції і зменшення витрат за умови їхньої практичної реалізації є введення в моделі процесів стиснення і відновлення, що розробляються, процедури вибору методу кодування f_e або f_v для вихідної двійкової n-розрядної послідовності $A_j \in A = \{0,1\}^n$, яка містить $0 \le k \le n$ одиниць.

Під час стиснення A_j необхідно використовувати функцію f_w, яка ставить у відповідність вихідній послідовності A_j вибірку (k, Y_j), де $Y_j = A_j$ ((2.1.7), підрозділ 2.1). Далі, якщо отримане значення k задовольняє системі нерівностей такого вигляду:

$$\begin{cases} 0 < k \le \alpha_e \\ \beta_e \le k < n \end{cases}, \quad (3.4.2)$$

то для кодування послідовності $A_j = Y_j \in Y[n,k]$ використовується нумераційне кодування f_e на основі біноміальної числової функції. Якщо для значення k виконується нерівність вигляду $\alpha_e < k < \beta_e$, то реалізується метод векторного кодування f_v. Водночас в обох випадках до кодованих комбінацій для однозначного відновлення стислої послідовності додається двійкове число k одиниць – $\mathrm{Bin}\,k$, тобто виконується додаткове кодування f_k. Якщо ж значення k задовольняє системі рівностей $(k=0) \vee (k=n)$, то результуюча комбінація, яка кодується, буде складатися тільки з $\mathrm{Bin}\,k$, тобто використовується єдиний метод кодування f_k.

Отже, розглянемо відображення вигляду

$$f_{ev} : A \to Z,$$

яке задається відповідною функцією

$$Z_j = f_{ev}\left(A_j\right),$$

де $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, $A_j \in A = \{0,1\}^n$, а $Z_j \in Z$ може набувати вигляду $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\,k, D_j\right)$, $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\,k, A_j\right)$ або $Z_j = \mathrm{Bin}\,k$, $j = \overline{1, 2^n}$. Нижченаведена теорема 3.8 наводить властивості відображення f_{ev} і спосіб його реалізації.

Теорема 3.8. Будь-якій двійковій n-розрядній послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n \in A$ можна поставити у взаємну однозначну відповідність за допомогою відоображень f_{ev} і f_{ev}^{-1} двійкову комбінацію $Z_j \in Z$ такого вигляду:

1) якщо $(0 < k \le \alpha_e) \vee (n - \alpha_e \le k < n)$, то

$$Z_j = \mathrm{Bin}\, k + +D_j, \tag{3.4.3}$$

де $k = \sum_{i=1}^{n} a_i$ і $D_j \in D[n,k] = \left\{\mathrm{Bin}\left(\overline{0, C_n^k - 1}\right)\right\}$;

2) якщо $\alpha_e < k < n - \alpha_e$, то

$$Z_j = \mathrm{Bin}\, k + +Y_j, \tag{3.4.4}$$

де $Y_j \in Y[n,k]$, $Y_j = A_j$;

3) в іншому разі, якщо $(k = 0) \vee (k = n)$, то

$$Z_j = \mathrm{Bin}\, k. \tag{3.4.5}$$

Доведення. Перш ніж почати доказ зазначимо, що рівноважна комбінація Y_j є результатом дії функції f_w, яка відображає функціональну відповідність $A_j \xrightarrow[f_w]{} (k, Y_j)$, де $Y_j = A_j$.

Також візьмемо до уваги, що на області визначення $(0 \le k \le \alpha_e) \vee (n - \alpha_e \le k \le n)$ відображення f_{ev} і f_{ev}^{-1}, які розглядаються, являють собою звуження відповідних відображень f_{eg} і f_{eg}^{-1}: $f_{ev}(A_j) = f_{eg}(A_j)$, $f_{ev}^{-1}(Z_j) = f_{eg}^{-1}(Z_j)$. Але взаємна однозначність f_{eg} і f_{eg}^{-1} вже обґрунтована теоремою 3.4. Отже, випадки (3.4.3) і (3.4.5) умови теореми 3.8 підпадають під дію раніше доведеної теореми 3.4.

Для випадку $\alpha_e < k < n - \alpha_e$ наведемо доказ від протилежного. Спочатку розглянемо пряме відображення $f_{ev} : A \to Z$. Припустимо, що для A_j існують дві двійкові послідовності Z'_j і Z''_j, $Z'_j \neq Z''_j$. Але в результуючих послідовностях (3.4.4)

$$Z'_j = \mathrm{Bin}\, k' + +Y'_j \text{ і } Z''_j = \mathrm{Bin}\, k'' + +Y''_j$$

комбінації Y'_j і Y''_j з урахуванням взаємної однозначності відображення f_w не можуть бути різними за умовою теореми, тобто $Y'_j = Y''_j = Y_j$, а два відмінних один від одного значення числа k одиниць для єдиної Y_j не можливі, тобто $\mathrm{Bin}\, k' = \mathrm{Bin}\, k''$. Звідси маємо $Z'_j = Z''_j$ і для випадку $\alpha_e < k < n - \alpha_e$. Отже, наше припущення для відображення f_{ev} виявляється неправильним. Отже, A_j можна поставити у відповідність єдину Z_j вигляду (3.4.4) за умови $\alpha_e < k < n - \alpha_e$.

Тепер припустимо для зворотного відображення f_{ev}^{-1} за умови $\alpha_e < k < n - \alpha_e$, що для Z_j існують дві двійкові комбінації A'_j і A''_j, $A'_j \neq A''_j$. Але для випадку (3.4.4) рівність $A'_j = A''_j = A_j$ визначається самою результуючою послідовністю $Z_j = \mathrm{Bin}\, k + +Y_j$, яка містить Y_j у явному вигляді, тобто за умови взаємної однозначності відображення f_w^{-1} маємо $Y_j = A_j$, і наше припущення щодо двох A'_j і A''_j, $A'_j \neq A''_j$ для Z_j також виявляється неправильним.

Очевидно, що справедливість доказів не зміниться і в разі розгляду більш ніж двох різних Z'_j, Z''_j, … або A'_j,

A_j'', … за умови $\alpha_e < k < n - \alpha_e$. Отже, з урахуванням дії теореми 3.4 і доказування для $\alpha_e < k < n - \alpha_e$ є взаємна однозначна відповідність між A_j і Z_j. **Теорему доведено.**

Наслідок. Відображення $f_{ev} : A \to Z$ є бієктивним.

Насправді, кожний елемент A_j має єдиний образ, а кожний елемент Z_j – єдиний прообраз для всіх $A_j \in A$ і $Z_j \in Z$. Звідси випливає бієктивність відображення f_{ev}.

Об'єднуючи в одну систему рівностей відношення (3.4.3), (3.4.4) і (3.4.5), для результуючої комбінації Z_j отримуємо

$$Z_j = \begin{cases} \mathrm{Bin}\, k, \ (k=0) \vee (k=n) \\ \mathrm{Bin}\, k + +D_j, \ (0 < k \le \alpha_e) \vee (\beta_e \le k < n) \\ \mathrm{Bin}\, k + +Y_j, \ \alpha_e < k < \beta_e \ . \end{cases} \qquad (3.4.6)$$

Способи практичної реалізації відображень f_{ev} і f_{ev}^{-1}, указаних у теоремі 3.8, можуть бути різними. Вибрані підходи до побудови f_{ev} і f_{ev}^{-1}, розроблені методи кодування і моделі процесів, які формуються для них, у кінцевому підсумку впливають на швидкодію та обсяг апаратно-програмних витрат запропонованого методу стиснення даних, що використовує перемикання між біноміальним нумераційним кодуванням f_e і векторним кодуванням f_v.

Визначення 3.3. *Методом нумераційно-векторного стиснення f_{ev} на основі біноміальної числової функції (або біноміального нумераційно-векторного стиснення) називається відображення*

$$f_{ev} : A \to Z ,$$

яке задається складною функцією вигляду

$$f_{ev} = \begin{cases} f_k \circ f_w, \ (k=0) \vee (k=n) \\ f_k \circ f_e \circ f_w, \ (0 < k \le \alpha_e) \vee (\beta_e \le k < n) \\ f_k \circ f_v \circ f_w, \ \alpha_e < k < \beta_e \ , \end{cases} \qquad (3.4.7)$$

де A *– множина вихідних двійкових* n *-розрядних послідовностей* A_j

$$A_j \in A = \{0,1\}^n, \ j = \overline{1,2^n}, \ A = \bigcup_{k=0}^{n} Y[n,k],$$

$$Y[n,k'] \cap Y[n,k''] = \varnothing, \ k' \ne k'', \ 0 \le k', k'' \le n;$$

Z *– множина результуючих послідовностей* Z_j

$$Z = Z_o \cup Z_e \cup Z_v,$$

$$Z_o = Q \times \varnothing = \left\{ Z_j / Z_j = \mathrm{Bin}\, k, (k=0) \vee (k=n) \right\},$$

$$Z_e = Q \times D[n,k] =$$
$$= \left\{ Z_j / Z_j = \left(\mathrm{Bin}\, k, D_j\right), (0 < k \le \alpha_e) \vee (\beta_e \le k < n) \right\},$$

$$Z_v = Q \times Y[n,k] = \left\{ Z_j / Z_j = \left(\mathrm{Bin}\, k, Y_j\right), \alpha_e < k < \beta_e \right\},$$

$$Q = \left\{ \mathrm{Bin}\, k / 0 \le k \le n \right\}, \ D_j \in D[n,k] = \left\{ \mathrm{Bin}\left(\overline{0, C_n^k - 1}\right) \right\},$$

$$Y_j \in Y[n,k], \ Y_j = f_w\left(A_j\right);$$

f_k *– функція* $Z_j = f_k\left(Y_j\right)$*, яка ставить у відповідність рівноважній комбінації* $Y_j = A_j$ *двійковий запис* $\mathrm{Bin}\, k$ *чис-*

ла k *одиниць, де* $(k=0)\vee(k=n)$, *і визначає відображення вигляду*

$$f_k : Y[n,k] \to Z_o,$$

або функція $Z_j = f_k(D_j)$, *яка ставить у відповідність двійковому номеру* D_j *результуючу послідовність* $Z_j = \mathrm{Bin}\, k + +D_j$, *якщо* $(0 < k \le \alpha_e) \vee (\beta_e \le k < n)$, *і визначає відображення вигляду*

$$f_k : D[n,k] \to Z_e,$$

або функція $Z_j = f_k(Y_j)$, *яка ставить у відповідність* $Y_j = A_j$ *результуючу послідовність* $Z_j = \mathrm{Bin}\, k + +Y_j$, *якщо* $\alpha_e < k < \beta_e$, *і визначає відображення вигляду*

$$f_k : Y[n,k] \to Z_v;$$

$f_e = \psi \circ f_b$ *– складна функція* $D_j = f_e(Y_j) = \psi\left(f_b(Y_j)\right)$, *яка ставить у відповідність рівноважній комбінації* Y_j *на основі біноміальної числової функції її двійковий номер* $D_j \in D[n,k]$ *і визначає відображення вигляду*

$$f_e : Y[n,k] \to D[n,k];$$

f_v *– функція* $Y_j = f_v(Y_j)$ або $\mathrm{id}_Y(Y_j) = Y_j$, *яка переводить рівноважну комбінацію* Y_j *у себе і визначає тотожне відображення (перетворення) вигляду*

$$f_v : Y[n,k] \to Y[n,k];$$

f_w *– функція* $Y_j = f_w\left(A_j\right)$*, яка ставить у відповідність вихідній послідовності* A_j *впорядковану вибірку вигляду* $\left(k, Y_j\right)$*, де* $Y_j = A_j$*, і визначає відображення*

$$f_w : A \to M \ ,$$

$$M = \left\{\left(k, Y_j\right) / \, 0 < k < n, Y_j \in Y\left[n, k\right]\right\} .$$

На підставі визначення 3.3 і виразу (3.4.7) складну функцію, що реалізує відображення $f_{ev} : A \to Z$, можна записати як

$$Z_j = f_{ev}\left(A_j\right) = \\ = \begin{cases} f_k\left(f_w\left(A_j\right)\right), \left(k = 0\right) \vee \left(k = n\right) \\ f_k\left(f_e\left(f_w\left(A_j\right)\right)\right), \left(0 < k \le \alpha_e\right) \vee \left(\beta_e \le k < n\right) \\ f_k\left(f_v\left(f_w\left(A_j\right)\right)\right), \alpha_e < k < \beta_e \ . \end{cases} \qquad (3.4.8)$$

Зі свого боку, зворотне відображення $f_{ev}^{-1} : Z \to A$, яке задається зворотною складною функцією

$$f_{ev}^{-1} = \\ = \begin{cases} f_w^{-1} \circ f_k^{-1}, \left(k = 0\right) \vee \left(k = n\right) \\ f_w^{-1} \circ f_e^{-1} \circ f_k^{-1}, \left(0 < k \le \alpha_e\right) \vee \left(\beta_e \le k < n\right) \\ f_w^{-1} \circ f_v \circ f_k^{-1}, \alpha_e < k < \beta_e \ , \end{cases} \qquad (3.4.9)$$

(беручи до уваги $f_v^{-1} = f_v$) являє собою відновлення з урахуванням наявного значення k вихідних двійкових послідовностей A_j. У разі $\left(k = 0\right) \vee \left(k = n\right)$ відновлення A_j

здійснюється на основі $\mathrm{Bin}\,k$, за умови $(0<k\le\alpha_e)\vee(\beta_e\le k<n)$ – на основі $\mathrm{Bin}\,k$ і двійкових номерів $D_j\in D[n,k]$ із використанням біноміальної числової функції (1.1.2), а за умови $\alpha_e<k<\beta_e$ – на основі тотожного відображення відновлюваної комбінації в себе $Y_j=A_j$. Такий вид відновлення будемо називати нумераційно-векторним на основі біноміальної числової функції, або скорочено біноміальним нумераційно-векторним. На підставі (3.4.9) складну функцію, що реалізує зворотне відображення $f_{ev}^{-1}:Z\to A$, можна виразити ще як

$$A_j=f_{ev}^{-1}(Z_j)=$$
$$=\begin{cases} f_w^{-1}\left(f_k^{-1}(Z_j)\right),(k=0)\vee(k=n)\\ f_w^{-1}\left(f_e^{-1}\left(f_k^{-1}(Z_j)\right)\right),(0<k\le\alpha_e)\vee(\beta_e\le k<n)\\ f_w^{-1}\left(f_v\left(f_k^{-1}(Z_j)\right)\right),\alpha_e<k<\beta_e\ . \end{cases} \qquad (3.4.10)$$

Довжина $l_j(f_{ev})$ результуючих комбінацій Z_j з урахуванням системи рівностей (3.4.6) обчислюється так:

$$l_j(f_{ev})=$$
$$=\begin{cases} s,(k=0)\vee(k=n)\\ s+\left\lceil \log_2 C_n^k\right\rceil,(0<k\le\alpha_e)\vee(\beta_e\le k<n)\\ s+n,\alpha_e<k<\beta_e\ . \end{cases} \qquad (3.4.11)$$

де $s=\left\lceil \log_2(n+1)\right\rceil$.

