

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Сумський державний університет
Факультет технічних систем та енергоефективних технологій
Кафедра комп'ютерної механіки імені Володимира Марцинковського

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

_____ Андрій ЗАГОРУЛЬКО
(підпис)

_____ 2023 р.

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на здобуття освітнього ступеня магістр

зі спеціальності 131 Прикладна механіка, освітньо-професійної програми «Комп'ютерна механіка», на тему: Модальний та гармонічний аналіз рами кузова причепа.

Здобувача групи КМ.м-21 КОЗУБЕНКА Андрія Івановича.

Кваліфікаційна робота містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ Андрій КОЗУБЕНКО
(підпис)

Керівник: асистент, к.т.н. Олександр ПОЗОВНИЙ _____
(підпис)

ЗМІСТ

| | |
|---|----|
| ВСТУП..... | 5 |
| РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ПОСТАВЛЕННЯ ЗАДАЧІ..... | 7 |
| 1.1 Короткий екскурс в історію та огляд конструкцій..... | 7 |
| 1.2 Несуча система транспортних засобів..... | 11 |
| 1.3 Постановка завдання..... | 15 |
| 1.4 Висновки..... | 15 |
| РОЗДІЛ 2. МОДАЛЬНИЙ АНАЛІЗ РАМИ КУЗОВА ПРИЧЕПА..... | 17 |
| 2.1 Коливання..... | 17 |
| 2.2. Модальний аналіз..... | 19 |
| 2.3 Побудова 3Д моделі рами кузова причепа..... | 23 |
| 2.4 Аналіз моделі металевої рами та методи отримання власних частот та форм коливань..... | 25 |
| 2.5 Висновки..... | 33 |
| РОЗДІЛ 3. ГАРМОНІЧНИЙ АНАЛІЗ РАМИ КУЗОВА ПРИЧЕПА..... | 35 |
| 3.1 Вступні зауваження до гармонічного аналізу..... | 35 |
| 3.2 Гармонічний розрахунок багатомасової моделі рами кузова..... | 44 |
| 3.3 Динамічний розрахунок..... | 49 |
| 3.4 Висновки..... | 51 |
| ВИСНОВКИ..... | 53 |
| ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ТА ПОСИЛАНЬ..... | 54 |

АНОТАЦІЯ

Кваліфікаційна робота магістра: 55 с., 30 рис., 15 джер.

Об'єкт дослідження - рама тракторного самоскидного причепа 2-ТСП8.

Мета роботи – дослідження статичного та динамічного стану рами причепа з метою покращення його конструкції з урахуванням сучасних вимог до безпеки, надійності та ефективності.

Методи дослідження – метод скінченних елементів використовується для чисельного моделювання напружено-деформованого стану рами причепа під впливом статичних і динамічних навантажень. Забезпечує детальний аналіз різних елементів конструкції, дозволяючи врахувати їхню взаємодію та оптимізувати форму та розміри для досягнення оптимальних параметрів.

У даній роботі виконано аналіз напружено-деформованого стану кузовних причепів для сільськогосподарської промисловості, враховуючи як статичні, так і динамічні впливи. Статичний вплив охоплює сили ваги, пов'язані із загальною масою кузова, власною масою рами та елементами тягового приводу. Динамічний вплив моделюється стаціонарним випадковим процесом, обумовленим нерівностями на шляху.

Статичні розрахунки проведено за допомогою модуля Ansys Student, який включає аналіз напружено-деформованого стану, стійкості та коливань деталей і конструкцій методом кінцевих елементів. Отримані результати використано для аналізу та вдосконалення конструкції причепа. Розроблена методика розрахунку може бути застосована для аналогічних систем.

МЕТОД КІНЦЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ, АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ, СТАТИЧНИЙ РОЗРАХУНОК, ДИНАМІЧНИЙ РОЗРАХУНОК, КУЗОВНІ ПРИЧЕПИ

ВСТУП

Забезпечення ефективної роботи сільськогосподарської галузі потребує надійного та ефективного використання причепів для сільгосптехніки. На сучасному етапі розвитку галузі досягнення високого рівня продуктивності вимагає застосування інноваційних рішень у конструкції цих причепів. При їх проектуванні слід враховувати нові принципи підходу конструювання та розробки рам, що сприятиме покращенню техніко-економічних характеристик причепів та підвищенню їхнього оптимального використання в агропромисловому виробництві.

Рама причепа 2ТСП-8 виступає як основна структура, що несе вагу всіх компонентів та вантажу під час експлуатації. Її завдання включає витримання зовнішніх сил, які виникають через несприятливі дорожні умови та навантаження вагою. Основними факторами, що спричиняють деформацію конструкції рами, є навантаження від дорожнього покриття, яке передається через передні та задні колеса та систему підвіски.

У зв'язку з цим рама повинна мати високу жорсткість та еластичність для оптимальної витримки цих зовнішніх навантажень, запобігаючи при цьому постійній деформації, що може вплинути на стабільність інших компонентів рами. Важливо зазначити, що якщо конструкція рами погано розроблена або жорсткість використаних матеріалів зменшується через щоденне використання, навантажувальна здатність рами суттєво зменшиться, що призведе до зниження продуктивності причепа.

З іншого боку, якщо рама буде занадто міцною, це може вести до непотрібних матеріальних витрат. Тому важливо визначити оптимальні конструктивні параметри рами, які забезпечать необхідну жорсткість та еластичність при оптимальних витратах.

Підвищення ефективності основних вузлів причепа є важливим чинником для поліпшення його продуктивності та збільшення терміну служби. Оптимізація

статичних та динамічних характеристик є ефективною стратегією для зниження витрат на обслуговування та подовження терміну експлуатації причепа.

Для забезпечення безперебійної та ефективної роботи в агросфері важливо впроваджувати новаторські рішення, спрямовані на підвищення втомної міцності та тривалості служби причепів сільгосптехніки. Ці завдання можна досягти, оптимізуючи конструкції для зменшення динамічного навантаження на несучі елементи і поліпшення параметрів втомної міцності. Реалізація цих ініціатив передбачає врахування принципів використання різних функцій та методів скінченних елементів в процесі розробки конструкцій причепів на підприємствах.

РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ПОСТАВЛЕННЯ ЗАДАЧІ

1.1 Короткий екскурс в історію та огляд конструкцій

Тракторні причеми виступають невід'ємними складовими сільськогосподарського господарства, оскільки сприяють збільшенню транспортної потужності та загальної продуктивності праці. Саме завдяки тракторним причепам здійснюється транспортування зібраного з полів урожаю зерна до складів і переробних підприємств. Сучасні моделі цієї спецтехніки здатні перевозити більше 12 тонн зерна за один раз, що не можна сказати про ті моделі тракторних причепів, які були випущені на початку створення цієї спецтехніки.

Тракторні причеми вперше з'явилися на території України у першій половині 20 століття через активне використання аграріями канатних борін, котків, культиваторів і борін з пружинними зубами, які не мали коліс і потребували транспортування на поля.

Перші тракторні причеми мали просту конструкцію, складаючись лише з рами та платформи. Для того, щоб транспортувати сільгосптехніку, їх платформу ставили на землю, і трактор тягнув за собою цю платформу. Після цього трактор від'єднувався від обладнання та кріпився на тримачах цього обладнання, і платформа зміщувалася назад на шасі. Ці маніпуляції дозволяли транспортувати сільгосптехніку під кутом 90° для спрощення транспортування та уникнення пошкоджень доріг від перетягування техніки.

Для виготовлення таких причепів використовувалися металеві труби або балки. Колеса причепа були також металевими з простими гумовими шинами, забезпечуючи стабільне та легке переміщення по ґрунтових дорогах. Деякі тракторні причеми того часу мали навіть прості механізми підйому платформи або примітивну систему розвантаження, але вони значно відставали від сучасних гідравлічних систем.

В умовах зростання конкуренції між виробниками, успішний розвиток будь-якого підприємства вимагає постійного впровадження нових ідей, технологій, товарів, послуг та методів виробництва. Для ефективного функціонування необхідно постійне вдосконалення, оновлення, реорганізація та пошук нових методів управління та ведення бізнесу. У зв'язку з високим рівнем інфляції та зниженням платоспроможного попиту, логістична діяльність стає вирішальною в агробізнесі та промисловості, оскільки саме тут можна отримати конкурентні переваги в управлінні витратами. На сьогодні важливо забезпечити ефективну організацію логістичних процесів, оскільки витрати на логістику можуть сягати до 30% собівартості[1].

Ключова роль транспорту в логістиці неоспорима, оскільки без його участі неможливий рух матеріальних потоків. Значна частина логістичних витрат пов'язана з транспортуванням, що впливає на економіку країни в цілому, а також на розвиток сільських територій, де виробляється та переробляється сільськогосподарська продукція[6].

