

PACS number: 41.20.Jb

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ИМПЕДАНСНЫМ ЦИЛИНДРОМ, ПОКРЫТЫМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СЛОЕМ

В.И. Вьюнник, А.А. Звягинцев

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
пл. Свободы 4, 61077, Харьков, Украина
E-mail: vladdal@gmail.com

В работе получены приведенные граничные условия для импедансного кругового цилиндра, покрытого тонким слоем низкоконтрастного диэлектрика. Получено выражение для приведенного импеданса цилиндра. Определены условия и границы применимости используемого подхода. Исследовано влияние импеданса покрытия на приведенный импеданс цилиндра.

Ключевые слова: РАССЕЯНИЕ, ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ СЛОЙ, ИМПЕДАНСНЫЙ ЦИЛИНДР, ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ, ПРИВЕДЕННЫЙ ИМПЕДАНС.

(Получено 04.05.2010, в отредактированной форме – 21.07.2010)

1. ВВЕДЕНИЕ

Решение задач рассеяния на выпуклых телах, покрытых тонким диэлектрическим слоем, имеет важное практическое значение.

При решении таких задач для нахождения граничных условий обычно используется подход, восходящий к пионерской работе Рытова [1] и детально исследованный в [2].

В настоящей работе применен подход, предложенный Вайнштейном [3] и использованный им для получения приведенных граничных условий для плоской бесконечной идеально-проводящей поверхности, покрытой тонким слоем диэлектрика.

Особенностью этого подхода является то, что он позволяет получить приведенный импеданс – импеданс однородного цилиндра без покрытия, но с учетом его влияния.

В настоящей работе показано, что данный метод без существенных модификаций может использоваться не только для плоских, но и для цилиндрических поверхностей, в том числе с ненулевым импедансом, покрытых тонким слоем диэлектрика.

Получены приведенные граничные условия для импедансного цилиндра, покрытого тонким слоем низкоконтрастного диэлектрика и определены условия применимости такого подхода.

2. ПОЛУЧЕНИЕ ПРИВЕДЕННЫХ ИМПЕДАНСНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Для получения приведенных граничных условий рассмотрим задачу, представленную на рис. 1. Однородный цилиндр радиуса ρ_1 имеет поверхностный импеданс η . На цилиндрической поверхности $\rho = \rho_1$ выполняются импедансные граничные условия Леонтовича-Щукина

$$E_\varphi(\rho_1+) = -\eta H_z(\rho_1+), \quad (1)$$

где ρ_1+ обозначает наружную сторону цилиндрической поверхности $\rho = \rho_1$.

На импедансной цилиндрической поверхности $\rho = \rho_1$ расположен тонкий слой диэлектрика с проницаемостями ε_r и μ_r толщиной τ . При условии что величина $\delta = k_0 \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \tau \ll 1$ (низкоконтрастное покрытие), где k_0 волновое число, поле в диэлектрике может быть разложено в ряд по толщине слоя, как

$$E_\varphi(\rho_1+) = E_\varphi(\tau-) - \tau \frac{\partial}{\partial \rho} E_\varphi(\tau-). \quad (2)$$

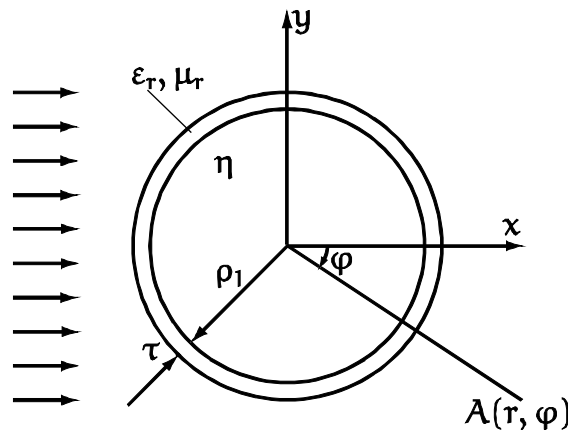


Рис. 1 – Геометрия задачи

Мы ограничиваемся здесь двумя членами разложения, что вполне приемлемо для практических вычислений.