Способи реалізації складних функцій (3.4.8) і (3.4.10) на підобласті визначення, коли $(k=0)\vee(k=n)$ і $(0<k\le\alpha_e)\vee(\beta_e\le k<n)$, для методу біноміального нуме-

раційно-векторного стиснення f_{ev} є аналогічними способам побудови функцій (3.2.4) або (3.2.6) для методу узагальненого стиснення f_{eg} на основі біноміальної числової функції.

Способи реалізації складних функцій (3.4.8) і (3.4.10) на підобласті визначення, коли $\alpha_e < k < \beta_e$, ґрунтуються на досить простих операціях обчислення k одиниць, конкатенації і декатенації двійкового коду $\mathrm{Bin}\,k$ і відображення вихідної A_j послідовності в саму себе.

З теореми 3.4, яка вказує та обґрунтовує методи реалізації відповідності, сформульованої теоремою 3.8, а також із власне теореми 3.8, випливають моделі процесів біноміального нумераційно-векторного стиснення f_{ev} і відновлення f_{ev}^{-1} двійкових послідовностей.

Моделювання процесу стиснення f_{ev} двійкових послідовностей $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, $A_j \in A = \{0,1\}^n$, $j = \overline{1, 2^n}$ здійснюється на основі теорем 3.4 і 3.8, функції (2.1.1) і складається з таких етапів.

Етап 1. Визначається кількість s розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\,k$ числа k одиниць, $0 \le k \le n,$ вихідної n-розрядної послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$

$$s = \left\lceil \log_2 (n+1) \right\rceil.$$

Етап 2. Проводиться обчислення числа k двійкових одиниць у вихідній n-розрядній послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$

$$k = \sum_{i=1}^{n} a_i \ ,$$

у такий спосіб реалізуючи функцію $f_w\left(A_j\right)=\left(k,Y_j\right)$ і визначаючи клас $Y\left[n,k\right]$ рівноважних комбінацій, до якого належить $Y_j \in Y\left[n,k\right]$, $Y_j = A_j$.

Етап 3. Виконується перетворення числа k одиниць до його двійкового вигляду $\text{Bin}\,k$, що складається із s розрядів.

Етап 4. Якщо число k задовольняє системі рівностей $(k=0)\vee(k=n)$, то результуючою буде комбінація вигляду $Z_j = \text{Bin}\,k$, $Z_j \in Z_o$. В іншому разі виконується перехід до наступного етапу.

Етап 5. Якщо число k задовольняє системі нерівностей

$$\begin{cases} 0 < k \le \alpha_e \\ \beta_e \le k < n \end{cases},$$

то наявне значення n і обчислене значення k являють собою параметри двійкової (n,k)-біноміальної системи числення і здійснюється перехід до подальших етапів для реалізації кодування вигляду $f_k\left(f_e\left(Y_j\right)\right)=Z_j$, $Z_j \in Z_e$. В іншому разі виконується перехід до етапу 12 для реалізації кодування вигляду $f_k\left(f_v\left(Y_j\right)\right)=Z_j$, $Z_j \in Z_v$.

Етап 6. Обчислюється кількість m розрядів для двійкового подання номера $D_j \in D\left[n,k\right]= =\left\{\text{Bin}\left(\overline{0, C_n^k - 1}\right)\right\}$, відповідного $Y_j \in Y\left[n,k\right]$

$$m=\left\lceil \log_2 C_n^k \right\rceil.$$

Етап 7. Визначається в n-розрядній рівноважній комбінації $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$, що має число k одиниць, значення останнього розряду y_n.

Етап 8. Якщо $y_n = 0$, то

$$X_j = Y_j / 00...0 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0 / 00...0 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1,$$

тобто від комбінації $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0$ відкидаються всі нульові розряди, починаючи з $y_n = 0$, до появи першої двійкової одиниці $y_r = 1$, котра являтиме собою значення останнього розряду $x_r = y_r = 1$ (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1$. В іншому разі

$$X_j = Y_j / 11...1 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1 / 11...1 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0,$$

тобто від комбінації $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1$ відкидаються всі одиничні розряди, починаючи з $y_n = 1$, до появи першого двійкового нуля $y_r = 0$, котрий являтиме собою значення останнього розряду $x_r = y_r = 0$ (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0$. Водночас в обох випадках інші розряди залишаються без змін: $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, …, $x_{r-1} = y_{r-1}$.

Етап 9. Обчислюється кількісний еквівалент $\operatorname{dec} X_j$ двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ відповідно до числової функції (1.1.2)

$$\operatorname{dec} X_j = \sum_{i=1}^{r} x_i C_{n-i}^{k-q_i} .$$

Етап 10. Виконується перетворення кількісного еквівалента $\operatorname{dec} X_j$ до його двійкового вигляду, що складається з m розрядів

$$D_j = \operatorname{Bin}\left(\operatorname{dec} X_j\right),$$

у такий спосіб отримуючи шуканий номер $D_j \in D[n,k] = \left\{\operatorname{Bin}\left(\overline{0, C_n^k - 1}\right)\right\}$, – стислий образ вихідної n-розрядної послідовності $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$.

Етап 11. Виконується конкатенація двійкових значення $\operatorname{Bin} k$ і номера D_j, тобто кодування вигляду $f_k\left(D_j\right) = Z_j$ для випадку $\left(0 < k \le \alpha_e\right) \vee \left(\beta_e \le k < n\right)$

$$Z_j = \operatorname{Bin} k + +D_j,$$

у такий спосіб отримуючи результуючу комбінацію $Z_j \in Z_e$.

Етап 12. Виконується конкатенація двійкових значення $\operatorname{Bin} k$ і рівноважної комбінації Y_j, тобто кодування вигляду $f_k\left(f_v\left(Y_j\right)\right) = Z_j$ для випадку $\alpha_e < k < \beta_e$

$$Z_j = \operatorname{Bin} k + +Y_j,$$

у такий спосіб отримуючи результуючу комбінацію $Z_j \in Z_v$.

У моделі стиснення f_{ev} можна поєднати етапи 2 і 3 під час використання двійкового рахунку, а також етапи 9 і 10 за подання вагових коефіцієнтів $C_{n-i}^{k-q_i}$ у двійковому вигляді і проведення операцій у біноміальній числовій функції (1.1.2) за правилами двійкової арифметики.

Моделювання процесу відновлення f_{ev}^{-1} послідовностей $A_j = a_1a_2...a_i...a_n$, $A_j \in A = \{0,1\}^n$, $j = \overline{1,2^n}$ з комбінацій-образів Z_j, $Z_j \in Z_o \cup Z_e \cup Z_v$ здійснюється на основі теорем 3.4 і 3.8, функції (2.1.3) і складається з таких етапів.

Етап 1. Визначається кількість s розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\,k$ числа k одиниць, $0 \le k \le n$, відновлюваної n-розрядної послідовності $A_j = a_1a_2...a_i...a_n$

$$s = \lceil \log_2(n+1) \rceil.$$

Етап 2. Здійснюється декатенація s розрядів, починаючи з першого розряду комбінації Z_j

$$\mathrm{Bin}\,k = Z_j / D_j\ ,\ \mathrm{Bin}\,k = Z_j / Y_j\ \text{ або }\ \mathrm{Bin}\,k = Z_j\ ,$$

у такий спосіб витягується $\mathrm{Bin}\,k = z_1z_2...z_s$ зі стислого образу Z_j, що відповідає n-розрядній послідовності A_j. Остання рівність є випадком, коли тільки $\mathrm{Bin}\,k$ становить образ нульової або одиничної A_j. Отже, реалізується декодування $f_k^{-1}(Z_j)$.

Етап 3. Виконується перетворення двійкового значення $\mathrm{Bin}\,k$ до його десяткового еквівалента

$$k = \mathrm{dec}(\mathrm{Bin}\,k).$$

Етап 4. Якщо для значення k виконується $(k=0) \vee (k=n)$, то комбінація, що перетворюється, має вигляд $Z_j = \mathrm{Bin}\,k$ і тоді формується вихідна послідовність

$$A_j = f_{ev}^{-1}(Z_j) = f_w^{-1}\left(f_k^{-1}(Z_j)\right) = f_w^{-1}(\mathrm{Bin}\,n) = 11...1$$

або

$$A_j = f_{ev}^{-1}\left(Z_j\right) = f_w^{-1}\left(f_k^{-1}\left(Z_j\right)\right) = f_w^{-1}\left(\mathrm{Bin}\,0\right) = 00...0\,.$$

В іншому разі виконується перехід до етапу 5.

Етап 5. Якщо для значення k виконується

$$\begin{cases} 0 < k \le \alpha_e \\ \beta_e \le k < n\,, \end{cases}$$

то комбінація має вигляд $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\,k, D_j\right)$ і для відновлення $A_j = f_{ev}^{-1}\left(Z_j\right) = f_w^{-1}\left(f_e^{-1}\left(D_j\right)\right)$, використовуючи відповідне $\left(n,k\right)$-біноміальне число X_j, переходимо до подальших етапів. В іншому разі $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\,k, Y_j\right)$ і для відновлення $A_j = f_{ev}^{-1}\left(Z_j\right) = f_w^{-1}\left(f_v\left(Y_j\right)\right)$ робиться перехід до етапу 12.

Етап 6. Обчислюється кількість m розрядів для двійкового подання номера $D_j \in D\left[n,k\right] = \left\{\mathrm{Bin}\left(\overline{0, C_n^k - 1}\right)\right\}$, відповідного $Y_j \in Y\left[n,k\right]$

$$m = \left\lceil \log_2 C_n^k \right\rceil.$$

Етап 7. Здійснюється декатенація m розрядів, починаючи з $\left(s+1\right)$-го розряду комбінації Z_j

$$D_j = Z_j / \mathrm{Bin}\,k\,,$$

у такий спосіб витягується двійковий номер D_j зі стислого образу Z_j, відповідного рівноважній комбінації Y_j.

Етап 8. Виконується перетворення двійкового номера D_j до його десяткового еквівалента

$$F_j = \operatorname{dec} D_j .$$

Етап 9. Проводиться обчислення значень розрядів $x_i \in \{0,1\}$

$$x_i = \operatorname{sign}\left(\operatorname{sign}\left(F(i) - \rho_i\right) + 1\right),$$

де $F(1) = F_j$, $F(i+1) = F(i) - x_i \rho_i$, $\rho_i = C_{n-i}^{k-q_i}$, у такий спосіб формуючи (n,k)-біноміальне число $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$, $X_j \in X[n,k]$, $r < n$. Обчислення x_i триває, поки $F(i) - x_i \rho_i = 0$.

Етап 10. Визначається у двійковому (n,k)-біноміальному r-розрядному числі $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ значення останнього x_r.

Етап 11. Якщо $x_r = 0$, то

$$Y_j = X_j + +11...1 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0 + +11...1 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1,$$

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0$ приєднуються одиничні розряди 11...1: $y_{r+1} = y_{r+2} = ... = y_n = 1$. В іншому разі

$$Y_j = X_j + +00...0 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1 + +00...0 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0,$$

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1$ приєднуються нульові розряди $00...0$: $y_{r+1} = y_{r+2} = ... = y_n = 0$. В обох випадках загальна кількість розрядів отриманої двійкової рівноважної комбінації Y_j повинно становити n, $Y_j \in Y[n,k]$. Водночас інші розряди залишаються без змін: $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, …, $y_r = x_r$. Унаслідок $f_w^{-1}\left(\left(k, Y_j\right)\right) = A_j$ отримуємо шукану n-розрядну послідовність $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, де $A_j = Y_j$ і $a_1 = y_1$, $a_2 = y_2$, …, $a_n = y_n$.