Кузов причепа вважається однією з ключових складових частин, яка не лише повинна забезпечувати зручне завантаження, але й ефективно виконувати вивантаження вантажу за різних умов. Структура кузова включає кілька ключових компонентів: підрамник, який є основою для всієї конструкції та несе основне навантаження; бічні стійки, до яких кріпляться борти і які повинні витримувати тиск вантажу; та верхня посилена поперечна балка, яка з'єднує верхні частини між собою. Важливо відзначити декілька конструкторських рішень для поперечної балки: це можуть бути поперечки, сформовані згинанням частин бортів, або виготовлені зі стандартних труб або окремих частин, до яких борти прикріплюються окремо. Останні є більш міцними, але при цьому технологія виготовлення кузовів ускладнюється. Така конструкція поперечної балки забезпечує стійку основу для встановлення наборників і зменшує навантаження на борти та підрамник кузова.

Кузови з поперечкою, що формується з бокового борту, є менш витратними, однак конструкція таких кузовів стає менш міцною та ненадійною. Під час

експлуатації бічні борти часто втрачають щільність, а їхня геометрія порушується. Виробники таких кузовів змушені розглядати інші конструкторські рішення, але ці варіанти не завжди можливо використовувати через їхню високу вартість. Часто ці модифікації призводять до використання більш товстих листів для бортів і днища, що призводить до збільшення загальної ваги напівпричепа.



Рисунок 1.1 – Сільськогосподарські напівпричеп тракторний

Борта і днище напівпричепа безпосередньо контактують з матеріалом, що транспортується - до них пред'являються високі вимоги. Борта і днище не повинно деформуватися при завантаженні та вивантаженні вантажу, сталевий лист повинен бути стійким до тертя. Щільність бортів добре посилюють ребра згинання бортів. Вони забезпечують більшу щільність та стійкість до ударів бортового листа.

Для напівпричепів, призначених для перевезення ґрунту, каміння, рекомендується вибирати борти та днище, виготовлені з більш міцної сталі. Навантажувальні причепа для зерна в першу чергу призначені для забезпечення продуктивності комбайна під час збирання врожаю. При виборі перевантажувального причепа важливо правильно оцінити його місткість, тому що занадто маленька чи занадто велика місткість не виправдає очікувань. У

першому випадку комбайни не зможуть повністю спустошити бункери, і мають робити простої, чекаючи, коли можна буде розвантажити, у другому випадку обсяг буде недостатньо використаний.

Напівпричепи та причепи різної вантажопідйомності, поширені у господарствах рослинництва, призначені для перевезення виробленої продукції. У господарствах тваринництва використовують більшу кількість напівпричепів різного призначення. Це і розкидачі гною, напівпричепи платформи для транспортування пакунків, напівпричепи для перевезення худоби. Порівняно зі старими причепами в сучасних є багато нових конструкторських рішень, які надають ще більше функціональності та збільшують можливості застосування напівпричепа або причепа.

Різновид причепа залежить від бажаної вантажопідйомності або конфігурації. Крім цього, важливо звернути увагу на кількість осей, необхідних для причепа, а також рекомендовану потужність для буксирування. При їзді дорогою причіп повинен відповідати вимогам чинного законодавства. Наприклад, досить часто застосовується законне обмеження швидкості залежно кількості осей і ваги причепа. Крім того, гальмівні системи причепа повинні відповідати вазі причепа та швидкості руху.

Під час аналізу конструкцій вантажних причепів (рисунок 1.2) спостерігається значне розмаїття в конструкціях кузовів рамного типу, що пояснюється їхньою простотою виготовлення (використанням стандартних профілів) та високою міцністю. Виробництво сільськогосподарських кузовів широко використовує модульний принцип, що здешевлює конструкцію, скорочує час виробництва і дозволяє створювати моделі різної геометрії з можливістю подальшого встановлення різноманітних вузлів та агрегатів.

Ходова частина напівпричепа і причепає однією з найважливіших частин, яка повинна витримувати всі навантаження поганих доріг і ваги матеріалу, що перевозиться. Зі збільшенням та розширенням господарств відстані, на які треба перевозити продукцію також збільшуються. На причепи доводиться все більше

навантаження, тому сучасні ходові частини повинні справлятися з поганим покриттям доріг, великими навантаженнями, відстанями транспортування, що



Рисунок 1.2 Тракторний самоскидний причіп 2ТСП-14

збільшуються, а також суворішими вимогами клієнтів до експлуатації та зручності. На відміну від ходових частин, що використовуються в напівпричепках і причепах вантажних автомобілів, для причепів сільського господарства підвищуються вимоги до герметизації осей, ефективності системи гальм та технічним властивостям, через кілька разів більших навантажень, які припадають не тільки на осі, але і на ресори, конструкцію рами або підрамника та тягове пристосування.

1.2 Несуча система транспортних засобів

Конструкція несучої системи залежить, перш за все, від призначення машини. В даний час несуча система рами використовується в основному у виробництві комфортабельних легкових автомобілів високого класу,

позашляховиків, вантажівок, причепів, тягачів. Каркасні конструкції поділяються на драбинчасті, каркасні та комбіновані[1,2].

Найбільшою популярністю користуються каркаси для сходів. Вони складаються з двох або більше поздовжніх елементів, кількох поперечин і місцевих посилень. Опорні рами з центральною несучою трубою або коробчатим перетином мають центральну балку з поперечно розташованими кронштейнами для кріплення вузлів. Збірні рами об'єднують елементи як сходової, так і опорної рами, тобто мають центральну балку, короткі сходові рами та поперечини. Слід зазначити, що в звичайних легкових автомобілях рамна конструкція замінена на самонесучий кузов.

Особливість експлуатації транспортних засобів та їх несучих систем полягає в тому, що сили, які діють на конструкцію, є часово-змінними, а їх амплітудні та частотні характеристики залежать від експлуатаційного навантаження, швидкості руху, стану дороги та інших факторів [1, 3]. Всі ці фактори можуть сприяти виникненню значних напружень в областях структурних і технологічних концентраторів, що може призвести до виникнення втомних тріщин в зазначених областях. Поширення тріщин може призвести до руйнування рам [2].

Аналіз доступних досліджень і публікацій вказує, що для оцінки експлуатаційної довговічності та надійності рам використовуються методи статичного і (або) динамічного аналізу, залежно від характеру навантаження машини. Значні циклічні навантаження вимагають використання динамічних методів структурного аналізу. У випадку квазістатичного експлуатаційного навантаження мобільних машин, яке не викликає значних інерційних і демпфіруючих ефектів, використовується статичний аналіз напружено-деформованого стану рам. При цьому визначаються коефіцієнти безпеки, максимальні напруження, деформації та відхилення в структурах несучих систем машини. Літературні дані щодо обмежуючих значень коефіцієнтів безпеки значно різняться[10,115].

Для розрахунку несучих систем мобільних машин розроблено різноманітні методи з різною складністю та точністю отриманих результатів, які враховують специфіку конструкцій. Ці розрахунки характеризуються неправильною просторовою структурою, застосуванням різних типів елементів, складною та двозначною природою навантаження. Основні принципи розрахунку та проектування для несучих систем мобільних машин висвітлені в роботі [1].

Для оцінки напружено-деформованого стану каркасних конструкцій використовуються аналітичні методи теорії пружності, зокрема методи. Ця теорія визначає загальний закон розподілу напружень у поперечному перерізі тонкостінного стрижня під дією кручення. На основі цієї теорії розроблено методи розрахунку каркасів із тонкостінних стрижнів перерізу контурів.

Методи розрахунку каркасів з деформівними і недеформівними контурами є найбільш поширеними. Але високий ступінь статичної невизначеності розрахункових схем значно ускладнює процес розрахунку каркасних конструкцій. При розробці теоретичних основ усунення «зайвих» зв'язків основних несучих конструкцій, особливо мобільних сільськогосподарських машин, досить ефективним виявився метод, заснований на принципі мінімуму потенціальної енергії деформації [2].

В інженерній сфері сучасності розвиток обчислювальної техніки та створення універсальних прикладних програм, переважно базованих на методі скінчених елементів (МСЕ), призвели до значного прискорення розрахунків для визначення напружено-деформованого стану складних конструкцій. Порівняно з традиційними чисельними методами, МСЕ вирізняється простотою алгоритмізації та можливістю повної автоматизації формулювання рівнянь і отримання розв'язків для різноманітних складних систем. Такий підхід робить метод скінчених елементів найбільш універсальним і відповідним вимогам при розрахунках структурних каркасів.