Из уравнений Максвелла для комплексных амплитуд можно получить соотношение между компонентами поля в цилиндрической системе координат в виде

$$\frac{1}{\rho} E_\varphi + \frac{\partial}{\partial \rho} E_\varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_\rho = i\omega\mu_r H_z, \quad (3)$$

где ω – круговая частота. Отсюда запишем

$$\tau \frac{\partial}{\partial \rho} E_\varphi(\tau-) = i\omega\mu_r \tau H_z(\tau-) + \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_\rho(\tau-) - \frac{\tau}{\rho} E_\varphi(\tau-), \quad (4)$$

где τ – обозначает внутреннюю сторону границы диэлектрический слой–вакуум.

Подставляя (4) в (2) получим (при $\rho = \rho_1$)

$$E_\varphi(\rho_1+) = \left(\frac{\rho_1 + \tau}{\rho_1} \right) E_\varphi(\tau-) - i\omega\mu_r\tau H_z(\tau-) - \frac{\tau}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial\varphi} E_\rho(\tau-). \quad (5)$$

Для того чтобы получить граничные условия на наружной поверхности диэлектрика необходимо учесть, что так как в окружающем пространстве $\varepsilon_r = 1$, то

$$\varepsilon_r E_\rho \Big|_{\rho=\tau-} = E_\rho \Big|_{\rho=\tau+} \Rightarrow E_\rho(\tau-) = \frac{1}{\varepsilon_r} E_\rho(\tau+), \quad (6)$$

и с учетом непрерывности тангенциальных компонент поля получим из (5)

$$E_\varphi(\rho_1+) = \left(\frac{\rho_1 + \tau}{\rho_1} \right) E_\varphi(\tau+) - i\omega\mu_r\tau H_z(\tau+) - \frac{\tau}{\rho_1\varepsilon_r} \frac{\partial}{\partial\varphi} E_\rho(\tau+). \quad (7)$$

Выражение (7) связывает поле на наружной границе импедансной поверхности $\rho_1 +$ с полем на наружной границе диэлектрического слоя $\tau +$. Так как на импедансной поверхности выполняются граничные условия (1), то подставляя (7) в (1) имеем

$$-\eta H_z(\rho_1+) = \left(\frac{\rho_1 + \tau}{\rho_1} \right) E_\varphi(\tau+) - i\omega\mu_r\tau H_z(\tau+) - \frac{\tau}{\rho_1\varepsilon_r} \frac{\partial}{\partial\varphi} E_\rho(\tau+). \quad (8)$$

Уравнение (8) представляет собой эквивалентное граничное условие на наружной поверхности слоя.

Осуществим перенос этого условия обратно на поверхность $\rho = \rho_1$. Для этого примем, что теперь между $\rho = \rho_1$ и $\rho = \tau$ находится вакуум. Произведем «обратное» разложение поля в ряд Тейлора, выразив компоненту поля на внутренней границе интерфейса вакуум-вакуум $\tau -$ через компоненты на наружной границе $\rho = \rho_1 +$ и таким образом получим

$$E_\varphi(\tau-) = E_\varphi(\rho_1+) + \tau \frac{\partial}{\partial\rho} E_\varphi(\rho_1+). \quad (9)$$

Так как для вакуума $\mu_r = 1$, выражение (3) можно переписать как

$$\frac{1}{\rho} E_\varphi + \frac{\partial}{\partial\rho} E_\varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\varphi} E_\rho = i\omega H_z, \quad (10)$$

и соответственно

$$\tau \frac{\partial}{\partial\rho} E_\varphi(\rho_1+) = i\omega\tau H_z(\rho_1+) + \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial}{\partial\varphi} E_\rho(\rho_1+) - \frac{\tau}{\rho} E_\varphi(\rho_1+). \quad (11)$$

Подставляя (11) в (9) получим (при $\rho = \rho_1$)

$$E_\varphi(\tau-) = \left(\frac{\rho_1 - \tau}{\rho_1} \right) E_\varphi(\rho_1+) + i\omega\tau H_z(\rho_1+) + \frac{\tau}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial\varphi} E_\rho(\rho_1+). \quad (12)$$