Етап 12. Виконується декатенація n розрядів, починаючи з $(s+1)$-го розряду комбінації Z_j

$$Y_j = Z_j / \mathrm{Bin}\, k,$$

у такий спосіб витягується рівноважна комбінація Y_j зі стислого образу Z_j. Унаслідок $f_w^{-1}\left(\left(k, Y_j\right)\right) = A_j$ отримуємо шукану n-розрядну послідовність $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, де $A_j = Y_j$ і $a_1 = y_1$, $a_2 = y_2$, …, $a_n = y_n$.

Для реалізації етапу 11 процесу відновлення f_{ev}^{-1} рівноважних комбінацій $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$ на основі двійкових (n,k)-біноміальних чисел X_j можна також використовувати функцію $Y_j = f_b^{-1}\left(X_j\right)$ вигляду (2.1.6), яка вимагає обчислення $q < n$ або $l < n$. У цьому разі етапи 1–9 і 12 зберігають свій колишній зміст, а етапи 10 і 11 перетворюються до наступного вигляду.

Етап 10. Обчислюється у двійковому (n,k)-біноміальному числі $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ кількість $q = \sum_{i=1}^{r} x_i$ одиниць, $0 \le q \le k$.

Етап 11. Якщо $0 \le q < k$, то

$Y_j = X_j + +11...1 = x_1x_2...x_i...x_{r-1}0 + +11...1 = y_1y_2...y_i...y_{n-1}1$,

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1x_2...x_i...x_r$ приєднуються одиничні розряди $11...1$ доти, поки їх не стане $q = k$. В іншому разі

$Y_j = X_j + +00...0 = x_1x_2...x_i...x_{r-1}1 + +00...0 = y_1y_2...y_i...y_{n-1}0$,

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1x_2...x_i...x_r$ приєднуються нульові розряди $00...0$ доти, поки їх не стане $l = n - k$. В обох випадках маємо двійкову рівноважну комбінацію Y_j, $Y_j \in Y[n,k]$, значення інших розрядів якої $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, …, $y_r = x_r$. Унаслідок $f_w^{-1}\left(\left(k, Y_j\right)\right) = A_j$ отримуємо шукану n-розрядну послідовність $A_j = a_1a_2...a_i...a_n$, де $A_j = Y_j$ і $a_1 = y_1$, $a_2 = y_2$, …, $a_n = y_n$.

Під час виконання операцій порівняння над двійковими числами етапи 3 і 4 в моделі процесу відновлення f_{ev}^{-1} можна поєднати. Аналогічно поєднуються етапи 8 і 9, якщо здійснювати обчислення значень розрядів x_i двійкового (n,k)-біноміального числа X_j за правилами двійкової арифметики.

З метою зменшення часу відновлення A_j операції обчислення в етапах 1 і 6 можна замінити на операції пошуку значень s і m у таблицях із довільним доступом, у яких залежно від k і n містяться шукані значення чисел розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\,k$ і D_j.

Під час використання системи нерівностей (3.4.2) графік залежності довжини $l_j\left(f_{ev}\right) = f\left(k\right)$ (3.4.11) від значення k для результуючої комбінації Z_j за умови вихідного $n = 64$ матиме вигляд на рисунку 3.2. На нижній $L_e = \{0, 1, \ldots, 21\}$ і верхній $H_e = \{43, 44, \ldots, 64\}$ областях значень k двійкових одиниць, де реалізується нумераційне кодування f_{eg}, довжина $l_j\left(f_{ev}\right)$ комбінації Z_j змінюється в таких межах – $7 \le l_j\left(f_{ev}\right) \le 63$. На середній області $M_e = \{22, 23, \ldots, 42\}$, де реалізується векторне кодування f_v, значення $l_j\left(f_{ev}\right)$ є постійним і має максимальну величину, яка становить $l_j\left(f_{ev}\right) = 71$ двійкових розрядів.

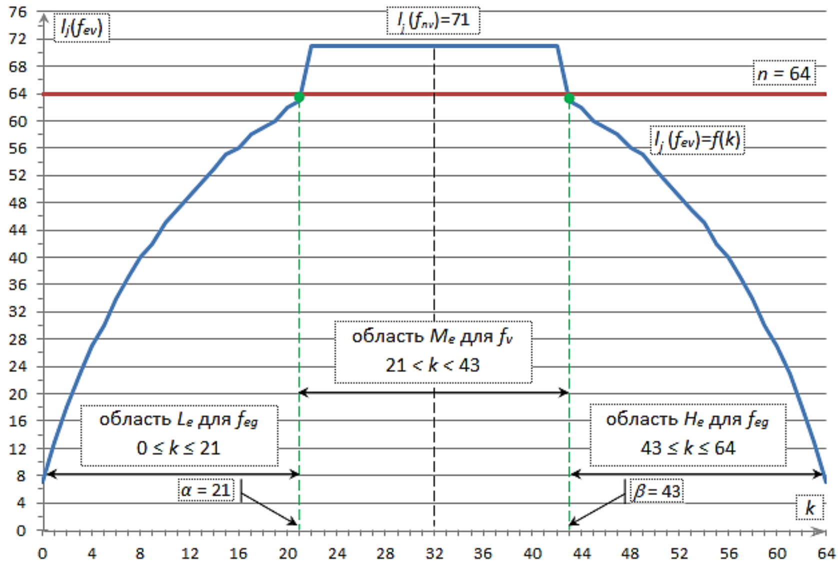

Рисунок 3.2 – Графіки $l_j\left(f_{ev}\right) = f\left(k\right)$ і $f\left(k\right) = n$,
області L_e, H_e для застосування f_{eg}
і M_e для застосування f_v за умови $n = 64$

Деякі результати розглянутого відображення $f_{ev} : A \to Z$ і, отже, $f_{ev}^{-1} : Z \to A$ для $n = 24$, де $A_j \in A = \{0,1\}^{24}$, $j = \overline{1, 2^{24}}$, наведені в таблиці 3.3. Система рівностей перемикання до складної функції кодування $f_k \circ f_w$ має вигляд $(k = 0) \vee (k = 24)$, система нерівностей перемикання до складної функції кодування $f_k \circ f_e \circ f_w$ (додаток Б)

$$\begin{cases} 0 < k \le 7 \\ 17 \le k < 24 \end{cases},$$

для інших значень $7 < k < 17$ застосовується складна функція кодування $f_k \circ f_v \circ f_w$. Відношення довжин двійкового подання A_j і Z_j для цієї таблиці змінюється в межах від 0,83 до 2,4, а їхнє середнє значення для всієї розглянутої таблиці становить приблизно 1,47.

Таблиця 3.3 – Відповідність між деякими двійковими A_j і Z_j за умови $n = 24$

Двійкова послідовність A_j	**Двійкова комбінація** Z_j	
	Bin k	D_j **або** Y_j
000000000000000000001001	00010	000000011
000000000000001000100010	00011	00001011111
0001000000110011100100110	01001	0001000000110011100100110
001000000001000000101000	00100	01100001001010
011001011001010000101111	01100	011001011001010000101111
100000000000000000000000	00001	10111
110100010100110111111111	10000	11010001010011011111111
111111111111111111111110	10111	10111

Як приклад розглянемо біноміальне нумераційно-векторне стиснення двійкової 24-розрядної послідовності

$$A_j = 001000000001000000101000,$$

використовуючи вищенаведену модель процесу стиснення f_{ev} на основі біноміальної числової функції (1.1.2) і системи нерівностей (3.4.2).

Етап 1. Визначається кількість s розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\,k$ числа k одиниць, $0 \le k \le 24$, вихідної 24-розрядної послідовності $A_j = 001000000001000000101000$

$$s = \lceil \log_2 25 \rceil = 5.$$

Етап 2. Проводиться обчислення числа k двійкових одиниць у вихідній 24-розрядній послідовності $A_j = 001000000001000000101000$

$$k = \sum_{i=1}^{24} a_i = 4,$$

у такий спосіб реалізуючи функцію $f_w\left(A_j\right) = \left(k, Y_j\right)$ і визначаючи клас рівноважних комбінацій $Y\left[24, 4\right]$, до якого належить $Y_j = A_j$, $Y_j \in Y\left[24, 4\right]$.

Етап 3. Виконується перетворення числа $k = 4$ одиниць до його двійкового вигляду $\mathrm{Bin}\,4 = 00100$, що складається із $s = 5$ розрядів.

Етап 4. Оскільки число $k = 4$ не задовольняє системі рівностей $\left(k = 0\right) \vee \left(k = 24\right)$, то виконується перехід до наступного етапу.

Етап 5. Оскільки $k = 4$ задовольняє системі нерівностей

$$\begin{cases} 0 < k \le 7 \\ 17 \le k < 24 \end{cases},$$

то наявне значення $n = 24$ та обчислене значення $k = 4$ являють собою параметри двійкової $(24, 4)$-біноміальної системи числення і здійснюється перехід до подальших етапів, починаючи з етапу 6, для реалізації кодування $f_k\left(f_e\left(Y_j\right)\right) = Z_j$, $Z_j \in Z_e$ – генерування $(24, 4)$-біноміального числа $X_j = f_b\left(Y_j\right)$, $X_j \in X[24, 4]$ і формування номера $D_j = \psi\left(X_j\right)$.

Етап 6. Обчислюється кількість m розрядів для двійкового подання номера $D_j \in D[24, 4] = \left\{\mathrm{Bin}\left(\overline{0, C_{24}^4 - 1}\right)\right\}$, відповідного $Y_j \in Y[24, 4]$

$$m = \left\lceil \log_2 C_{24}^4 \right\rceil = \lceil \log_2 10626 \rceil = 14.$$

Етап 7. Визначається у 24-розрядній рівноважній комбінації $Y_j = 001000000001000000101000$, яка має число $k = 4$ одиниць, значення останнього розряду $y_{24} = 0$.

Етап 8. Оскільки $y_{24} = 0$, то відповідне $(24, 4)$-біноміальне число $X_j \in X[24, 4]$ має вигляд

$$X_j = 001000000001000000101000/000 = \\ = 001000000001000000101,$$

тобто від комбінації $Y_j = 001000000001000000101000$ відкидаються всі нульові розряди, починаючи з $y_{24} = 0$, до появи першої двійкової одиниці $y_{21} = 1$, яка являє собою значення останнього розряду $x_{21} = y_{21} = 1$ $(24,4)$-біноміального числа $X_j = 001000000001000000101$. Водночас значення інших розрядів залишаються без змін, тобто $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = y_2 = 0$, …, $x_{20} = y_{20} = 0$.

Етап 9. Обчислюється еквівалент $\operatorname{dec} X_j$ двійкового $(24,4)$-біноміального числа $X_j = 001000000001000000101$ згідно з функцією (1.1.2)

$$\operatorname{dec} X_j = \sum_{i=1}^{24} x_i C_{24-i}^{4-q_i} = C_{21}^4 + C_{12}^3 + C_5^2 + C_3^1 =$$
$$= 5985 + 220 + 10 + 3 = 6218 .$$

Етап 10. Виконується перетворення кількісного еквівалента $\operatorname{dec} X_j = 6218$ до двійкового вигляду, що складається з $m = 14$ розрядів

$$D_j = \operatorname{Bin} 6218 = 01100001001010,$$

у такий спосіб отримуючи шуканий номер $D_j = 01100001001010$, – стислий образ 24-розрядної рівноважної комбінації $Y_j = 001000000001000000101000$.

Етап 11. Виконується конкатенація двійкових значення $\operatorname{Bin} 4 = 00100$ і номера $D_j = 01100001001010$, тобто кодування вигляду $f_k(D_j) = Z_j$ для випадку $(0 < k \le 7) \vee (17 \le k < 24)$

$$Z_j = 00100 + +01100001001010 = 0010001100001001010,$$

у такий спосіб отримуючи результуючу комбінацію $Z_j \in Z_e$.

Тепер розглянемо приклад біноміального нумераційно-векторного відновлення двійкової 24-розрядної послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_{24}$ (значення $n = 24$ є попередньо відомим) з комбінації-образу

$$Z_j = 0010001100001001010,$$

використовуючи вищенаведену модель процесу відновлення f_{ev}^{-1} на основі біноміальної числової функції (1.1.2) і системи нерівностей (3.4.2).

Етап 1. Визначається кількість s розрядів для двійкового подання $\text{Bin}\,k$ числа k одиниць, $0 \le k \le 24$, відновлюваної 24-розрядної послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_{24}$

$$s = \lceil \log_2 25 \rceil = 5.$$

Етап 2. Здійснюється декатенація $s = 5$ розрядів, починаючи з першого розряду комбінації $Z_j = 0010001100001001010$

$$\text{Bin}\,k = 0010001100001001010 / 01100001001010 = 00100,$$

у такий спосіб витягується $\text{Bin}\,k = 00100$ зі стислого образу Z_j, відповідного шуканій 24-розрядній послідовності A_j. Отже, реалізується $f_k^{-1}\left(Z_j\right) = \text{Bin}\,k$.

Етап 3. Виконується перетворення двійкового значення $\text{Bin}\,k = 00100$ до його десяткового еквівалента

$$k = \text{dec}\left(00100\right) = 4.$$

Етап 4. Оскільки $k = 4$ не задовольняє системі рівностей $(k = 0) \vee (k = 24)$, то виконується перехід до наступного етапу.