МСЕ реалізує ідею дослідження об'єкта на основі розгляду його окремих частин – скінчених елементів (СЕ). Таким чином, суцільне середовище з

нескінченним числом ступенів свободи апроксимується певним набором простих елементів, що мають кінцеве число ступенів свободи і з'єднані між собою у вузлових точках. Тому безперервні системи поділяють на окремі елементи, роботу яких приблизно або точно досліджують, а потім напружено-деформовані стани цих елементів поєднують один з одним таким чином, щоб забезпечити умови сумісності деформацій і умови рівноваги. МСЕ дає змогу представити рішення у вигляді набору неперервних функцій для кожного КЕ. Алгоритм розв'язування відповідної системи рівнянь відносно значення функції у вузлах легко знайти заміною згаданої системи диференціальних рівнянь з відповідними варіаційними диференціалами [11].

$$\Pi_L(\bar{U}) = S_v \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^T \cdot \sigma - \bar{U}_T \cdot \bar{F} \right\} dV - S_x \bar{U}^T \bar{P} ds \quad (1.1)$$

Важливо відзначити, що значення Π_L відповідає потенціальній енергії в тілі, при цьому перший член визначає енергію деформації, а інші члени враховують роботу зовнішніх сил над переміщеннями. Після цього інтеграл (1.1) подається у вигляді суми інтегралів по об'ємах скінчених елементів. Після підстановки апроксимацій деформацій ε , напружень σ та сил P і F , функція (1.1) перетворюється у функцію вузлових переміщень.

$$\Pi_L\{v\} = \frac{1}{2} \{v\}^T \cdot K\{v\} - \{v\}^T \cdot \{Q\} \quad (1.2)$$

де K і $\{Q\}$ – відповідно матриця жорсткості та вектор навантаження КЕ в локальній системі координат.

Зазначений алгоритм є теоретичною основою для численних програм аналізу міцності конструкцій, включаючи, ANSYS, ABAQUS, CATIA NASTRAN, SolidWorks, і IPA-САПР.

1.3 Постановка завдання

У дослідженні представлені технічні розробки та аналіз щодо створення самоскидного причепа 2ТСП-8. Цей пристрій призначений для перевезення різноманітних вантажів, забезпечуючи повне вивантаження, навіть у випадку важких сипучих або ущільнених вантажів. Однією з ключових характеристик є використання телескопічного гідроциліндра з вантажопідйомністю 6 тонн, що гарантує надійну функціональність причепа.

Виходячи із потреби у простоті конструкції та вимог до забезпечення оцінки надійності конструкції розрахунок має бути проведений за різними комбінаціями навантажень. Слід зазначити, що навантаження, що діють на конструкцію, змінюються в часі; їх амплітудно-частотні характеристики залежать від реального навантаження, швидкості транспортного засобу, стану дорожнього покриття та інших факторів. Це може спричинити високі напруження в зонах з'єднання компонентів та найбільших концентраторів напружень рами і в результаті призвести до появи втомних тріщин і руйнування каркасів у цих зонах. В зв'язку з цим потрібно проаналізувати методи дослідження експлуатаційних навантажень і напружено-деформованого стану каркасних конструкцій за статичних і динамічних навантажень. Провести аналіз коефіцієнтів міцності за напругами з метою врахування невизначеностей моделі рамної конструкції та невизначеностей експлуатаційного навантаження.

1.4 Висновки

В розділі була коротко представлена історія розвитку машинобудування в Україні. З якого можна зробити висновок про відчутний його розвиток за останнє століття саме в Україні. Розглянуті різні моделі транспортних засобів для перевезення сільськогосподарської продукції з полів.

Були ретельно розглянуті сучасні та актуальні методи для аналізу конструкції несучої системи, яка знаходиться під впливом експлуатаційних навантажень і перебуває у напружено-деформованому стані каркасних елементів. У виявленому контексті визначено, що ключовим компонентом таких конструкцій є рама, на яку припадає основна маса та значна частина навантажень. Зазначено, що для повноцінного розгляду цих структур необхідно провести детальне аналіз не лише щодо статичних навантажень для визначення міцності, але й щодо динамічних навантажень, що діють на несучу конструкцію причепа, оснащену пружними елементами в рамі. Такий підхід важливий для визначення ключових показників міцності несучої конструкції причепа з пружними елементами під час впливу як статичних, так і динамічних навантажень.

РОЗДІЛ 2. МОДАЛЬНИЙ АНАЛІЗ РАМИ КУЗОВА ПРИЧЕПА

2.1 Коливання

Коливання є одним з поширених явищ в природі, фізиці та техніці. Вони можуть викликати аварії та катастрофи, такі як втомні руйнування машин, відмови приладів і землетруси, а також шкідливо впливати на здоров'я людини через віброзахворювання. У той же час коливання грають важливу роль в технологічних операціях, таких як вібропереміщення вантажів і віброзабивка паль[1].

Важливою властивістю коливань є їхня стійкість, особливо при дослідженні нелінійних коливань, де важливо визначити умови, за яких вони залишаються стійкими.

Якщо система, що коливається, обмежена за розмірами, коливання охоплюють усі точки системи практично одночасно. У випадку протяжних систем з необмеженими розмірами, коливання передаються від точки до точки послідовно, утворюючи хвилю. Це поширення коливань чи хвиль визначається параметрами, такими як кутова частота і довжина хвилі.

Під час коливань відбувається постійне перетворення потенціальної енергії в кінетичну і навпаки. Частина механічної енергії перетворюється на теплову через розсіяння енергії, яке випромінюється з коливальної системи. Це призводить до згасання вільних коливань і біжучих хвиль з часом.

Характер зміни процесу з плином часу визначає форму коливань. Залежно від того, наскільки ймовірно можна передбачити (визначити або описати) коливання у конкретний момент часу, їх класифікують як детерміновані (регулярні) чи випадкові (нерегулярні). Будь-яке коливання, параметри якого можна передбачити з ймовірністю одиниці, є детермінованим. Параметри випадкових коливань змінюються в часі випадковим чином і можуть бути описані з ймовірністю менше одиниці. Детерміновані коливання можна розділити на

періодичні і неперіодичні. Періодичні коливання - це процес, який повторюється протягом обмеженого періоду часу, відомого як період.

Модальний аналіз визначає характеристики вібрацій, такі як природні частоти та форми структури. Зазвичай це служить вихідною точкою для декількох лінійних динамічних аналізів, таких як транзитний динамічний аналіз, гармонічний аналіз чи аналіз спектру. Частоти та форми мод коливань приводяться у залежність від розподілу маси та жорсткості в конструкції.

Вібрація та деформації конструкцій при механічному збудженні на власних частотах характеризуються конкретними формами, які називаються власними формами коливань (коливальними модами). У типових умовах експлуатації характер вібрації буде складним, що включає усі власні форми. Але якщо вивчити кожен власну форму окремо, за допомогою цих знань можна аналізувати всі наявні типи вібрації. Крім того, в ході модального аналізу складна конструкція, яка важко сприймається у своїй цілісності, перетворюється на набір простих для розуміння незалежних систем з одним ступенем свободи. Визначення власних частот, коефіцієнтів демпфування та форм коливань конструкції за результатами вимірювань частотної передавальної функції називається модальним аналізом.

Наприклад, вільно підвішена балка, збуджена на першій власній частоті, деформується у відповідності до першої (в формі літери V) власної форми коливань (рисунок 2.1). У цьому випадку балка виконує двонапрявлене циклічне переміщення від положення, показаного сплошною лінією, до положення, вказаного пунктирною лінією. При збудженні на другій власній частоті деформація балки відповідає другій (в формі літери S) власній формі коливань. У випадку, коли збудження відбувається на частоті, розташованій між першими двома власними частотами, деформація відповідає певній суперпозиції перших двох власних форм. Третя власна форма коливань балки нагадує літеру W. Що вищий номер власної форми коливань, то більше вузлових точок спостерігається. Ці власні форми коливань визначають, яким чином балка буде коливатися, коли її вільно відпустять та не накладаються зовнішні сили. Вони є розв'язками

відповідної задачі власних значень та власних функцій для диференціального рівняння коливань.