С учетом непрерывности тангенциальных составляющих на границе вакуум-вакуум из выражения (12) получим

$$E_\varphi(\tau+) = \left(\frac{\rho_1 - \tau}{\rho_1} \right) E_\varphi(\rho_1+) + i\omega\tau H_z(\rho_1+) + \frac{\tau}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial\varphi} E_\rho(\rho_1+). \quad (13)$$

Рассмотрим теперь выражение (5) полученное «прямым» разложением в ряд Тейлора. Если слой τ заполнен вакуумом, то учитывая непрерывность тангенциальных компонент на границе $\tau|_+$ из выражения (5) получим

$$E_\varphi(\tau+) = \left(\frac{\rho_1}{\rho_1 + \tau} \right) E_\varphi(\rho_1+) + \left(\frac{\rho_1}{\rho_1 + \tau} \right) i\omega\tau H_z(\tau+) + \left(\frac{\tau}{\rho_1 + \tau} \right) \frac{\partial}{\partial\varphi} E_\rho(\tau+). \quad (14)$$

Сравнивая (13) с (14) видим, что эти выражения будут равны, если

$$\begin{aligned} H_z(\tau+) &= \left(\frac{\rho_1 + \tau}{\rho_1} \right) H_z(\rho_1+); \\ \frac{\partial}{\partial\varphi} E_\rho(\tau+) &= \left(\frac{\rho_1 + \tau}{\rho_1} \right) \frac{\partial}{\partial\varphi} E_\rho(\rho_1+); \\ \left(\frac{\rho_1}{\rho_1 + \tau} \right) &= \left(\frac{\rho_1 - \tau}{\rho_1} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что третье равенство в (15) будет строго выполняться только в том случае, когда $\tau = 0$. Однако оно будет выполняться приближенно, если $\tau \ll \rho_1$, что является условием применимости данного подхода к цилиндрическим структурам.

Подставляя (15) в (8) получим выражение

$$E_\varphi(\tau+) = \left(\frac{\rho_1}{\rho_1 + \tau} \right) \left(i\omega\mu_r\tau \left(\frac{\rho_1 + \tau}{\rho_1} \right) - \eta \right) H_z(\rho_1+) + \frac{\tau}{\rho_1\epsilon_r} \frac{\partial}{\partial\varphi} E_\rho(\rho_1+). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (13) окончательно получим приведенные граничные условия на поверхности $\rho = \rho_1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_1 - \tau}{\rho_1} \right) E_\varphi(\rho_1+) &= \\ &= \left(\left(\frac{\rho_1}{\rho_1 + \tau} \right) \left(i\omega\mu_r\tau \left(\frac{\rho_1 + \tau}{\rho_1} \right) - \eta \right) - i\omega\tau \right) H_z(\rho_1+) + \left(\frac{1 - \epsilon_r}{\rho_1\epsilon_r} \right) \tau \frac{\partial}{\partial\varphi} E_\rho(\rho_1+). \end{aligned} \quad (17)$$

Важно подчеркнуть, что граничные условия (17) заданы на поверхности однородного импедансного цилиндра без покрытия, хотя учитывают его влияние.

3. НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСSEЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ЦИЛИНДРЕ

Рассмотрим облучение цилиндра радиуса ρ_1 плоской H_z – поляризованной волной, распространяющейся в плоскости XU перпендикулярно оси цилиндра. Как известно, компоненты поля на поверхности и снаружи цилиндра (при $\rho \geq \rho_1$) определяются как

$$H_z = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-i)^n \{J_n(k_0\rho) + R_n H_n^{(1)}(k_0\rho)\} \cos n\varphi, \quad (18)$$

$$E_\rho = -i \frac{Z_0}{k_0\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-i)^n n \{J_n(k_0\rho) + R_n H_n^{(1)}(k_0\rho)\} \sin n\varphi, \quad (19)$$