Етап 5. Оскільки $k=4$ задовольняє системі рівностей

$$\begin{cases} 0<k\le 7 \\ 17\le k<24 \end{cases},$$

то комбінація має вигляд $Z_j=\left(\operatorname{Bin}k, D_j\right)$ і для відновлення вигляду $A_j=f_{ev}^{-1}\left(Z_j\right)=f_w^{-1}\left(f_e^{-1}\left(D_j\right)\right)$ з використанням відповідного $\left(24,4\right)$-біноміального числа X_j здійснюється перехід до подальших етапів.

Етап 6. Обчислюється кількість m розрядів для двійкового подання номера $D_j\in D\left[24,4\right]=$ $=\left\{\operatorname{Bin}\left(\overline{0,C_{24}^4-1}\right)\right\}$, відповідного $Y_j\in Y\left[24,4\right]$

$$m=\left\lceil \log_2 C_{24}^4\right\rceil=\left\lceil \log_2 10626\right\rceil=14.$$

Етап 7. Здійснюється декатенація $m=14$ розрядів, починаючи з 6-го розряду комбінації $Z_j=0010001100001001010$

$$D_j=Z_j/00100=01100001001010,$$

у такий спосіб витягується двійковий номер $D_j=01100001001010$ зі стислого образу $Z_j=0010001100001001010$, відповідного 24-розрядній рівноважній комбінації $Y_j=y_1y_2...y_i...y_{24}$.

Етап 8. Виконується перетворення номера $D_j=01100001001010$ до його десяткового еквівалента

$$F_j=\operatorname{dec}\left(01100001001010\right)=6218.$$

Етап 9. Проводиться обчислення згідно з (3.1.8) значень розрядів $x_i \in \{0,1\}$ $(24,4)$-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 \dots x_i \dots x_r$, $X_j \in X[24,3]$, $r < 24$:

значення розряду x_1

$$F(1) = F_j = 6218\,,\ \rho_1 = C_{24-1}^{4-q_1} = C_{23}^{4} = 8855\,,$$

$$x_1 = \operatorname{sign}\left(\operatorname{sign}\left(F(1) - \rho_1\right) + 1\right) =$$
$$= \operatorname{sign}\left(\operatorname{sign}\left(6218 - 8855\right) + 1\right) = \operatorname{sign}\left(-1 + 1\right) = 0\ ;$$

значення розряду x_2

$$F(2) = F(1) - x_1 \rho_1 = 6218 - 0 \cdot 8855 = 6218 \neq 0,$$

$$\rho_2 = C_{24-2}^{4-q_2} = C_{22}^{4} = 7315\,,$$

$$x_2 = \operatorname{sign}\left(\operatorname{sign}\left(F(2) - \rho_2\right) + 1\right) =$$
$$= \operatorname{sign}\left(\operatorname{sign}\left(6218 - 7315\right) + 1\right) = \operatorname{sign}\left(-1 + 1\right) = 0\ ;$$

значення розряду x_3

$$F(3) = F(2) - x_2 \rho_2 = 6218 - 0 \cdot 7315 = 6218 \neq 0\,,$$

$$\rho_3 = C_{24-3}^{4-q_3} = C_{21}^{4} = 5985\,,$$

$$x_3 = \operatorname{sign}\left(\operatorname{sign}\left(F(3) - \rho_3\right) + 1\right) =$$
$$= \operatorname{sign}\left(\operatorname{sign}\left(6218 - 5985\right) + 1\right) = \operatorname{sign}\left(1 + 1\right) = 1\ ;$$

далі аналогічно триває обчислення значень розрядів $x_4 = x_5 = \dots = x_{11} = 0$, $x_{12} = 1$, $x_{13} = x_{14} = \dots = x_{18} = 0,$ $x_{19} = 1$, $x_{20} = 0$, $x_{21} = 1$. Оскільки $F(21) - x_{21}\rho_{21} = 3 - 1 \cdot 3 = 0$, то на розряді $x_{21} = 1$ застосування рекурентного співвідношення (3.1.8) закінчується. Оскільки водночас кількість отриманих двійкових одиниць $q = k = 4,$ то відповідно до системи кодоутворювальних обмежень (1.1.4) потрібно вважати $(24, 4)$-біноміальне число X_j довжини $r = 21 < 24$ сформованим

$$X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{21} = 001000000001000000101.$$

Етап 10. Визначається у двійковому $(24, 4)$-біноміальному числі $X_j = 001000000001000000101$ значення останнього розряду $x_{21} = 1$.

Етап 11. Оскільки $x_{21} = 1$, то

$$Y_j = X_j + +000 = 001000000001000000101 + +000 = \\ = 001000000001000000101000 \text{ ,}$$

тобто до двійкового $(24, 4)$-біноміального числа $X_j = 001000000001000000101$ приєднуються нульові розряди 000: $y_{22} = y_{23} = y_{24} = 0$. Водночас загальна кількість розрядів одержуваної двійкової рівноважної комбінації Y_j повинно становити $n = 24$, $Y_j \in Y[24, 4]$. Значення інших розрядів залишаються без змін: $y_1 = x_1 = 0$, $y_2 = x_2 = 0$, …, $y_{21} = x_{21} = 1$. Унаслідок $f_w^{-1}((4, Y_j)) = A_j$ отримуємо шукану 24-розрядну послідовність

$$A_j = 001000000001000000101000,$$

де $A_j = Y_j$ і $a_1 = y_1 = 0$, $a_2 = y_2 = 0$, …, $a_{24} = y_{24} = 0$.

3.5 Моделі адаптивного нумераційно-числового стиснення і відновлення двійкових даних

Введення процедури вибору методу кодування дозволяє досить істотно прискорити процеси стиснення і відновлення двійкових послідовностей на основі біноміальної числової функції. У зв'язку з цим метод біноміального нумераційно-векторного стиснення f_{ev} є більш швидкісним, ніж метод стиснення f_{eg} на основі біноміальної числової функції. Це особливо буде проявлятися для інформаційних джерел, що генерують двійкові послідовності з числами k одиниць, близьких за значеннями до граничних параметрів α_e і β_e.

Перемикання до векторного кодування f_v від нумераційного кодування f_e на основі біноміальної числової функції для випадку $\alpha_e < k < \beta_e$ (див. також (3.4.2)) дає можливість уникнути громіздких обчислень, пов'язаних із знаходженням вагових коефіцієнтів $C_{n-i}^{k-q_i}$ за великих значень n і k, що в кінцевому підсумку призводить до збільшення швидкості стиснення / відновлення і зменшення обсягу апаратно-програмних витрат. Платою за таке рішення є зниження загального коефіцієнта стиснення f_{ev}, оскільки спостерігається збільшення довжини результуючої комбінації завдяки додаванню $\mathrm{Bin}\,k$ до вихідної n-розрядної послідовності.

Компенсувати зниження показників стиснення, але внаслідок деякого зменшення швидкодії є можливим за допомогою перемикання згідно з (3.4.2) не до векторного кодування f_v, а до біноміального f_b на основі двійкових біноміальних чисел для вихідної двійкової n-розрядної послідовності $A_j \in A = \{0,1\}^n$, яка містить $0 \le k \le n$ одиниць.

Під час стиснення A_j необхідно використовувати функцію f_w, яка ставить у відповідність вихідній послідовності A_j вибірку (k, Y_j), де $Y_j = A_j$. Далі, якщо обчислене значення k задовольняє системі нерівностей (3.4.2), то для кодування послідовності $A_j = Y_j \in Y[n,k]$ буде використовуватися нумераційне кодування f_e на основі біноміальної числової функції. Якщо для значення k виконується нерівність вигляду $\alpha_e < k < \beta_e$, то реалізується метод біноміального кодування f_b на основі двійкових біноміальних чисел. Водночас в обох випадках до комбінацій, які кодуються, для однозначного відновлення стислої послідовності додається двійкове число k одиниць – $\mathrm{Bin}\,k$, тобто виконується додаткове кодування f_k. Якщо ж значення k задовольняє системі рівностей $(k=0) \vee (k=n)$, то кодована результуюча комбінація буде складатися тільки з $\mathrm{Bin}\,k$, тобто використовується лише метод кодування f_k.

Отже, розглянемо відображення вигляду

$$f_{be} : A \to Z ,$$

яке задається відповідною функцією

$$Z_j = f_{be}(A_j),$$

де $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, $A_j \in A = \{0,1\}^n$, а $Z_j \in Z$ може набувати вигляду $Z_j = (\mathrm{Bin}\,k, D_j)$, $Z_j = (\mathrm{Bin}\,k, X_j)$ або $Z_j = \mathrm{Bin}\,k$, $j = \overline{1, 2^n}$. Нижченаведена теорема 3.9 наводить властивості відображення f_{be} і спосіб його реалізації.

Теорема 3.9. Будь-якій двійковій n-розрядній послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n \in A$ можна поставити у взаємну однозначну відповідність за допомогою відображень f_{be} і f_{be}^{-1} двійкову комбінацію $Z_j \in Z$ такого вигляду:

1) якщо $(0 < k \le \alpha_e) \vee (n - \alpha_e \le k < n)$, то

$$Z_j = \mathrm{Bin}\, k + +D_j, \tag{3.5.1}$$

де $k = \sum_{i=1}^{n} a_i$ і $D_j \in D[n,k] = \left\{ \mathrm{Bin}\left(\overline{0, C_n^k - 1} \right) \right\}$;

2) якщо $\alpha_e < k < n - \alpha_e$, то

$$Z_j = \mathrm{Bin}\, k + +X_j, \tag{3.5.2}$$

де X_j – двійкове (n,k)-біноміальне число, $X_j \in X[n,k]$;

3) в іншому разі, якщо $(k = 0) \vee (k = n)$, то

$$Z_j = \mathrm{Bin}\, k. \tag{3.5.3}$$

Доведення. Візьмемо до уваги, що на області визначення $(0 \le k \le \alpha_e) \vee (n - \alpha_e \le k \le n)$ відображення f_{be} і f_{be}^{-1}, які розглядаються, являють собою звуження відповідних відображень f_{eg} і f_{eg}^{-1}: $f_{be}(A_j) = f_{eg}(A_j)$, $f_{be}^{-1}(Z_j) = f_{eg}^{-1}(Z_j)$. Але взаємна однозначність f_{eg} і f_{eg}^{-1} вже обґрунтована теоремою 3.4. Отже, випадки (3.5.1) і (3.5.3) умов теореми 3.9 підпадають під дію раніше доведеної теореми 3.4.

На області визначення $\alpha_e < k < n - \alpha_e$ відображення f_{be} і f_{be}^{-1} також являють собою звуження, але вже відображень f_b і f_b^{-1}: $f_{be}\left(A_j\right) = f_b\left(A_j\right)$, $f_{be}^{-1}\left(Z_j\right) = f_b^{-1}\left(Z_j\right)$. Але взаємна однозначність f_b і f_b^{-1} вже обґрунтована теоремами 2.1, 2.2 і 2.3. Отже, випадок (3.5.2) умов теореми 3.9 зазнає дії раніше доведених теорем 2.1, 2.2 і 2.3.

Отже, твердження взаємної однозначності прямого f_{be} і зворотного f_{be}^{-1} відображень на всьому діапазоні $0 \le k \le n$ є справедливим. **Теорему доведено.**

Наслідок. Відображення $f_{be} : A \to Z$ є бієктивним.

Насправді, кожний елемент A_j має єдиний образ, а кожний елемент Z_j – єдиний прообраз для всіх $A_j \in A$ і $Z_j \in Z$. Звідси випливає бієктивність відображення f_{be}.

Об’єднуючи в одну систему рівностей відношення (3.5.1), (3.5.2) і (3.5.3), для результуючої комбінації Z_j отримуємо

$$Z_j = \begin{cases} \operatorname{Bin} k, \ \left(k = 0\right) \vee \left(k = n\right) \\ \operatorname{Bin} k + +D_j, \ \left(0 < k \le \alpha_e\right) \vee \left(\beta_e \le k < n\right) \\ \operatorname{Bin} k + +X_j, \ \alpha_e < k < \beta_e \ . \end{cases} \tag{3.5.4}$$

Способи практичної реалізації відображень f_{be} і f_{be}^{-1}, указаних у теоремі 3.9, можуть бути різними. Вибрані підходи до побудови f_{be} і f_{be}^{-1}, розроблені методи кодування і моделі процесів, які формуються для них, у кінцевому підсумку впливають на швидкодію та обсяг апаратно-програмних витрат запропонованого методу стиснення даних, що використовує перемикання між біноміальним нумераційним кодуванням f_e і кодуванням f_b на основі двійкових біноміальних чисел.