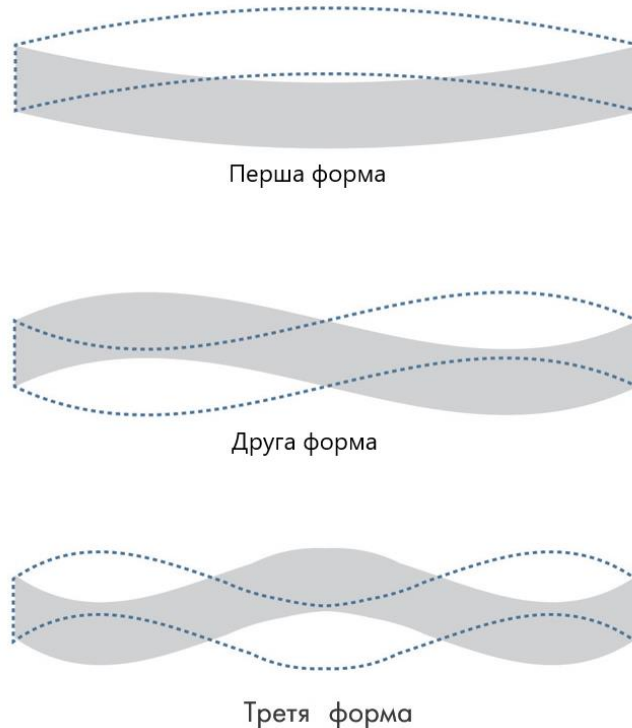


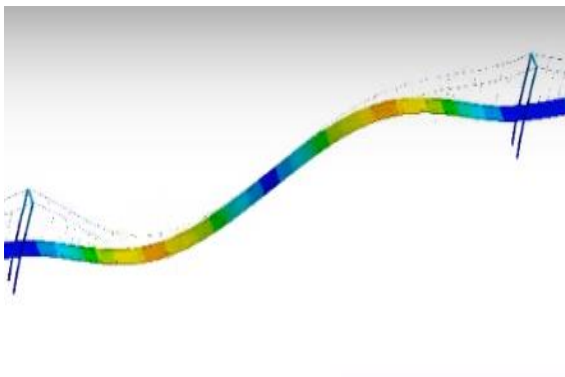
Рисунок 2.1 – Власні форми коливань вільно опертої балки

Для передбачення вібраційних характеристик конструкції може бути використаний динамічний аналіз із застосуванням методу кінцевих елементів. У рамках такого аналізу всю конструкцію абстрагують, репрезентуючи її теоретично у вигляді системи пружин і мас. Потім будується система матричних рівнянь, що описують цю конструкцію. З використанням математичного алгоритму визначаються її власні частоти та форми коливань. Цей метод дозволяє прогнозувати модальні параметри конструкції до її виготовлення, що дозволяє виявити можливі проблеми на ранніх етапах проектування та внести необхідні корективи.

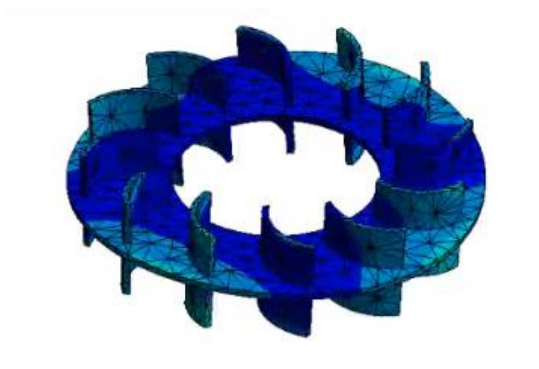
2.2. Модальний аналіз

Модальний аналіз призначений для визначення вібраційних характеристик лінійно пружних систем.

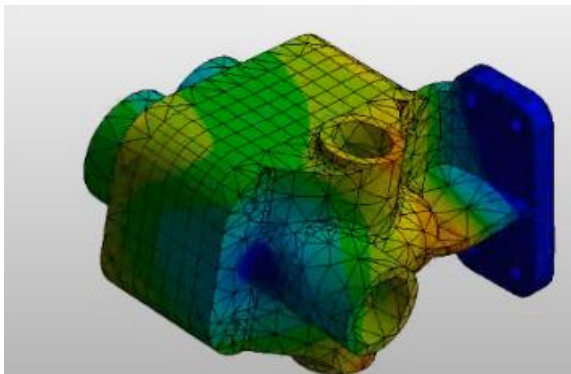
За допомогою сучасних програмних комплексів можна виконати один із найфундаментальніших аналізів лінійної динаміки – модальний аналіз. Потреба у визначенні власних частот конструкції може застосовуватися до багатьох областей техніки. Деякі приклади включають такі конструкції, як Такома Неурус міст, лопатевий диск або корпус клапана (рисунок 2.2), де врахування ефекту динаміки має важливе значення [7].



а)



б)



в)

Рисунок 2.2 – Модальний аналіз: а)-Такомський міст; б) Лопатевий диск; в) Клапан.

Вивчаючи вільні вібрації або проводячи модальний аналіз механічних систем, акцент надається аналізу моделі, який надає важливу інформацію щодо динамічних характеристик конструкції. Цей лінійний аналіз не використовує зовнішніх збуджень або режимів навантажень, а частоти режимів залежать виключно від моделі жорсткості та маси. Це надає інженерам інформацію про те, як конструкція може реагувати на різні типи динамічних навантажень, що може бути корисно для уникнення резонансних вібрацій та уникнення можливих пошкоджень конструкції. Таким чином, модальний аналіз вважається найбільш ефективним методом, який є основою для всього динамічного аналізу. Цей метод використовується у всіх інших лінійних динамічних дослідженнях, таких як аналіз гармонійного відгуку чи випадкової вібрації. Для розрахунку власних частот та форми мод(форм коливань) використовується лінійне рівняння(1.1) руху для вільної нездійсненої вібрації

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \quad (2.1)$$

де M — матриця маси, а K — матриця жорсткості, якщо ми припускаємо гармонійний рух, вектори зміщення та прискорення можна виразити цими двома рівняннями, замінюючи зміщення та прискорення назад у рівняння руху, ми можемо отримати розв'язання проблеми власних значень

$$\begin{aligned} \{u\} &= \{\phi\}_i \sin(\omega_i t + \theta_i) \\ \{\ddot{u}\} &= -\omega_i^2 \{\phi\}_i \sin(\omega_i t + \theta_i) \end{aligned} \quad (2.2)$$

для перша частина цього рівняння дає власні частоти ω , а розв'язання другої частини цього рівняння дає форми моди де власні значення ω^2 , а власні вектори є відповідними формами, тобто підставивши рівняння 2.2 в 2.1 отримаємо:

$$\begin{aligned}
 -\omega_i^2 [M] \{\phi\}_i \cos(\omega_i t) + [K] \{\phi\}_i \cos(\omega_i t) &= 0 \\
 (-\omega_i^2 [M] + [K]) \{\phi\}_i \cos(\omega_i t) &= 0
 \end{aligned}$$

Власні частоти знаходяться з рівняння:

$$([K] - \omega_i^2 [M]) \{\phi\}_i = \{0\} \quad (2.3)$$

Після заміни зміщення та прискорення у рівняння руху отримуємо розв'язання проблеми власних значень. Перша частина рівняння $([K] - \omega_i^2 [M])$ дає власні частоти ω , а друга частина — форми моди $\{\phi\}_i$. Власні значення представляють квадрат власної кругової частоти ω_i^2 , а власні вектори — відповідні форми моди ϕ_i . Власні частоти f_i можуть бути пораховані, як: $f_i = \omega_i / 2\pi$ [циклів/с]. Власні вектори є відповідними формами моди $\{\phi\}_i$ коли структура вібрує та застосовується частота.

При аналізі власних вільних коливань вважається пружня поведінка конструкції, тому очікуваний відгук являється гармонічним: $\{x\} = \{\phi_i\} \cos(\omega_i t)$, де ϕ_i визначає форму коливань i -ї моди (власний вектор) та ω_i являється власною частотою для цієї моди.

Коефіцієнт впливу та ефективна маса, отримані з модального аналізу, можуть дати уявлення про те, як конструкція реагуватиме на різні типи динамічного навантаження. Коефіцієнт впливу визначає масу, яка бере участь у русі для кожного режиму у конкретних напрямках. Його можна розрахувати за допомогою рівняння:

$$\gamma_i = \{\phi\}_i^T [M] \{D\} \quad (2.4)$$

де, D - це спектр одиничного зміщення в кожному з глобальних декартових напрямків і обертання навколо кожної з осей. Велике значення фактора впливу в певному напрямку при розрахунку свідчить про те, що цей режим ймовірно буде збуджений силами в цьому напрямку.