$$E_\phi = -iZ_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-i)^n \{J'_n(k_0\rho) + R_n H_n^{(1)'}(k_0\rho)\} \cos n\varphi, \quad (20)$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$, $J_n, J'_n, H_n^{(1)}, H_n^{(1)'}$ – функции Бесселя и Ханкеля и их производные соответственно и Z_0 – импеданс свободного пространства. Подставляя выражения (18)-(20) в граничное условие (17) на поверхности цилиндра (при $\rho = \rho_1$), получим

$$\begin{aligned} & -iZ_0 \left(\frac{\rho_1 - \tau}{\rho_1} \right) \left(J'_n(k_0\rho_1) + R_n H_n^{(1)'}(k_0\rho_1) \right) = \\ & = \left(\frac{\rho_1}{\rho_1 + \tau} \left(i\omega\mu_r\tau \left(\frac{\rho_1 + \tau}{\rho_1} \right) - \eta \right) - i\omega\tau \right) \left(J_n(k_0\rho_1) + R_n H_n^{(1)}(k_0\rho_1) \right) - \\ & - \left(\frac{1 - \varepsilon_r}{\rho_1\varepsilon_r} \right) \frac{\tau n^2 i Z_0}{k_0\rho_1} \left(J_n(k_0\rho_1) + R_n H_n^{(1)}(k_0\rho_1) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Отсюда коэффициент R_n равен

$$\begin{aligned} R_n = & - \left(i\varepsilon_r k_0 \rho_1^3 J'_n(k_0\rho_1) - i\varepsilon_r k_0 \rho_1 \tau^2 Z_0 J'_n(k_0\rho_1) - in^2 \tau^2 Z_0 J_n(k_0\rho_1) + \right. \\ & + i\varepsilon_r n^2 \rho_1 \tau Z_0 J_n(k_0\rho_1) - i\varepsilon_r k_0 \rho_1^2 \tau^2 \omega J_n(k_0\rho_1) - i\varepsilon_r k_0 \rho_1^3 \tau \omega J_n(k_0\rho_1) - \\ & - \varepsilon_r k_0 \eta \rho_1^3 J_n(k_0\rho_1) + i\varepsilon_r \mu_r k_0 \rho_1^3 \tau \omega J_n(k_0\rho_1) + i\varepsilon_r \mu_r k_0 \rho_1^2 \tau^2 \omega J_n(k_0\rho_1) + \\ & \left. + i\varepsilon_r n^2 \tau^2 Z_0 J_n(k_0\rho_1) - in^2 \rho_1 \tau Z_0 J_n(k_0\rho_1) \right) / \left(i\varepsilon_r k_0 \rho_1^3 H_n^{(1)'}(k_0\rho_1) - \right. \\ & - i\varepsilon_r k_0 \rho_1 \tau^2 Z_0 H_n^{(1)'}(k_0\rho_1) - in^2 \tau^2 Z_0 H_n^{(1)'}(k_0\rho_1) + i\varepsilon_r n^2 \rho_1 \tau Z_0 H_n^{(1)'}(k_0\rho_1) - \\ & - i\varepsilon_r k_0 \rho_1^2 \tau^2 \omega H_n^{(1)'}(k_0\rho_1) - i\varepsilon_r k_0 \rho_1^3 \tau \omega H_n^{(1)'}(k_0\rho_1) - \varepsilon_r k_0 \eta \rho_1^3 H_n^{(1)'}(k_0\rho_1) + \\ & + i\varepsilon_r \mu_r k_0 \rho_1^3 \tau \omega H_n^{(1)'}(k_0\rho_1) + i\varepsilon_r \mu_r k_0 \rho_1^2 \tau^2 \omega H_n^{(1)'}(k_0\rho_1) + i\varepsilon_r n^2 \tau^2 Z_0 H_n^{(1)'}(k_0\rho_1) - \\ & \left. - in^2 \rho_1 \tau Z_0 H_n^{(1)'}(k_0\rho_1) \right) \end{aligned} \quad (22)$$

H_z -компонента поля в дальней зоне может быть записана как

$$H_z = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-i)^n \{J_n(k_0 \rho) + R_n H_n^{(1)}(k_0 r)\} \cos n\varphi, \quad (23)$$

где r – радиус-вектор до точки наблюдения.