Визначення 3.4. *Методом нумераційно-числового стиснення* f_{be} *на основі біноміальної числової функції (або біноміального нумераційно-числового стиснення) називається відображення*

$$f_{be} : A \to Z ,$$

яке задається такою складною функцією

$$f_{be} = \begin{cases} f_k \circ f_w, \ (k=0) \vee (k=n) \\ f_k \circ f_e \circ f_w, \ (0 < k \le \alpha_e) \vee (\beta_e \le k < n) \\ f_k \circ f_b \circ f_w, \ \alpha_e < k < \beta_e \ , \end{cases} \qquad (3.5.5)$$

де A *– множина вихідних двійкових* n *-розрядних послідовностей* A_j

$$A_j \in A = \{0,1\}^n , \ j = \overline{1, 2^n} , \ A = \bigcup_{k=0}^{n} Y[n,k],$$

$$Y[n,k'] \cap Y[n,k''] = \varnothing , \ k' \ne k'' , \ 0 \le k', k'' \le n ;$$

Z *– множина результуючих послідовностей* Z_j :

$$Z = Z_o \cup Z_e \cup Z_b ,$$

$$Z_o = Q \times \varnothing = \left\{ Z_j / Z_j = \mathrm{Bin}\, k, (k=0) \vee (k=n) \right\},$$

$$Z_e = Q \times D[n,k] =$$
$$= \left\{ Z_j / Z_j = \left(\mathrm{Bin}\, k, D_j\right), (0 < k \le \alpha_e) \vee (\beta_e \le k < n) \right\},$$

$$Z_b = Q \times X[n,k] = \left\{ Z_j / Z_j = \left(\mathrm{Bin}\, k, X_j\right), \alpha_e < k < \beta_e \right\} ,$$

$$Q = \left\{ \mathrm{Bin}\, k \,/\, 0 \le k \le n \right\},\ D_j \in D\left[n,k\right] = \left\{ \mathrm{Bin}\left(\overline{0, C_n^k - 1} \right) \right\},$$

$$Y_j \in Y\left[n,k\right],\ Y_j = f_w\left(A_j\right);$$

f_k *– функція* $Z_j = f_k\left(Y_j\right)$*, яка ставить у відповідність рівноважній комбінації* $Y_j = A_j$ *двійковий запис* $\mathrm{Bin}\, k$ *числа* k *одиниць, де* $\left(k=0\right) \vee \left(k=n\right)$*, і визначає відображення вигляду*

$$f_k : Y\left[n,k\right] \to Z_o,$$

або функція $Z_j = f_k\left(D_j\right)$*, яка ставить у відповідність двійковому номеру* D_j *результуючу послідовність* $Z_j = \mathrm{Bin}\, k + +D_j$*, якщо* $\left(0 < k \le \alpha_e\right) \vee \left(\beta_e \le k < n\right)$*, і визначає відображення вигляду*

$$f_k : D\left[n,k\right] \to Z_e,$$

або функція $Z_j = f_k\left(X_j\right)$*, яка ставить у відповідність двійковому* $\left(n,k\right)$*-біноміальному числу* X_j *результуючу послідовність* $Z_j = \mathrm{Bin}\, k + +X_j$*, якщо* $\alpha_e < k < \beta_e$*, і визначає відображення вигляду*

$$f_k : X\left[n,k\right] \to Z_b;$$

$f_e = \psi \circ f_b$ *– складна функція* $D_j = f_e\left(Y_j\right) = \psi\left(f_b\left(Y_j\right)\right)$*, яка ставить у відповідність рівноважній комбінації* Y_j *на основі біноміальної числової функції її двійковий номер* $D_j \in D\left[n,k\right]$ *і визначає відображення вигляду*

$$f_e : Y[n,k] \to D[n,k];$$

f_b – *функція* $X_j = f_b(Y_j)$, *яка ставить у відповідність рівноважній комбінації* Y_j *двійкове* (n,k)*-біноміальне число* $X_j \in X[n,k]$ і *визначає біноміальне відображення вигляду*

$$f_b : Y[n,k] \to X[n,k];$$

f_w – *функція* $Y_j = f_w(A_j)$, *яка ставить у відповідність вихідній послідовності* A_j *упорядковану вибірку вигляду* (k, Y_j), *де* $Y_j = A_j$, *і визначає відображення*

$$f_w : A \to M,$$

$$M = \{(k, Y_j) / 0 < k < n, Y_j \in Y[n,k]\}.$$

На підставі визначення 3.4 і вираження (3.5.5) складну функцію, яка реалізує відображення $f_{be} : A \to Z$, можна записати так:

$$Z_j = f_{be}(A_j) = \\ = \begin{cases} f_k(f_w(A_j)), & (k=0) \vee (k=n) \\ f_k(f_e(f_w(A_j))), & (0 < k \le \alpha_e) \vee (\beta_e \le k < n) \\ f_k(f_b(f_w(A_j))), & \alpha_e < k < \beta_e \,. \end{cases} \qquad (3.5.6)$$

Зі свого боку, зворотне відображення $f_{be}^{-1} : Z \to A$, яке задається зворотною складною функцією

$$f_{be}^{-1} = \\ = \begin{cases} f_w^{-1} \circ f_k^{-1}, \ (k=0) \vee (k=n) \\ f_w^{-1} \circ f_e^{-1} \circ f_k^{-1}, \ (0 < k \le \alpha_e) \vee (\beta_e \le k < n) \\ f_w^{-1} \circ f_b^{-1} \circ f_k^{-1}, \ \alpha_e < k < \beta_e \ , \end{cases} \tag{3.5.7}$$

являє собою відновлення з урахуванням наявного значення k вихідних двійкових послідовностей A_j. У разі $(k=0) \vee (k=n)$ відновлення A_j проводиться на основі $\mathrm{Bin}\,k$, за умови $(0 < k \le \alpha_e) \vee (\beta_e \le k < n)$ – на основі $\mathrm{Bin}\,k$ і двійкових номерів $D_j \in D[n,k]$ із використанням біноміальної числової функції (1.1.2), а за умови $\alpha_e < k < \beta_e$ – на основі $\mathrm{Bin}\,k$ і відповідного двійкового біноміального числа X_j – з використанням співвідношення (2.1.3). Такий вид відновлення будемо називати нумераційно-числовим на основі біноміальної числової функції, або скорочено нумераційно-числовим. На підставі (3.5.6) складну функцію, яка реалізує зворотне відображення $f_{be}^{-1} : Z \to A$, можна виразити ще як

$$A_j = f_{be}^{-1}(Z_j) = \\ = \begin{cases} f_w^{-1}\left(f_k^{-1}(Z_j)\right), (k=0) \vee (k=n) \\ f_w^{-1}\left(f_e^{-1}\left(f_k^{-1}(Z_j)\right)\right), (0 < k \le \alpha_e) \vee (\beta_e \le k < n) \\ f_w^{-1}\left(f_b^{-1}\left(f_k^{-1}(Z_j)\right)\right), \alpha_e < k < \beta_e \ . \end{cases} \tag{3.5.8}$$

Довжина $l_j(f_{be})$ результуючих комбінацій Z_j з урахуванням системи нерівностей (3.5.4) обчислюється як

$$l_j\left(f_{be}\right)=$$
$$=\begin{cases} s, & \left(k=0\right)\vee\left(k=n\right) \\ s+\left\lceil \log_2 C_n^k \right\rceil, & \left(0<k\le\alpha_e\right)\vee\left(\beta_e\le k<n\right) \\ s+r_j, & \alpha_e<k<\beta_e\ , \end{cases} \quad (3.5.9)$$

де $s=\left\lceil \log_2\left(n+1\right)\right\rceil$.

Способи реалізації складних функцій (3.5.6) і (3.5.8) на підобласті визначення, коли $\left(k=0\right)\vee\left(k=n\right)$ і $\left(0<k\le\alpha_e\right)\vee\left(\beta_e\le k<n\right)$, для методу біноміального нумераційно-числового стиснення f_{be} є аналогічними способам побудови функцій (3.2.4) або (3.2.6) для методу узагальненого стиснення f_{eg} на основі біноміальної числової функції (1.1.2).

Способи реалізації складних функцій (3.5.6) і (3.5.8) на підобласті визначення, коли $\alpha_e<k<\beta_e$, ідентичні тим, що використовуються для побудови методів узагальненого стиснення f_{bg} на основі двійкових біноміальних чисел.

З теореми 3.4, яка вказує та обґрунтовує методи реалізації відповідності, сформульованої теоремою 3.9, а також із власне теореми 3.9, випливають моделі процесів біноміального нумераційно-числового стиснення f_{be} і відновлення f_{be}^{-1} двійкових послідовностей.

Моделювання процесу стиснення f_{be} двійкових послідовностей $A_j=a_1a_2...a_i...a_n$, $A_j\in A=\{0,1\}^n$, $j=\overline{1,2^n}$ здійснюється на основі теорем 3.4 і 3.9, функції (2.1.1) і складається з таких етапів.

Етап 1. Визначається кількість s розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\,k$ числа k одиниць, $0 \le k \le n,$ вихідної n-розрядної послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$

$$s = \left\lceil \log_2 \left(n+1 \right) \right\rceil .$$

Етап 2. Проводиться обчислення числа k двійкових одиниць у вихідній n-розрядній послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$

$$k = \sum_{i=1}^{n} a_i \ ,$$

у такий спосіб реалізуючи функцію $f_w \left(A_j \right) = \left(k, Y_j \right)$ і визначаючи клас $Y \left[n, k \right]$ рівноважних комбінацій, до якого належить $Y_j \in Y \left[n, k \right]$, $Y_j = A_j$.

Етап 3. Виконується перетворення числа k одиниць до його двійкового вигляду $\mathrm{Bin}\,k$, що складається із s розрядів.

Етап 4. Якщо число k задовольняє системі рівностей $\left(k = 0 \right) \vee \left(k = n \right)$, то результуючою буде комбінація вигляду $Z_j = \mathrm{Bin}\,k$, $Z_j \in Z_o$. В іншому разі виконується перехід до наступного етапу. В іншому разі наявне значення n і обчислене значення k являють собою параметри двійкової $\left(n, k \right)$-біноміальної системи числення і виконується перехід до наступного етапу.

Етап 5. Визначається в n-розрядній рівноважній комбінації $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$, що має число k одиниць, значення останнього розряду y_n.

Етап 6. Якщо $y_n = 0$, то

$$X_j = Y_j / 00...0 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0 / 00...0 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1,$$

тобто від комбінації $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0$ відкидаються всі нульові розряди, починаючи з $y_n = 0$, до появи першої двійкової одиниці $y_r = 1$, котра буде являти собою значення останнього розряду $x_r = y_r = 1$ (n, k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1$. В іншому разі

$$X_j = Y_j / 11...1 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1 / 11...1 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0,$$

тобто від комбінації $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1$ відкидаються всі одиничні розряди, починаючи з $y_n = 1$, до появи першого двійкового нуля $y_r = 0$, котрий являтиме собою значення останнього розряду $x_r = y_r = 0$ (n, k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0$. Водночас в обох випадках інші розряди залишаються без змін: $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, …, $x_{r-1} = y_{r-1}$.

Етап 7. Якщо число k задовольняє системі нерівностей

$$\begin{cases} 0 < k \le \alpha_e \\ \beta_e \le k < n \end{cases},$$

то здійснюється перехід до подальших етапів для реалізації кодування вигляду $f_k\left(f_e\left(Y_j\right)\right) = Z_j$, $Z_j \in Z_e$. В іншому разі виконується перехід до етапу 12 для реалізації кодування вигляду $f_k\left(f_b\left(Y_j\right)\right) = Z_j$, $Z_j \in Z_b$.

Етап 8. Обчислюється кількість m розрядів для двійкового подання номера $D_j \in D[n,k] = \left\{\mathrm{Bin}\left(\overline{0, C_n^k - 1}\right)\right\}$, відповідного $Y_j \in Y[n,k]$

$$m = \left\lceil \log_2 C_n^k \right\rceil.$$

Етап 9. Обчислюється кількісний еквівалент $\mathrm{dec}\, X_j$ двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ відповідно до числової функції (1.1.2)

$$\mathrm{dec}\, X_j = \sum_{i=1}^{r} x_i C_{n-i}^{k-q_i} \ .$$

Етап 10. Виконується перетворення кількісного еквівалента $\mathrm{dec}\, X_j$ до його двійкового вигляду, що складається з m розрядів

$$D_j = \mathrm{Bin}\left(\mathrm{dec}\, X_j\right),$$

у такий спосіб отримуючи шуканий номер $D_j \in D[n,k] = \left\{\mathrm{Bin}\left(\overline{0, C_n^k - 1}\right)\right\}$ – стислий образ вихідної n-розрядної послідовності $Y_j = y_1 y_2 ... y_i ... y_n$.

Етап 11. Виконується конкатенація двійкових значення $\mathrm{Bin}\, k$ і номера D_j, тобто кодування вигляду $f_k\left(D_j\right) = Z_j$ для випадку $\left(0 < k \le \alpha_e\right) \vee \left(\beta_e \le k < n\right)$

$$Z_j = \mathrm{Bin}\, k + +D_j \,,$$

у такий спосіб отримуючи результуючу комбінацію $Z_j \in Z_e$.

Етап 12. Виконується конкатенація двійкових значення $\mathrm{Bin}\,k$ і (n,k)-біноміального числа $X_j \in X[n,k]$, тобто кодування вигляду $f_k(X_j) = Z_j$, для випадку $\alpha_e < k < \beta_e$

$$Z_j = \mathrm{Bin}\,k + + X_j,$$

у такий спосіб отримуючи результуючу комбінацію $Z_j \in Z_b$.