Коефіцієнт впливу у певному напрямку свідчить про те, що ймовірно, цей режим буде збуджений силами в цьому напрямку. Деякі режими можуть внести більший вклад, ніж інші, залежно від форми режиму та значення фактора впливу. Наприклад, якщо ми знаємо, який режим може бути збуджений у певному напрямку, це може допомогти при оцінці конструкції, оскільки ми знаємо, яка частота та форма режиму. Таким чином, розглядаючи співвідношення, ми можемо ідентифікувати режими, які можуть значно внести у відповідь конструкції, якщо їх збуджують у певному напрямку. Ефективна маса вказує на те, яка кількість маси пов'язана з кожним режимом $M_{eff,i} = \gamma_i^2$, коли використовується стандартний підхід із нормалізованою масою, ефективна маса дорівнює квадрату коефіцієнта впливу. Ідеально сума ефективних мас в кожному напрямку повинна дорівнювати загальній масі конструкції, але це залежить від кількості витягнутих режимів та того, як конструкція закріплена. Співвідношення ефективної маси до загальної маси може бути корисним для визначення того, чи витягнуто достатню кількість режимів.

Матеріал, розташований біля опори, ймовірно, менше схильний до руху, тому ефективна маса буде меншою, ніж фактична маса конструкції, в залежності від того, скільки матеріалу розташовано біля жорсткої опори.

Це широко розповсюджений та реалізований в програмних комплексах кінцево-елементного аналізу, алгоритм заснований на наступних твердженнях[9]:

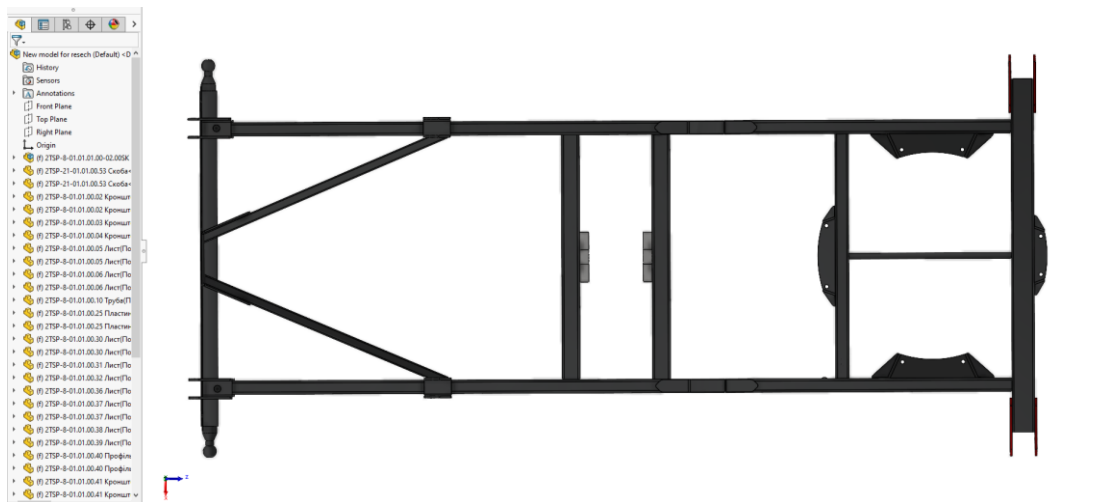
1. Вважається лінійно пружня поведінка матеріалів, ефекти демпфування та дисипації енергії не враховуються.
2. Вважається лінійна поведінка конструкції, структурні нелінійності не враховуються.

2.3 Побудова 3Д моделі рами кузова причепа

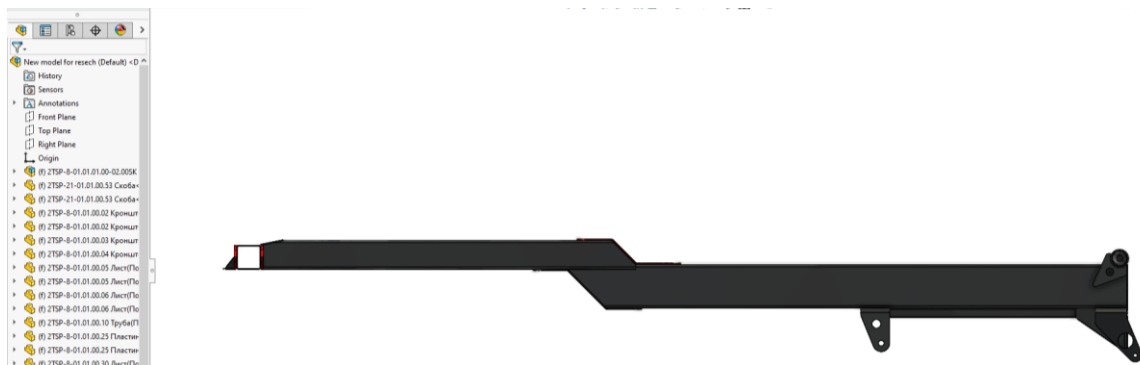
Відповідно до вимог ДСТУ, проведення експериментальних досліджень на міцність сільськогосподарських причепів виявляється трудомістким та

неефективним процесом. Реальні дослідження різних конструкцій стають нецільовими через потребу розгляду багатьох варіантів для вибору оптимальної рами. Виготовлення унікальних деталей вручну ускладнює та затягує процес, призводячи до витрат часу та коштів. Замість цього, більш ефективним та швидким методом стає використання математичного моделювання на основі принципів опору матеріалів. Це дозволяє створювати та перевіряти моделі розрахунково, що зменшує витрати та час[6].

Сучасні програмні комплекси, що використовуються різними компаніями, спрощують процес створення моделей для розрахунків за методикою, яка замінює проведення реальних експериментів. Головна мета цих програм – створення простих моделей для розрахунків, які можуть замінити проведення натуральних досліджень.



а)



б)

Рисунок 2.3 Об'ємна модель рами (а) вигляд зверху; б)вигляд збоку)

Початкові розміри конструкції причепа, визначені за ДСТУ (довжина 4 м, ширина 2 м), а також основні елементи рами, що використовуються для створення об'ємної геометричної моделі в програмі SolidWorks. Модель причепа розробляється з урахуванням вхідних даних, зосереджуючись на рамі, оскільки вона несе основне навантаження та визначає основні характеристики причепа. Матеріалом для кузова обирається сталь, призначена для виготовлення кузовних деталей – сталь 20Х. Для конструювання рами використовують прямокутні профілі та швелери П-подібні, які зазвичай виготовляються з великих штампованих деталей та з'єднуються точковим зварюванням у замкнуту силову систему.

Підготовка моделі проводилась за в програмному комплексі SpaceClaim. Були проведені налаштування: перевірка на помилки в геометричній моделі після імпорту з SolidWorks та допрацювання моделі в місцях контакту деталей для можливості задання жорсткого контакту.

2.4 Аналіз моделі металевої рами та методи отримання власних частот та форм коливань

Модальний аналіз визначає характеристики вібрацій, такі як власні частоти та форми коливань. Зазвичай це служить вихідною точкою для декількох лінійних динамічних аналізів, таких як динамічний, гармонічний аналіз чи аналіз спектру. Частоти та форми мод приводяться у залежність від розподілу маси та жорсткості в конструкції. Власна частота знаходиться з формули (2.5) для одномасової моделі:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (2.5)$$

За умови, що конструкція перебуває в напруженому стані, її жорсткість змінюється через затискання напружень (рівняння 2.6), тому присутність напруження в конструкції може змінити її коливальні характеристики. Зазвичай тягові напруження збільшують частоту структури, а стискаючі напруження зменшують її частоти. В такому випадку

$$\omega = \sqrt{\frac{K+S}{M}} \quad (2.6)$$

Під час дослідження системи будуть використовуватися точкові маси (Point Mass). Точкова маса збільшує масу конструкції при розрахунку вільних коливань. До конструкції додається лише маса без зміни її жорсткості. Одиначні маси використовуються для збільшення розподіленої ваги на обраній поверхні, що зменшує розрахункові значення власних частот.

За властивості матеріалу при такому розрахунку враховується модуль Юнга, коефіцієнт Пуасона та густину, оскільки до конструкції не застосовуються інші навантаження, тому не потрібні інші властивості матеріалів.

Для сварної конструкції в моделі між балочними елементами вводяться контакти між тілами bonded (жорстко пов'язані), що найбільш підходить для моделювання при врахуванні зварних конструкцій.