На рис. 2 приведены диаграммы направленности H_z -компоненты полного поля, рассчитанные по формуле (23). Полученные результаты при достаточно малой толщине покрытия ($\tau \leq 0.04\rho_1$) с графической точностью совпадают с результатами, рассчитанными по формуле, приведенной в [4].

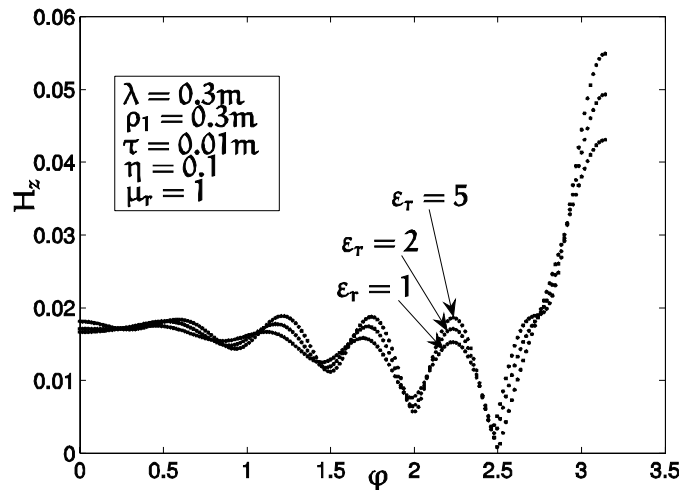


Рис. 2 – H_z -компонента полного поля в дальней зоне при падении H_z -поляризованной плоской волны на импедансный цилиндр

Важно отметить, что принимая допущение о малости величины δ , мы тем самым имеем ограничение на максимально допустимую частоту, для которой возможно применение данного подхода (при заданных τ , ε_r и μ_r). Вычисления показывают, что величина δ должна быть ≤ 0.5 .

Выражение (22) получено из граничных условий (17) примененных к однородному импедансному цилиндру без покрытия, но с измененным импедансом, учитывающим влияние диэлектрического слоя. С другой стороны известно, что при падении плоской H_z – поляризованной волны на импедансный цилиндр радиуса ρ_1 без покрытия R_n может быть записано как

$$R_n = - \frac{J'_n(k_0 \rho_1) - i\eta_p J_n(k_0 \rho_1)}{H_n^{(1)'}(k_0 \rho_1) - i\eta_p H_n^{(1)}(k_0 \rho_1)}. \quad (24)$$

Приравняв выражения (24) и (22) для приведенного импеданса получим

$$\eta_p = \frac{1}{(-\tau^2 + \rho_1^2)k_0\rho_1 Z_0 \varepsilon_r} (-i\rho_1^3 \varepsilon_r k_0 \omega \tau + i\rho_1^2 \varepsilon_r \mu_r k_0 \omega \tau^2 + i\rho_1^3 \varepsilon_r \mu_r k_0 \omega \tau + i\rho_1 \varepsilon_r \tau n^2 Z_0 - i\rho_1 \tau n^2 Z_0 - i\rho_1^2 \varepsilon_r k_0 \omega \tau^2 - \rho_1^3 \varepsilon_r k_0 \eta - i\tau^2 n^2 Z_0 + i\varepsilon_r \tau^2 n^2 Z_0). \quad (25)$$

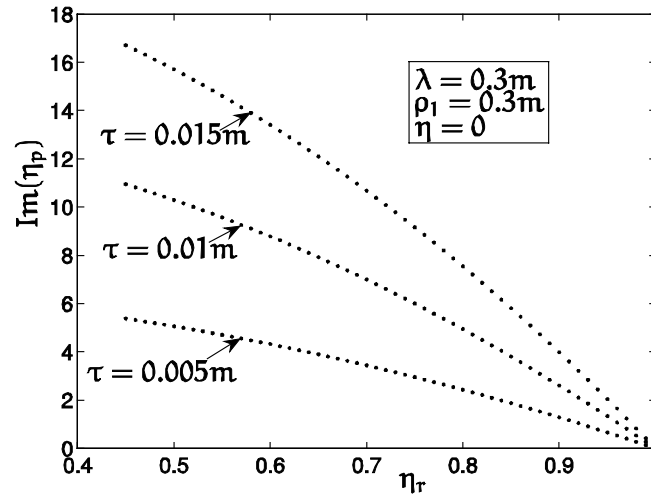


Рис. 3 – Зависимость приведенного импеданса цилиндра от импеданса диэлектрического покрытия при его различной толщине

На рис. 3 представлена зависимость приведенного импеданса цилиндра от импеданса покрытия. Важным моментом является то, что хотя и импеданс цилиндра и импеданс покрытия имеют действительное значение, приведенный импеданс представляет собой чисто мнимую величину.