У моделі стиснення f_{be} можна поєднати етапи 2 і 3 за умови використання двійкового рахунку, а також етапи 9 і 10 за умови подання вагових коефіцієнтів $C_{n-i}^{k-q_i}$ у двійковому вигляді і проведення операцій у числовій функції (1.1.2) за правилами двійкової арифметики.

Моделювання процесу відновлення f_{be}^{-1} послідовностей $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, $A_j \in A = \{0,1\}^n$, $j = \overline{1,2^n}$ з комбінацій-образів Z_j, $Z_j \in Z_o \cup Z_e \cup Z_b$ здійснюється на основі теорем 3.4 і 3.9, функції (2.1.3) і складається з таких етапів.

Етап 1. Визначається кількість s розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\,k$ числа k одиниць, $0 \le k \le n$, вихідної n-розрядної послідовності $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$

$$s = \left\lceil \log_2 (n+1) \right\rceil.$$

Етап 2. Здійснюється декатенація s розрядів, починаючи з першого розряду комбінації Z_j

$$\mathrm{Bin}\,k = Z_j / D_j, \ \mathrm{Bin}\,k = Z_j / X_j \ \text{або} \ \mathrm{Bin}\,k = Z_j,$$

у такий спосіб витягується $\mathrm{Bin}\,k = z_1 z_2 ... z_s$ зі стислого образу Z_j, відповідного n-розрядній послідовності A_j.

Остання рівність є випадком, коли тільки $\mathrm{Bin}\,k$ становить образ нульової або одиничної A_j. Отже, реалізується декодування $f_k^{-1}\left(Z_j\right)$.

Етап 3. Виконується перетворення двійкового значення $\mathrm{Bin}\,k$ до його десяткового еквівалента

$$k = \mathrm{dec}\left(\mathrm{Bin}\,k\right).$$

Етап 4. Якщо для значення k виконується $\left(k=0\right)\vee\left(k=n\right)$, то комбінація, що перетворюється, має вигляд $Z_j = \mathrm{Bin}\,k$ і тоді формується вихідна послідовність

$$A_j = f_{be}^{-1}\left(Z_j\right) = f_w^{-1}\left(f_k^{-1}\left(Z_j\right)\right) = f_w^{-1}\left(\mathrm{Bin}\,n\right) = 11...1$$

або

$$A_j = f_{be}^{-1}\left(Z_j\right) = f_w^{-1}\left(f_k^{-1}\left(Z_j\right)\right) = f_w^{-1}\left(\mathrm{Bin}\,0\right) = 00...0\,.$$

В іншому разі виконується перехід до етапу 5.

Етап 5. Якщо для значення k виконується

$$\begin{cases} 0 < k \le \alpha_e \\ \beta_e \le k < n\,, \end{cases}$$

то комбінація має вигляд $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\,k, D_j\right)$ і для відновлення вигляду $A_j = f_{be}^{-1}\left(Z_j\right) = f_w^{-1}\left(f_e^{-1}\left(D_j\right)\right)$ з використанням відповідного $\left(n,k\right)$-біноміального числа X_j, здійснюється перехід до подальших етапів. В іншому разі $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\,k, X_j\right)$ і для відображення вигляду $A_j = f_{be}^{-1}\left(Z_j\right) = f_w^{-1}\left(f_b^{-1}\left(X_j\right)\right)$ виконується перехід до етапу 10.

Етап 6. Обчислюється кількість m розрядів для двійкового подання номера $D_j \in D[n,k] = = \left\{ \mathrm{Bin}\left(\overline{0, C_n^k - 1} \right) \right\}$, відповідного $Y_j \in Y[n,k]$

$$m = \left\lceil \log_2 C_n^k \right\rceil.$$

Етап 7. Здійснюється декатенація m розрядів, починаючи із $(s+1)$-го розряду комбінації Z_j

$$D_j = Z_j / \mathrm{Bin}\, k \,,$$

у такий спосіб витягується двійковий номер D_j зі стислого образу Z_j, відповідного рівноважній комбінації Y_j.

Етап 8. Виконується перетворення двійкового номера D_j до його десяткового еквівалента

$$F_j = \mathrm{dec}\, D_j \,.$$

Етап 9. Проводиться обчислення значень розрядів $x_i \in \{0,1\}$

$$x_i = \mathrm{sign}\left(\mathrm{sign}\left(F(i) - \rho_i \right) + 1 \right),$$

де $F(1) = F_j$, $F(i+1) = F(i) - x_i \rho_i$, $\rho_i = C_{n-i}^{k-q_i}$, у такий спосіб формуючи (n,k)-біноміальне число $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$, $X_j \in X[n,k]$, $r < n$. Обчислення x_i триває доти, поки $F(i) - x_i \rho_i = 0$. Далі здійснюється перехід до етапу 11.

Етап 10. Виконується декатенація r розрядів, починаючи із $(s+1)$-го розряду комбінації Z_j

$$X_j = Z_j / \mathrm{Bin}\, k ,$$

у такий спосіб витягується двійкове (n,k)-біноміальне число $X_j = z_{s+1} z_{s+2} ... z_{s+r} = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$, $X_j \in X[n,k]$, $r < n$ зі стислого образу Z_j. Витягання X_j виконується доти, поки не виявиться k-та одиниця або $(n-k)$-й нуль згідно із системами (1.1.3) і (1.1.4) кодоутворювальних обмежень для двійкових (n,k)-біноміальних чисел.

Етап 11. Визначається у двійковому (n,k)-біноміальному r-розрядному числі $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ значення останнього розряду x_r.

Етап 12. Якщо $x_r = 0$, то

$$Y_j = X_j + +11...1 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0 + +11...1 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 1,$$

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 0$ приєднуються одиничні розряди 11...1: $y_{r+1} = y_{r+2} = ... = y_n = 1$. В іншому разі

$$Y_j = X_j + +00...0 = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1 + +00...0 = y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1} 0,$$

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{r-1} 1$ приєднуються нульові розряди $00...0$: $y_{r+1} = y_{r+2} = ... = y_n = 0$. В обох випадках загальна кількість розрядів отриманої двійкової рівноважної комбінації Y_j повинно становити n, $Y_j \in Y[n,k]$. Водночас значення інших розрядів залишаються без змін: $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, …, $y_r = x_r$. Унаслідок $f_w^{-1}\left(\left(k, Y_j\right)\right) = A_j$ отримуємо шукану

n-розрядну послідовність $A_j = a_1 a_2 \ldots a_i \ldots a_n$, де $A_j = Y_j$ і $a_1 = y_1$, $a_2 = y_2$, …, $a_n = y_n$.

Для реалізації етапу 12 процесу відновлення f_{be}^{-1} рівноважних комбінацій $Y_j = y_1 y_2 \ldots y_i \ldots y_n$ на основі двійкових (n,k)-біноміальних чисел X_j можна також використовувати функцію $Y_j = f_b^{-1}\left(X_j\right)$ вигляду (2.1.6), яка вимагає обчислення $q < n$ або $l < n$. У цьому разі етапи 1–10 зберігають свій колишній зміст, а етапи 11 і 12 перетворюються до наступного вигляду.

Етап 11. Обчислюється у двійковому (n,k)-біноміальному числі $X_j = x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r$ кількість $q = \sum_{i=1}^{r} x_i$ одиниць, $0 \le q \le k$.

Етап 12. Якщо $0 \le q < k$, то

$$Y_j = X_j + +11\ldots1 = x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 0 + +11\ldots1 = y_1 y_2 \ldots y_i \ldots y_{n-1} 1,$$

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r$ приєднуються одиничні розряди 11...1 доти, поки їх не стане $q = k$. В іншому разі

$$Y_j = X_j + +00\ldots0 = x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 1 + +00\ldots0 = y_1 y_2 \ldots y_i \ldots y_{n-1} 0,$$

тобто до двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r$ приєднуються нульові розряди 00...0 доти, поки їх не стане $l = n - k$. В обох випадках маємо вихідну рівноважну комбінацію Y_j, $Y_j \in Y[n,k]$, значення інших розрядів якої $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, …, $y_r = x_r$. Унаслідок

$f_w^{-1}\left(\left(k, Y_j\right)\right) = A_j$ отримуємо шукану n-розрядну послідовність $A_j = a_1 a_2 ... a_i ... a_n$, де $A_j = Y_j$ і $a_1 = y_1$, $a_2 = y_2$, …, $a_n = y_n$.

Під час виконання операцій порівняння над двійковими числами етапи 3 і 4 в моделі процесу відновлення f_{be}^{-1} можна поєднати. Аналогічно поєднуються етапи 8 і 9, якщо здійснювати обчислення значень розрядів x_i двійкового (n, k)-біноміального числа X_j за правилами двійковій арифметики.

З метою зменшення часу відновлення A_j операції обчислення в етапах 1 і 6 можна замінити на операції пошуку значень s і m у таблицях із довільним доступом, у яких залежно від k і n містяться шукані значення чисел розрядів для двійкового подання $\text{Bin}\,k$ і D_j.

Деякі результати розглянутого відображення $f_{be} : A \to Z$ і, отже, $f_{be}^{-1} : Z \to A$ для $n = 24$, де $A_j \in A = \{0,1\}^{24}$, $j = \overline{1, 2^{24}}$, наведені в таблиці 3.4. Система рівностей увімкнення складної функції кодування $f_k \circ f_w$ має вигляд $(k = 0) \vee (k = 24)$, система нерівностей перемикання до складної функції кодування $f_k \circ f_e \circ f_w$ (додаток А)

$$\begin{cases} 0 < k \le 7 \\ 17 \le k < 24 \end{cases},$$

для інших значень $7 < k < 17$ застосовується складна функція $f_k \circ f_b \circ f_w$. В основу побудови таблиці 3.4 закладені двійкові послідовності A_j з таблиці 3.3, яка демонструє результати відображення f_{ev}. Як свідчить порівняльний аналіз таблиць 3.3 і 3.4, за зміни відношення довжин двійкового подання A_j і Z_j у межах від 0,86 до 2,4 їхнє середнє значення, що відбиває ступінь стиснення для таблиці 3.4, є вже помітно кращим і становить приблизно 1,54.

Таблиця 3.4 – Відповідність між деякими двійковими A_j і Z_j за умови $n = 24$

Двійкова послідовність A_j	**Двійкова комбінація** Z_j	
	$\mathrm{Bin}\,k$	D_j **або** X_j
000000000000000000001001	00010	000000011
000000000000001000100010	00011	00001011111
000100000011001110010011 0	01001	0001000000110011100100011
001000000001000000101000	00100	01100001001010
011001011001010000101111	01100	011001011001010000010
100000000000000000000000	00001	10111
110100010100110111111111	10000	110100010100110
111111111111111111111110	10111	10111

Як приклад розглянемо біноміальне нумераційно-числове стиснення двійкової 24-розрядної послідовності

$$A_j = 110100010100110111111111,$$

використовуючи вищенаведену модель стиснення f_{be} на основі числової функції (1.1.2) і системи нерівностей (3.4.2).

Етап 1. Визначається кількість s розрядів для двійкового подання $\mathrm{Bin}\,k$ числа k одиниць, $0 \le k \le 24$, вихідної 24-розрядної послідовності $A_j = 110100010100110111111111$

$$s = \lceil \log_2 25 \rceil = 5.$$

Етап 2. Проводиться обчислення числа k двійкових одиниць у вихідній 24-розрядній послідовності $A_j = 110100010100110111111111$

$$k = \sum_{i=1}^{24} a_i = 16,$$

у такий спосіб реалізуючи функцію $f_w\left(A_j\right) = \left(k, Y_j\right)$ і визначаючи клас рівноважних комбінацій $Y[24,16]$, до якого належить $Y_j = A_j$, $Y_j \in Y[24,16]$.

Етап 3. Виконується перетворення числа $k = 16$ одиниць до його двійкового вигляду $\mathrm{Bin}16 = 10000$, який складається із $s = 5$ розрядів.

Етап 4. Оскільки число $k = 16$ не задовольняє системі рівностей $(k = 0) \vee (k = 24)$, то виконується перехід до наступного етапу.

Етап 5. Визначається у 24-розрядній рівноважній комбінації $Y_j = 110100010100110111111111$, яка має число $k = 16$ одиниць, значення останнього розряду $y_{24} = 1$.

Етап 6. Оскільки $y_{24} = 1$, то

$$Y_j = 110100010100110111111111/111111111 = \\ = 11010001010011\mathrm{0},$$

тобто від комбінації $Y_j = 110100010100110111111111$ відкидаються всі одиничні розряди, починаючи з $y_{24} = 1$, до появи першого двійкового нуля $y_{15} = 0$, який являє собою значення останнього розряду $x_{15} = y_{15} = 0$ $(24,16)$-біноміального числа $X_j = 110100010100110$. Водночас значення інших розрядів залишаються без змін, тобто $x_1 = y_1 = 1$, $x_2 = y_2 = 1$, …, $x_{14} = y_{14} = 1$.

Етап 7. Оскільки число $k=16$ не задовольняє системі нерівностей

$$\begin{cases} 0<k\le 7 \\ 17\le k<24 \end{cases},$$

то здійснюється перехід до етапу 12 для реалізації кодування вигляду $f_k\left(f_b\left(Y_j\right)\right)=Z_j$, $Z_j\in Z_b$.