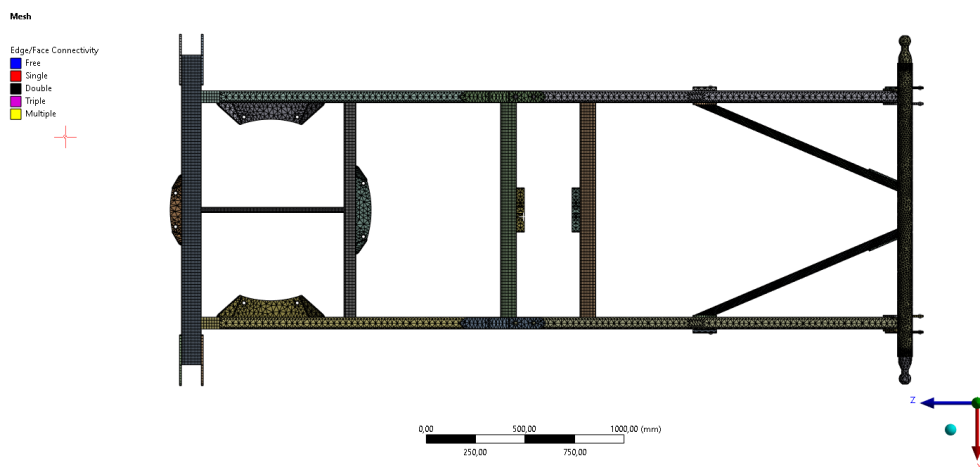


Рисунок 2.4 – Розрахункова сітка для модального аналізу

Попередньо було виконано статичний розрахунок конструкції, враховуючи закріплення в точках, де рама установлена на опори, та враховано навантаження при максимально допустимій вазі. Отримані значення реакцій опор, що додаються в якості в точках установки рами (рисунок 2.5).

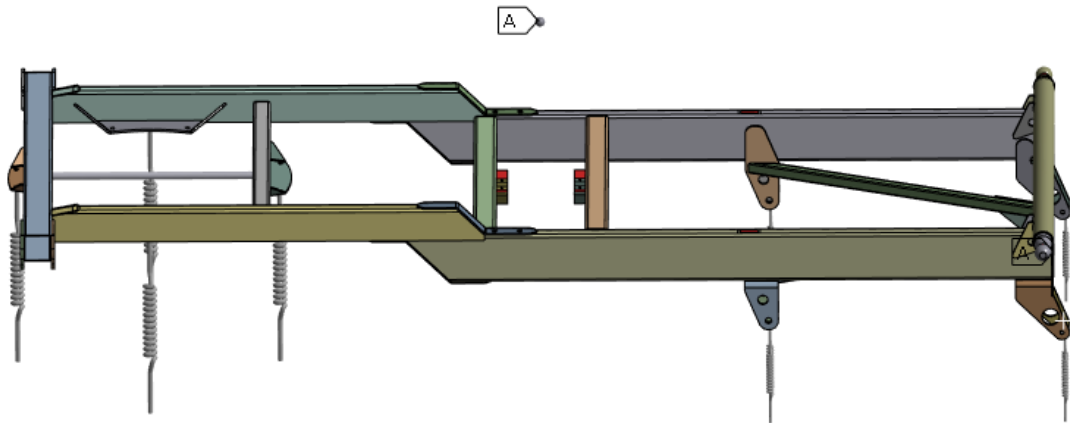


Рисунок 2.5 Закріплення рами причепа за допомогою пружнього закріплення

Оскільки у цьому дослідженні враховуємо вплив неврівноваженостей дорожнього полотна на динамічні характеристики рами, було проведено моделювання для представленої моделі навантаження. Для імітації впливу маси, що спричиняє автоколивання в системі, було встановлено remote point на поверхнях, де кріпиться шнек, та надано точкову масу з навантаженням 10 тон (Рисунок 2.6).

A: Copy of Static Structural
 Static Structural
 Time: 1, s
 A Fixed Support
 B Remote Force: 1,е+005 N

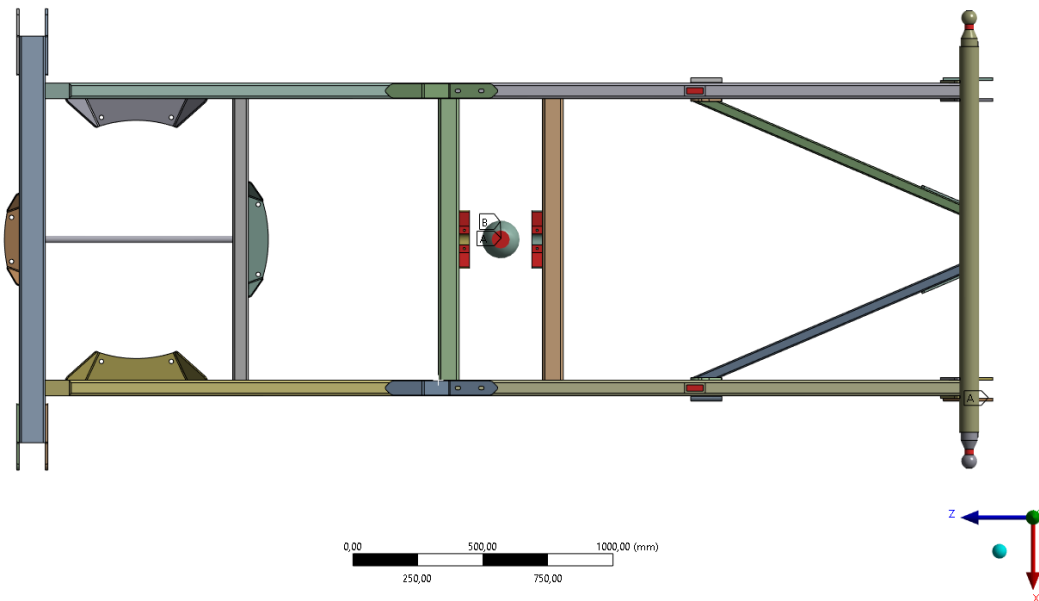


Рисунок 2.6 Задання навантажень на раму конструкції

Для задання віддаленої сили використовується саме Remote Point, оскільки потрібно врахувати просторову конструкцію, а в ній центр тяжіння не лежить на площині, відповідно інерція в досліджувальному тілі змінюється (Рисунок 2.7).

B: Modal
 Solution Information
 Constraint Equation

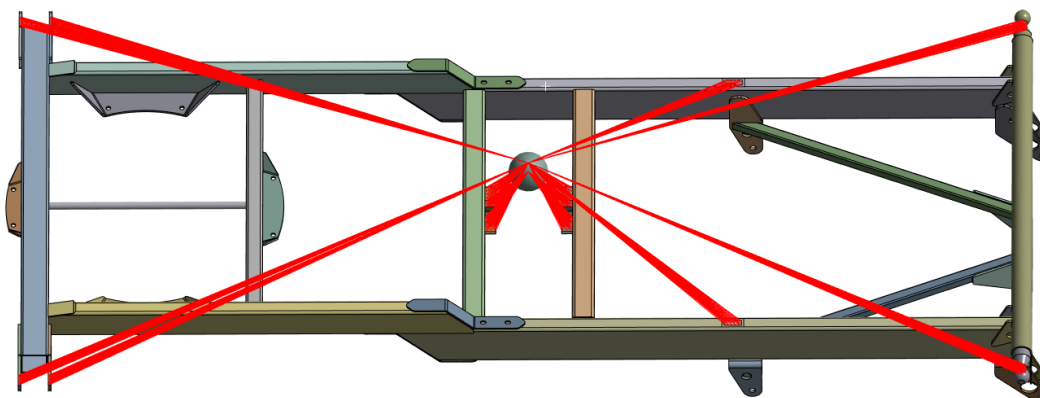


Рисунок 2.7 Місця навантаження за допомогою Remote Point

При розв'язку завдання у першому наближенні було розглянуто статичну задачу. Щоб врахувати правильність задання моделі та перегляду результатів(місце для спрощення моделі). В результаті було отримано розподіл напружень та деформації рами в статичній постановці(рисунок 2.8).