В заключение хотелось бы остановиться на возможности получения асимптотического решения для поля, рассеянного импедансным круговым цилиндром с диэлектрическим покрытием. В принципе, возможно непосредственно применить подход, изложенный в [5] к выражению (23), в котором R_n задается в виде (22). Однако для кругового цилиндра, очевидно более простым является использование приведенного импеданса и получение асимптотического решения задачи рассеяния для однородного импедансного цилиндра, которое будет полностью эквивалентно решению для импедансного цилиндра с покрытием.

4. ВЫВОДЫ

Получены приведенные граничные условия для импедансного цилиндра, покрытого тонким слоем низкоконтрастного диэлектрика.

Определено условие, при котором указанный подход может быть применен к цилиндрическим структурам.

Получено выражение для расчета диаграммы направленности полного поля для однородного импедансного цилиндра с приведенным импедансом и показано, что данное решение полностью соответствует решению для соответствующего импедансного цилиндра с покрытием.

Данный подход может быть легко применен к круговым импедансным цилиндрическим структурам, покрытым несколькими слоями низко-контрастного диэлектрика.

ELECTROMAGNETIC WAVE SCATTERING BY THE COATED IMPEDANCE CYLINDER

V.I. Vyunnik, A.A. Zvyagintsev

Kharkov National University,
4, Svobody sq., 61077, Kharkov, Ukraine
E-mail: vladdal@gmail.com

In this work the boundary conditions for the impedance circular cylinder coated by a low contrast dielectric thin layer are derived. Expression for the reduced impedance of the cylinder is obtained. Conditions and applicability limits of the proposed approach are defined. Influence of the coating impedance on the reduced impedance of the cylinder is investigated.

Keywords: SCATTERING, DIELECTRIC LAYER, IMPEDANCE CYLINDER, BOUNDARY CONDITIONS, REDUCED IMPEDANCE.

РОЗСІЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ ІМПЕДАНСНИМ ЦИЛІНДРОМ, ПОКРИТИМ ДІЕЛЕКТРИЧНИМ ШАРОМ

В.І. В'юник, А.А. Звягінцев

Харківський національний університет,
пл. Свободи 4, 61077, Харків, Україна
E-mail: vladdal@gmail.com

У роботі отримані приведені граничні умови для імпедансного кругового циліндра, покритого тонким шаром низькоконтрастного діелектрика. Отримано вираз для приведеного імпедансу циліндра. Визначено умови і межі застосування використаного підходу. Досліджено вплив імпедансу покриття на приведений імпеданс циліндра.

Ключові слова: РОЗСІЮВАННЯ, ДІЕЛЕКТРИЧНИЙ ШАР, ІМПЕДАНСНИЙ ЦИЛІНДР, ГРАНИЧНІ УМОВИ, ПРИВЕДЕНИЙ ІМПЕДАНС.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. С.М. Рытов, *ЖЭТФ* **10**, 180 (1940).
2. T.V.A. Senior, V.J. Volakis, *Approximate Boundary Conditions in Electromagnetics* (London: Institution of Engineering and Technology: 1995).
3. Л.А. Вайнштейн, *Теория дифракции и метод факторизации* (Москва: Советское радио: 1966).
4. T.V.A. Senior, *Approximate boundary conditions, part 2: Tech. Rep. RL-862* (University of Michigan, Radiation Laboratory: 1990).
5. В.И. Вьюнник, А.А. Звягинцев, *Радиотехника: Всеукр. межвед. научн.-техн. сб.* **157**, 73 (2009).