Етап 12. Виконується конкатенація $\text{Bin}16=10000$ і $(24,16)$-біноміального числа $X_j=110100010100110$, відповідного $A_j=110100010100110111111111$, тобто реалізується кодування вигляду $f_k\left(X_j\right)=Z_j$ для випадку $7<k<17$

$$Z_j=\text{Bin}16++X_j=10000++110100010100110=$$
$$=10000110100010100110,$$

у такий спосіб отримуючи результат, – комбінацію $Z_j=10000110100010100110$.

Тепер розглянемо приклад біноміального нумераційно-числового відновлення двійкової 24-розрядної послідовності $A_j=a_1a_2...a_i...a_{24}$ (значення $n=24$ є попередньо відомим) з комбінації-образу

$$Z_j=10000110100010100110,$$

використовуючи вищенаведену модель процесу відновлення f_{be}^{-1} на основі біноміальної числової функції (1.1.2) і системи нерівностей (3.4.2).

Етап 1. Визначається кількість s розрядів для двійкового подання $\text{Bin}\,k$ числа k одиниць, $0\le k\le 24$, відновлюваної 24-розрядної послідовності $A_j=a_1a_2...a_i...a_{24}$

$$s = \lceil \log_2 25 \rceil = 5.$$

Етап 2. Здійснюється декатенація $s = 5$ розрядів, починаючи з першого розряду комбінації $Z_j = 1000011010001010 0110$

$$\mathrm{Bin}\,k = 1000011010001010 0110/110100010100110 = 10000,$$

у такий спосіб витягується $\mathrm{Bin}\,k = 10000$ зі стислого образу Z_j, відповідного шуканій 24-розрядній послідовності A_j. Отже, реалізується $f_k^{-1}\left(Z_j\right) = \mathrm{Bin}k$.

Етап 3. Виконується перетворення двійкового значення $\mathrm{Bin}\,k = 10000$ до його десяткового еквівалента

$$k = \mathrm{dec}\left(10000\right) = 16.$$

Етап 4. Оскільки $k = 16$ не задовольняє системі рівностей $\left(k = 0\right) \vee \left(k = 24\right)$, то виконується перехід до наступного етапу.

Етап 5. Оскільки $k = 16$ не задовольняє системі нерівностей

$$\begin{cases} 0 < k \le 7 \\ 17 \le k < 24 \end{cases},$$

то комбінація має вигляд $Z_j = \left(\mathrm{Bin}\,k, X_j\right)$ і для відновлення вигляду $A_j = f_{be}^{-1}\left(Z_j\right) = f_w^{-1}\left(f_b^{-1}\left(X_j\right)\right)$ з використанням відповідного $\left(24{,}16\right)$-біноміального числа X_j виконується перехід до етапу 10.

Етап 10. Виконується декатенація r розрядів, починаючи з шостого розряду комбінації Z_j

$$X_j = 10000110100010100110/10000 = 110100010100110,$$

у такий спосіб витягується двійкове $(24,16)$-біноміальне число $X_j = 110100010100110$, $X_j \in X[24,16]$, $r = 15 < n = 24$, зі стислого образу $Z_j = 1000011010001010 0110$. Вимання X_j виконується доти, поки не виявиться 8-й нуль або 16-та одиниця згідно із системами (1.1.3) і (1.1.4) кодоутворювальних обмежень для двійкових $(24,16)$-біноміальних чисел.

Етап 11. Визначається у двійковому $(24,16)$-біноміальному числі $X_j = 110100010100110$ значення останнього розряду $x_{15} = 0$.

Етап 12. Оскільки $x_{15} = 0$, то

$$Y_j = X_j + +111111111 = 110100010100110 + +111111111 = \\ = 110100010100110111111111,$$

тобто до двійкового $(24,16)$-біноміального числа $X_j = 110100010100110$ приєднуються одиничні розряди 111111111: $y_{16} = y_{17} = ... = y_{24} = 1$. Водночас загальна кількість розрядів одержуваної двійкової рівноважної комбінації Y_j повинна становити $n = 24$, $Y_j \in Y[24,16]$. Значення інших розрядів залишаються без змін: $y_1 = x_1 = 1$, $y_2 = x_2 = 1$, …, $y_{15} = x_{15} = 0$. Унаслідок $f_w^{-1}\left(\left(16, Y_j\right)\right) = A_j$ отримуємо шукану 24-розрядну послідовність

$$A_j = 110100010100110111111111,$$

де $A_j = Y_j$ і $a_1 = y_1 = 1$, $a_2 = y_2 = 1$, …, $a_{24} = y_{24} = 1$.

ВИСНОВКИ

Розроблені методи біноміального адаптивного стиснення мають за мету підвищення продуктивності інформаційних систем в умовах невизначеності статистичних характеристик двійкових даних або неможливості їхнього отримання за обмежень на обсяг часових та апаратно-програмних витрат.

Головним, що зв'язує подані автором методи стиснення, є застосування двійкових біноміальних чисел, генеровані біноміальними системами числення. Для першої групи методів вони слугують стиснутими образами інформаційних послідовностей. Для групи методів стиснення на основі біноміальної числової функції біноміальні числа є кодовими об'єктами проміжного етапу стискальних інформаційних перетворень. Отже, використання біноміальних чисел забезпечує, по-перше, стиснення двійкових комбінацій за мінімальних витрат часу, по-друге, прискорення стиснення за біноміальної нумерації двійкових даних, і, по-третє, адаптацію до затребуваних коефіцієнтів і часу стиснення. Останнє є можливим із зміною параметрів двійкових біноміальних чисел, практично безвитратним перемиканням між біноміально-нумераційним, біноміально-числовим і векторним кодуванням, а також переходом від однієї групи методів біноміального стиснення до іншої.

Для розроблення методів біноміального адаптивного стиснення набула подальшого розвитку та удосконалення теорія двійкових біноміальних систем числення. Уперше були отримані системи мінімальних кодоутворювальних обмежень та обґрунтована їхня ненадмірність і дієвість із погляду формування біноміальних чисел, удосконалена біноміальна числова функція з метою мінімізації обчислювальних витрат під час проведення біноміальної нумерації, а також визначена одна з основних характеристик двійкових біноміальних чисел – їхня середня кодова довжина.

Методи стиснення на основі двійкових біноміальних чисел розроблені як для двійкових рівноважних комбінацій, так і для інформаційних послідовностей загалом. Подальший розвиток цієї групи методів сприяв отриманню біноміально-векторного адаптивного стиснення двійкових даних на основі винайденого критерію переходу від числового кодування до векторного. Для кожного з методів цієї групи доведено взаємну однозначність відображення двійкових комбінацій і результуючих стиснутих образів та побудовані моделі процесів стиснення на основі двійкових біноміальних чисел. Застосування кожного з поданих методів стиснення на основі двійкових біноміальних чисел продемонстровано на практичних прикладах.

Методи стиснення на основі двійкових біноміальних чисел характеризуються високою швидкістю кодування й декодування двійкової інформації за достатньо прийнятних коефіцієнтів стиснення. Це обумовлюється використанням у моделях процесу стиснення простих операцій підрахунку кількості одиниць, перегляду значень кодових розрядів, конкатенації та деконкатенації частин кодових послідовностей. Вочевидь, практична реалізація вказаних методів у вигляді апаратних та/або програмних засобів теж є простою. За більш жорстких вимог до часу стиснення й відновлення пропонується перейти до біноміально-векторного стиснення на основі двійкових біноміальних чисел. У цьому разі очікується досить суттєве підвищення швидкості кодування й декодування та незначне зниження ступеня стиснення за додаткових малих обсягів витрат за умови практичної реалізації.

Методи стиснення на основі біноміальної числової функції також спрямовані на оперування як із двійковими рівноважними комбінаціями, так і з кодовими послідовностями загального виду. Визначений критерій ефективного використання двійкових номерів дозволив перейти до розроблення адаптивних методів на основі біноміальної числової функції – біноміальних нумераційно-векторного та нумераційно-числового стиснення. Для кожного з методів цієї групи також проведено доказування взаємної однозначності відображення двійкових комбінацій і результуючих стиснутих образів та побудовані моделі процесів стиснення на основі біноміальної числової функції. Особливості застосування методів стиснення цієї групи вичерпно проілюстровано на прикладах, що підтверджують їхню ефективність.

Методи стиснення на основі біноміальної числової функції, на відміну від попередніх, дають значно кращий коефіцієнт стиснення, але платою за це є помітно нижча швидкість кодування й декодування і підвищений обсяг витрат за умови реалізації на практиці. Суттєво більший час стиснення й відновлення пов'язаний із необхідністю обчислювати біноміальні коефіцієнти за умови використання числової функції. Особливо це відчувається за великих значень довжини та кількості одиниць оброблюваних двійкових послідовностей. Щоб скоротити час опрацьовування послідовностей, які стискаються, пропонується перейти до методів біноміальних нумераційно-векторного та нумераційно-числового стиснення. Водночас дещо знижується ступінь стиснення і маємо додаткові, але невеликі апаратні та/або програмні витрати. Метод нумераційно-числового стиснення на основі біноміальної числової функції дозволяє пом'якшити ефект зниження коефіцієнта стиснення за підвищеної швидкості оброблення двійкових даних. Водночас розширюється функціональність методу за допомогою перетворення послідовностей, які неефективно стискаються, у біноміальні числа для їхнього подальшого оброблення зовнішньою системою.

Потрібно зауважити, що стиснення на основі двійкових біноміальних чисел є складовою методів стиснення на основі біноміальної числової функції, а модель процесу із застосуванням біноміальних чисел повною мірою інтегрується в модель процесу стиснення із використанням біноміальної числової функції. Це дозволяє загалом розширити можливості адаптації до умов інформаційних перетворень і основних вимог параметрів стиснення і побудувати узагальнений адаптивний комплекс біноміального стиснення двійкової інформації.

Перспективою розвитку поданого в монографії наукового напряму є розроблення методів оцінювання ступеня біноміального стиснення та його часових характеристик з урахуванням різних видів моделей джерел двійкової інформації. З практичного погляду подальший розвиток методів біноміального адаптивного стиснення полягає в розробленні більш детальних алгоритмів стиснення, а також систем і пристроїв, що реалізують алгоритми. Доцільним, до того ж особливо перспективним, є реалізація систем і пристроїв адаптивного біноміального стиснення на базі програмованих логічних інтегральних схем.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Борисенко А. А. Методы синтеза информационных систем на основе позиционных чисел с неоднородной структурой : дис. на соиск. ученой степени д-ра техн. наук / А. А. Борисенко. – Харьков, 1991. – 303 с.

2. Борисенко А. А. Введение в теорию биномиального счета : монография / А. А. Борисенко. – Сумы : Университетская книга, 2004. – 88 с.

3. Борисенко А. А. Биномиальный счет. Теория и практика : монография / А. А. Борисенко. – Сумы : Университетская книга, 2004. – 170 с.

4. Борисенко А. А. Биномиальное кодирование : монография / А. А. Борисенко, И. А. Кулик. – Сумы : Изд-во СумГУ, 2010. – 206 с.

5. McAnlis Colt. Understanding Compression: Data Compression for Modern Developers / Colt McAnlis, Aleks Haecky. – O'Reilly Media, 2016. – 242 p.

6. Sayood K. Introduction to Data Compression / K. Sayood. – Morgan Kaufmann, 2018. – 790 p. URL: https://doi.org/10.1016/ C2015-0-06248-7.

7. Salomon David. Handbook of Data Compression / David Salomon, Giovanni Motta. – Springer, 2010. – 1383 p. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-84882-903-9.

8. Смирнов М. А. Обзор применения методов безущербного сжатия данных в СУБД. URL: http://compression.ru/download/articles/db/smirnov_2003_database_compression_review.pdf.

9. Grover Amit. Compression Techniques in Slow Internet Environment: Various Bandwidth Efficient Techniques / Amit Grover. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 164 p.

10. Seidler A. Jerzy. Information Systems and Data Compression / Jerzy A. Seidler. – Springer, 2013. – 494 p. URL: https://doi.org/10.1007/978-0-585-27999-2_6.

11. Кнут Д. Э. Искусство программирования. Т. 2. Получисленные алгоритмы / Д. Э. Кнут. – Москва : И. Д. Вильямс, 2018. – 832 с.

12. Кулик И. А. Арифметический подход к определению ограничений для двоичных биномиальных чисел / И. А. Кулик // 2004: Вторая междунар. науч. конф. «Современные методы кодирования в электронных системах», 26–27 октября 2004 : тез. докл. – Сумы, 2004. – С. 34–35.

13. Кулик И. А. О средней длине двоичных биномиальных чисел / И. А. Кулик // Вісник СумДУ. Серія «Технічні науки». – 2004. – № 12 (71). – С. 106–112.

14. Кулик И. А. Свойство вложенности двоичных биномиальных систем счисления / И. А. Кулик // Вісник СумДУ. Серія «Технічні науки». – 2005. – № 9 (81). – С. 12–21.

15. Кулик И. А. Алгоритм генерирования двоичных биномиальных чисел на основе минимальных систем кодообразующих ограничений / И. А. Кулик, В. Б. Чередниченко, С. В. Костель // Вісник СумДУ. Серія «Технічні науки». – 2008. – № 2. – С. 45–52.

16. Грэхем Л. Рональд. Конкретная математика. Математические основы информатики / Рональд Л. Грэхем, Дональд Э. Кнут, Орен Паташник. – Москва : И. Д. Вильямс, 2010. – 784 с.