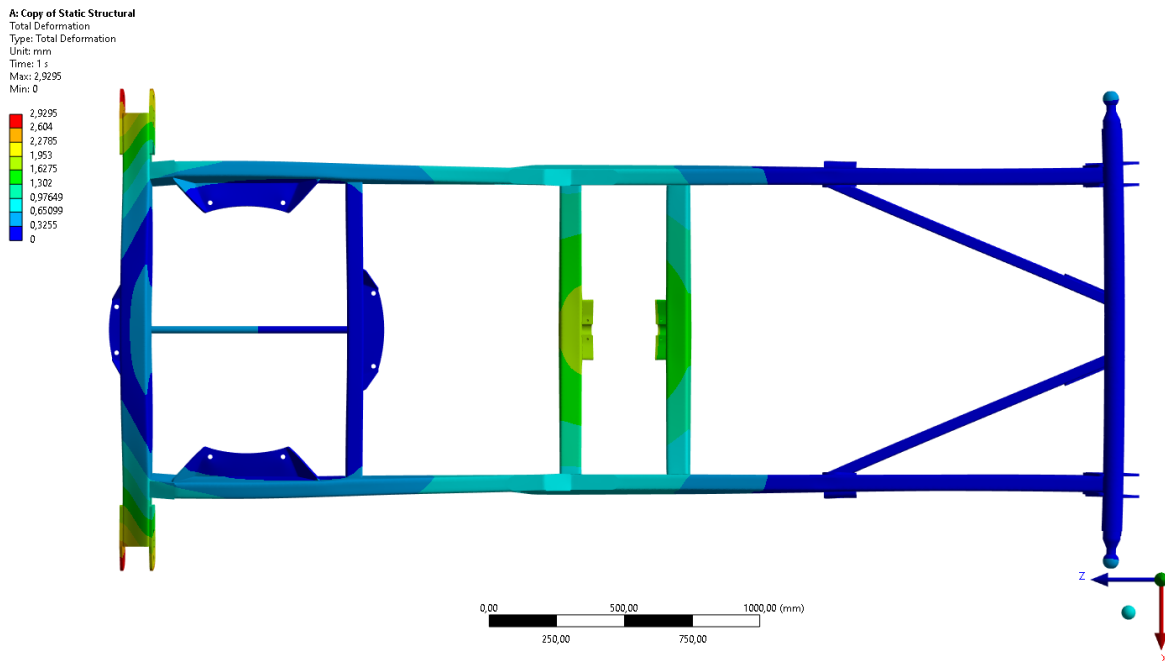


Рисунок 2.8 Деформації конструкції під впливом навантаження ваги та зосередженої маси по центру рами

З розподілу напружень, зображеного на рисунку 2.9, видно, що найвищі рівні напружень спостерігаються на передній балці та у місцях навантаження рами. Це графічне представлення ілюструє великі напруження саме в зоні концентрації навантаження в рамі. Ці конкретні області в конструкції пов'язані з найінтенсивнішими навантаженнями на них. Запропоноване відображення вказує на те, що ці області потребують уваги та можливих модифікацій для оптимізації роботи конструкції та зниження напружень.

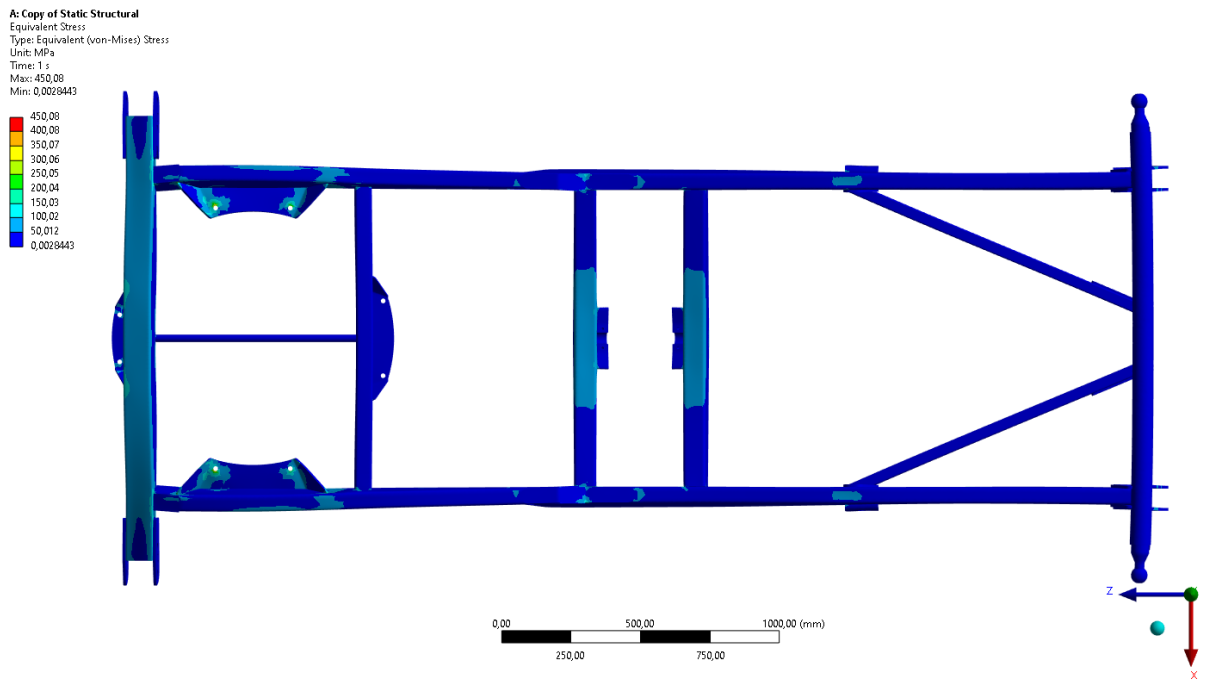


Рисунок 2.9 Напруження в конструкції під впливом навантаження

В першому наближенні проводився модальний аналіз на статичний відгук системи без врахування власного демпфування розглядалися перші 10 форм коливань. Модальний аналіз призначений для визначення вібраційних характеристик лінійно пружних систем. Він дозволяє отримати уявлення про реакцію конструкції на різні типи динамічного навантаження.

Можливе запровадження контактних умов у розрахунок при модальному дослідженні (Таблиця 2.1). Але аналіз вільних коливань є лінійним, і, відповідно, контакти в модальному аналізі відрізняються від нелінійних контактів статички.

Відмінність контактів у аналізі вільних вібрацій: Два типи нелінійних контактів – жорсткий (Rough) і без тертя (No Separation) - можуть бути задані в лінійному аналізі, але виявляють себе як пов'язані (Bonded) або без поділу (No Separation). Якщо заданий зазор, як у нелінійному типі контакту, у розрахунку приймається відсутність контакту - Free. Поведінка контактів пов'язана (Bonded) і без поділу залежить від розміру області захоплення.

Таблиця 2.1 Типи контакту при розрахунку

| Тип контакту | Статичний розрахунок | Модальний аналіз | | |
|---------------|----------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| | | Початковий дотик | Усередині області | За межами області |
| Bonded | Bonded | Bonded | Bonded | Free |
| No Separation | No Separation | No Separation | No Separation | Free |
| Rough | Rough | Bonded | Free | Free |
| Frictionless | Frictionless | No Separation | Free | Free |

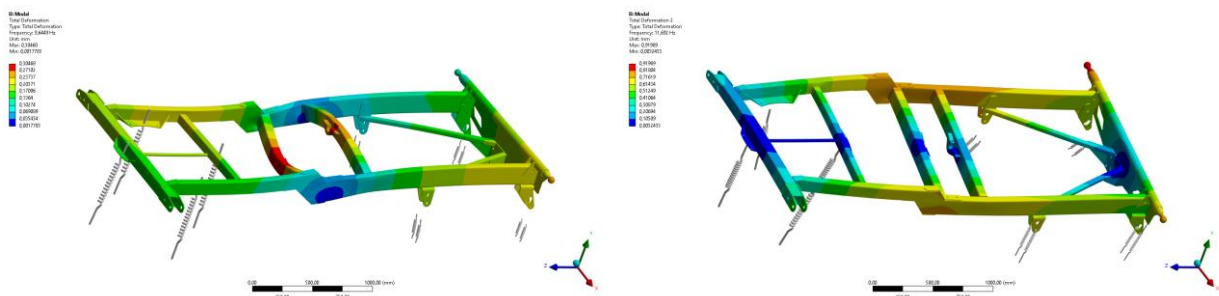
При визначенні власних частот використовується формула 2.1 з якої видно, що зовнішні навантаження для системи не потрібні, а все що впливає на жорсткість потрібно враховувати, тобто модель має бути закріплена.

В результаті отримали перелік частот по номерах та їх значення рисунок 2.10



Рисунок 2.10 Результати власних форм коливань при модальному аналізі

В результаті маємо згинальні та крутильні форми коливань. Саме для тонкостінних моделей крутильні коливання мають більший вплив, ніж для товстостінних[8]. Тому для такої моделі буде велика кількість таких форм (рисунок 2.5).