17. Кнут Д. Э. Искусство программирования. Т. 1. Основные алгоритмы / Д. Э. Кнут. – Диалектика, 2020. − 720 с.

18. Johnson D. Peter Jr. Introduction to Information Theory and Data Compression / Peter D. Johnson Jr., Greg A. Harris, D. C. Hankerson. – Chapman and Hall/CRC, 2019. – 384 p. URL: https://doi.org/10.1201/9781420035278.

19. Drmota Michael. Redundancy of Lossless Data Compression for Known Sources by Analytic Methods /

Michael Drmota, Wojciech Szpankowski. – Now Publishers Inc., 2017. – 158 p. URL: https://doi.org/10.1561/9781680832853.

20. Кулик И. А. Использование биномиальных чисел для сжатия бинарных изображений / И. А. Кулик, С. В. Костель, Е. М. Скордина // Вісник СумДУ. Серія «Технічні науки». – 2009. – № 2. – С. 29–36.

21. Kulyk I. Development of data compressing coding methods on basis of binary binomial numbers / I. Kulyk, O. Berezhna, M. Shevchenko // Technology Audit and Production Reserves. – 2018. – № 2/2 (46) – P. 12–18. URL: https://doi.org/10.15587/2312-8372.2019.169897.

22. Кулик И. А. Генерирование кодов-сочетаний для решения информационных задач ИУС / И. А. Кулик, Е. М. Скордина, С. В. Костель // АСУ и приборы автоматики : Всеукраин. межведомст. сборник. 2011. – № 155. – С. 15–23.

23. Кулик І. А. Розробка інформаційно-керуючих систем на основі двійкової біноміальної системи числення / І. А. Кулик, М. С. Шевченко // Системи обробки інформації : збірник наукових праць. – Харків : Харківський національний університет Повітряних сил ім. Івана Кожедуба, 2020. – Вип. 2 (161). – С. 78–85. URL: https://doi.org/10.30748/ soi.2020.161.09.

24. Кулик И. А. Метод оценки границ применения сжатия на основе двоичных биномиальных чисел / И. А. Кулик, А. И. Новгородцев, М. С. Шевченко // Системи обробки інформації : збірник наукових праць. – Харків : Харківський національний університет Повітряних сил ім. Івана Кожедуба, 2019. – Вип. 2 (157). – С. 57–62. URL: https://doi.org/10.30748/soi.2019.157.07.

25. Андерсон А. Джеймс. Дискретная математика и комбинаторика / пер. с англ. ; Джеймс А. Андерсон. – Москва : Вильямс, 2019. – 960 с.

26. Клепко В. Вища математика в прикладах і задачах / В. Клепко, В. Голец. – Центр навч. літерат., 2019. – 594 с.

27. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры : учебник для вузов / А. И. Кострикин. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 272 с.

28. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – Москва : Наука, 1984. – 832 с.

29. Кулик И. А. Быстродействующий метод биноми-ального нумерационного кодирования / И. А. Кулик, С. В. Костель // АСУ и приборы автоматики : всеукраин. межведомст. сборник. – 2009. – № 149. – С. 66–77.

30. Kulyk I. Binary Image Compression Based on Binomial Numbers / O. Borysenko, I. Kulyk, S. Kostel, O. Skordina // Bulletin, Mathematics-Informatics-Physics. – Petroleum-Gas University of Ploieşti, 2010. – Vol. LXII. – No. 2. – P. 1–12.

31. Кулик И. А. Повышение производительности СУБД на основе биномиального сжатия информации / И. А. Кулик, С. В. Костель // Системи обробки інформації : збірник наукових праць. – Харків : Харківський університет повітряних сил ім. Івана Кожедуба, 2014. – Випуск 2 (118), Т. 2. – С. 45–48.

32. Kulyk I. Development of binary information compres-sion methods based on the binomial numerical function / I. Kulyk, O. Berezhna, A. Novhorodtsev, M. Shevchenko // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2021. – Vol. 3, No. 4 (111). – P. 6–13. URL: https://doi.org/10.15587/ 1729-4061.2021.234492.

33. Cover M. Thomas. Enumerative Source Encoding / Thomas M. Cover // IEEE Transactions on Information Theory, 1973. – Vol. IT-19, No. 1. – P. 73–77. URL: https://doi.org/10.1109/TIT.1973. 1054929.

34. Амелькин В. А. Методы нумерационного кодирования / В. А. Амелькин. – Новосибирск : Наука, 1986. – 155 с.

35. Задачин В. М. Чисельні методи : навчальний посібник / В. М. Задачин, І. Г. Конюшенко. – Харків : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 180 с.

36. Волонтир Л. О. Чисельні методи : навчальний посібник / Л. О. Волонтир, О. В. Зелінська, Н. А. Потапова, І. А. Чіков. – Вінниця : ВНАУ, 2020 – 322 с.

37. Кулик И. А. Определение ограничений для метода биномиального нумерационного сжатия / И. А. Кулик, С. В. Костель, Е. М. Скордина // Вісник СумДУ. Серія «Технічні науки». – 2011. – № 2. − С. 86–93.

38. Гутер Р. С. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта / Р. С. Гутер, Б. В. Овчинский. – Москва : Наука, 1970. – 432 с.

39. Кулик И. А. Вычисление числа сочетаний в биномиальных системах кодирования / И. А. Кулик, С. В. Костель, Е. М. Скордина // 12-й Міжнарод. молодіж. форум «Радіоелектроніка і молодь в XXI ст.» : тез. доп. / Харківський нац. ун-т радіоелектроніки. – Харків : ХНУРЕ, 2008. – С. 247.

40. Кулик И. А. Вычисление чисел сочетаний на основе двоично-канонического кодирования / И. А. Кулик, Е. М. Скордина // Друга міжнарод. наук. конф. «Теорія і методи обробки сигналів». – Київ : НАУ, 2008. – С. 72–73.

41. Кулик И. А. Метод вычисления биномиальных коэффициентов на основе канонического разложения чисел / И. А. Кулик, Е. М. Скордина // Вісник СумДУ. Серія «Технічні науки». – 2008. – № 1. – С. 158–165.

42. Костель С. В. Метод компактного размещения биномиальных коэффициентов в памяти / С. В. Костель // Вісник СумДУ. Серія «Технічні науки». – 2012. − № 1. – С. 94–99.

ДОДАТОК А
Граничні значення α_b і β_b для застосування методу стиснення f_b n-розрядних послідовностей на основі двійкових біноміальних чисел

Таблиця А.1 – Значення α_b * залежно від n

n	α_b	n	α_b	n	α_b	n	α_b	n	α_b
4	0,3	56	7,3	108	12,9	160	17,1	212	23
6	0,8	58	7,6	110	13,1	162	17,4	214	23,2
8	0,8	60	7,9	112	13,4	164	17,6	216	23,4
10	1,3	62	8,2	114	13,6	166	17,8	218	23,7
12	1,7	64	7,3	116	13,9	168	18	220	23,9
14	2,1	66	7,5	118	14,1	170	18,3	222	24,1
16	1,9	68	7,8	120	14,4	172	18,5	224	24,3
18	2,2	70	8	122	14,6	174	18,7	226	24,6
20	2,6	72	8,3	124	14,9	176	18,9	228	24,8
22	2,9	74	8,5	126	15,1	178	19,2	230	25
24	3,3	76	8,8	128	13,5	180	19,4	232	25,2
26	3,6	78	9	130	13,7	182	19,6	234	25,5
28	4	80	9,3	132	14	184	19,8	236	25,7
30	4,3	82	9,5	134	14,2	186	20,1	238	25,9
32	3,8	84	9,8	136	14,4	188	20,3	240	26,1
34	4,1	86	10,1	138	14,6	190	20,5	242	26,4
36	4,4	88	10,3	140	14,9	192	20,7	244	26,6

Продовження таблиці А.1

n	α_b	n	α_b	n	α_b	n	α_b	n	α_b
38	4,7	90	10,6	142	15,1	194	21	246	26,8
40	5	92	10,8	144	15,3	196	21,2	248	27
42	5,3	94	11,1	146	15,6	198	21,4	250	27,3
44	5,6	96	11,3	148	15,8	200	21,6	252	27,5
46	5,9	98	11,6	150	16	202	21,9	254	27,7
48	6,1	100	11,8	152	16,2	204	22,1	256	25
50	6,4	102	12,1	154	16,5	206	22,3		
52	6,7	104	12,3	156	16,7	208	22,5		
54	7	106	12,6	158	16,9	210	22,8		

* β_b обчислюється як $\beta_b = n - \alpha_b$.

ДОДАТОК Б
Граничні значення α_e і β_e числа k двійкових одиниць для застосування методу стиснення f_e n-розрядних послідовностей на основі біноміальної числової функції

Таблиця Б.1 – Значення α_e* залежно від n

n	α_e	n	α_e	n	α_e	n	α_e	n	α_e	n	α_e	n	α_e
1	0	43	14	85	32	127	51	169	69	211	88	253	108
2	0	44	15	86	32	128	50	170	69	212	89	254	108
3	0	45	15	87	33	129	50	171	70	213	89	255	109
4	0	46	16	88	33	130	51	172	70	214	90	256	107
5	0	47	16	89	3ё4	131	51	173	71	215	90	257	108
6	0	48	17	90	34	132	52	174	71	216	91	258	108
7	0	49	17	91	35	133	52	175	72	217	91	259	109
8	1	50	17	92	35	134	53	176	72	218	92	260	109
9	1	51	18	93	36	135	53	177	72	219	92	261	109
10	1	52	18	94	36	136	54	178	73	220	93	262	110
11	2	53	19	95	36	137	54	179	73	221	93	263	110
12	2	54	19	96	37	138	54	180	74	222	93	264	111
13	2	55	20	97	37	139	55	181	74	223	94	265	111
14	4	56	20	98	38	140	55	182	75	224	94	266	112
15	4	57	21	99	38	141	56	183	75	225	95	267	112
16	4	58	21	100	39	142	56	184	76	226	95	268	113
17	4	59	22	101	39	143	57	185	76	227	96	269	113
18	4	60	22	102	40	144	57	186	77	228	96	270	114
19	5	61	22	103	40	145	58	187	77	229	97	271	114

Продовження таблиці Б.1

n	α_e	n	α_e	n	α_e	n	α_e	n	α_e	n	α_e	n	α_e
20	5	62	23	104	41	146	58	188	78	230	97	272	115
21	6	63	23	105	41	147	59	189	78	231	98	273	115
22	6	64	22	106	41	148	59	190	78	232	98	274	116
23	7	65	23	107	42	149	60	191	79	233	99	275	116
24	7	66	23	108	42	150	60	192	79	234	99	276	116
25	7	67	24	109	43	151	60	193	80	235	100	277	117
26	8	68	24	110	43	152	61	194	80	236	100	278	117
27	8	69	25	111	44	153	61	195	81	237	100	279	118
28	9	70	25	112	44	154	62	196	81	238	101	280	118
29	9	71	26	113	45	155	62	197	82	239	101	281	119
30	10	72	26	114	45	156	63	198	82	240	102	282	119
31	10	73	26	115	46	157	63	199	83	241	102	283	120
32	10	74	27	116	46	158	64	200	83	242	103	284	120
33	10	75	27	117	47	159	64	201	84	243	103	285	121
34	10	76	28	118	47	160	65	202	84	244	104	286	121
35	11	77	28	119	47	161	65	203	85	245	104	287	122
36	11	78	29	120	48	162	66	204	85	246	105	288	122
37	12	79	29	121	48	163	66	205	85	247	105		
38	12	80	30	122	49	164	66	206	86	248	106		
39	13	81	30	123	49	165	67	207	86	249	106		
40	13	82	31	124	50	166	67	208	87	250	107		
41	13	83	31	125	50	167	68	209	87	251	107		
42	14	84	31	126	51	168	68	210	88	252	108		

* β_e обчислюється як $\beta_e = n - \alpha_e$.

ДОДАТОК В
Вихідний текст програми мовою Сі для знаходження граничних значень α_e (змінна km) для методу стиснення f_e на основі біноміальної числової функції

(*автор С. В. Костель*)

```
#include <Math.hpp>
#include <fstream.h>
unsigned int LogCnk(unsigned int n, unsigned int k)
{
float result;
unsigned int i;
if(n<k) return 0;
if(k>n-k) k = n-k;
if(k==0 ) return 0;
n = n+1;
result = 0;
i = 1;
do
{
result = result+Log2(n-i)-Log2(i);
i = i+1;
}
while(i<=k);
return Ceil(result);
}
void main()
{
unsigned int km;
```

Продовження додатка В

```
unsigned int n;
ofstream fout("km(n).txt");
for(n = 1; n <= 1024; n++)
{
km = 0;
while((Ceil(Log2(n+1))+LogCnk(n,km))<=n   &&   km<=n)
km++;
fout << n <<" "<< km << endl;
}
fout.close();
}
```

Наукове видання

Кулик Ігор Анатолійович

МЕТОДИ БІНОМІАЛЬНОГО АДАПТИВНОГО СТИСНЕННЯ ДВІЙКОВИХ ДАНИХ

Монографія

Художнє оформлення обкладинки І. А. Кулика
Редактор І. О. Кругляк
Комп'ютерне верстання І. А. Кулика

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 13,02. Обл.-вид. арк. 7,77. Тираж 300 пр. Зам. № .

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.