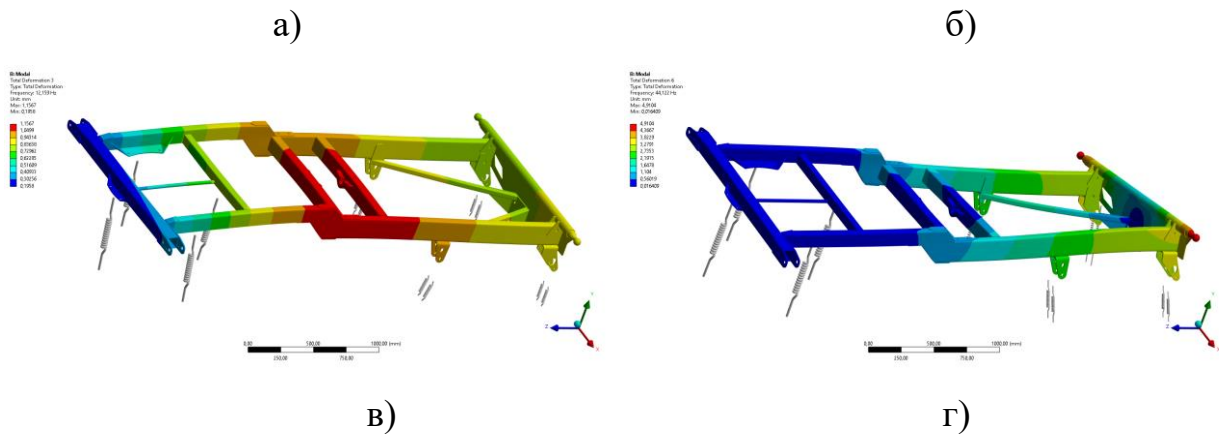


Рисунок 2.11 Власні форми коливань (а-перша форма, б-друга форма, в-третья форма, г-шоста форма)

Представлені форми коливань (рисунок 2.11) в цій системі будуть існувати, але потрібно враховувати, що представлений масштаб фіктивний та більш направлений на розуміння форми коливань. А значення (рисунок 2.12) відображають точні значення власних коливань при таких дослідженнях.

В результаті було отримано числову характеристику вкладу форм коливань у загальний відклик системи (рисунок 2.12). Зокрема були отримані значення власних частот для 10 форм коливань та їх вклад по вісям координат

| Mode | Frequency [Hz] | X Direction | Y Direction | Z Direction | Rotation X | Rotation Y | Rotation Z |
|------|----------------|--------------|--------------|--------------|------------|--------------|-------------|
| 1 | 19.694 | 0,83184 | 9,8055e-005 | -1,0912e-004 | 0,21999 | -1533,6 | -64,238 |
| 2 | 23,301 | 2,7563e-006 | -0,11727 | 0,77675 | -138,4 | -6,7646e-003 | 3,1867e-004 |
| 3 | 31,909 | -1,4046e-004 | 0,81319 | 0,10918 | 1507,9 | 0,30931 | 9,7811e-003 |
| 4 | 62,47 | 0,32046 | 3,318e-004 | 1,3372e-003 | 0,64392 | -1096,6 | 49,208 |
| 5 | 121,83 | -7,854e-002 | 6,4189e-004 | 1,627e-004 | 1,0474 | 178,47 | -152,47 |
| 6 | 133,02 | 1,5494e-004 | 7,9398e-002 | 4,1289e-002 | 254,56 | -2,4013 | -0,8299 |
| 7 | 137,63 | 4,1086e-003 | -3,4365e-002 | 1,0171e-002 | -97,101 | -6,2735 | 1,7734 |
| 8 | 142,67 | 4,4897e-002 | -1,1175e-002 | 2,5239e-002 | -41,879 | -193,47 | -24,274 |
| 9 | 146,3 | -2,2271e-002 | -2,4984e-002 | 9,503e-002 | -105,12 | 76,193 | 3,0767 |
| 10 | 151,13 | -1,3883e-002 | 2,669e-003 | 1,2921e-003 | 0,71078 | -0,37274 | 114,93 |

Рисунок 2.12 Вклад форм коливань у загальний відклик системи

Наступне відображення (рисунок 2.13) демонструє вклад відображених частот на систему в цілому(тобто, наприклад по вісі X 91% ефективної маси по відношенню до загальної входять в 10 форм коливань). Це свідчить про повноту захоплення власних форм(мод)

| Mode | Frequency [Hz] | X Direction | Y Direction | Z Direction | Rotation X | Rotation Y | Rotation Z |
|------|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 19.694 | 0.7847 | 1.0903e-008 | 1.3502e-008 | 1.2274e-008 | 0.62067 | 4.7971e-002 |
| 2 | 23.301 | 8.6155e-012 | 1.5595e-002 | 0.6842 | 5.1337e-003 | 1.2076e-011 | 1.1805e-012 |
| 3 | 31.909 | 2.2372e-008 | 0.7499 | 1.3518e-002 | 0.60942 | 2.5248e-008 | 1.1122e-009 |
| 4 | 62.47 | 0.11646 | 1.2485e-007 | 2.0278e-006 | 1.1113e-007 | 0.31734 | 2.8149e-002 |
| 5 | 121.83 | 6.996e-003 | 4.6724e-007 | 3.0019e-008 | 2.9405e-007 | 8.406e-003 | 0.27024 |
| 6 | 133.02 | 2.7223e-008 | 7.149e-003 | 1.9333e-003 | 1.7389e-002 | 1.5217e-006 | 8.0064e-006 |
| 7 | 137.63 | 1.9143e-005 | 1.3392e-003 | 1.1732e-004 | 2.5272e-003 | 1.0386e-005 | 3.6558e-005 |
| 8 | 142.67 | 2.2859e-003 | 1.4163e-004 | 7.2238e-004 | 4.701e-004 | 9.8784e-003 | 6.8496e-003 |
| 9 | 146.3 | 5.6247e-004 | 7.0786e-004 | 1.0241e-002 | 2.9617e-003 | 1.532e-003 | 1.1004e-004 |
| 10 | 151.13 | 2.1856e-004 | 8.078e-006 | 1.8932e-006 | 1.3541e-007 | 3.6666e-008 | 0.15334 |
| Sum | | 0.91124 | 0.77484 | 0.71074 | 0.63788 | 0.95784 | 0.5069 |

Рисунок 2.13 Відношення ефективної маси до загальної маси

2.5 Висновки

Рисунки 2.11-2.13 наведені режими коливань і максимальні переміщення (деформації) для першого-десятого порядків після додавання противагових навантажень. Виявлено, що коливання першого – третього порядків є переважно згинального характеру коливаннями. Моді від 3-10 порядку є крутильними і відбуваються по всій конструкції рами. Моді коливань другого та третього порядків представляють собою осьові згинальні коливання, які відбуваються в центральній частині конструкції, з'єднуючи розвантажувальний циліндр та поздовжні лонжерони рами причепа. Четвертим режимом коливань є спільні згинально-крутильні коливання, що відбуваються в задній частині конструкції рами причепа.

Досліджено, що радіальна крутильна вібрація виникає з верхньої зовнішньої вібрації та нижньої половини внутрішньої вібрації. Моді(власні форми) четвертого порядку представлені осьовими згинальними коливаннями з крутильними коливаннями в задній частині рами, викликаючи легку радіальну торсійну вібрацію з верхньої вібрацією всередині та нижньою половиною вібрацією назовні.

Режими вібрації п'ятого порядку включають осьові коливання згину, одночасну незначну осьову крутильну вібрацію з двох боків тіла передачі, а також рух першої сторони назовні.

Десята форма коливань показує найбільші згинально-крутильні деформації саме в передній частині рами де закріплено кузов причепа.

Змінюючи величини та характер навантажень на конструкцію, застосовано модальний аналіз FEA. Виявлено, що зі зміною характеру

навантаження на раму жорсткість з'єднання, що призводить до зменшення власних частот третього та другого порядків. Змінивши характер, навантаження можна змінити власну частоту конструкції, та виявити найбільш небезпечні місця. Крім того, слід відзначити, що пошкодження або ослаблення місць напруження може призвести до зниження власної частоти та викликати небезпечні коливання чи резонанс.

РОЗДІЛ 3. ГАРМОНІЧНИЙ АНАЛІЗ РАМИ КУЗОВА ПРИЧЕПА

3.1 Вступні зауваження до гармонічного аналізу

Гармонійний аналіз відіграє важливу роль у визначенні стійкої відповіді структури на навантаження, яке змінюється синусоїдально (гармонійно) від часу. Цей аналіз дає змогу перевірити конструкцію, надаючи інформацію, чи виникне резонанс, який може призвести до надмірного шуму, деформацій та вібрації в залежності від напружень. Крім того, він допомагає визначити, чи можуть циклічно повторювані навантаження призвести до повторних напружень, що можуть спричинити пошкодження через втому та потенційний вихід з ладу конструкції.

Задачі динаміки можуть бути вирішені як у часовій, так і в частотній областях. У часовій області вхідні дані та відповіді можуть бути довільними і представляти справжні сценарії, такі як наприклад одиничний удар (наприклад удар молотком, рисунок 3.1(а)) в результаті буде отримано відгук (рисунок 3.1(б)). Проте отримання стійкого відклику системи, який змінюється з часом відгук в області часу є обчислювально складним через необхідність розв'язання динамічних відкликів системи в декілька ітерацій.

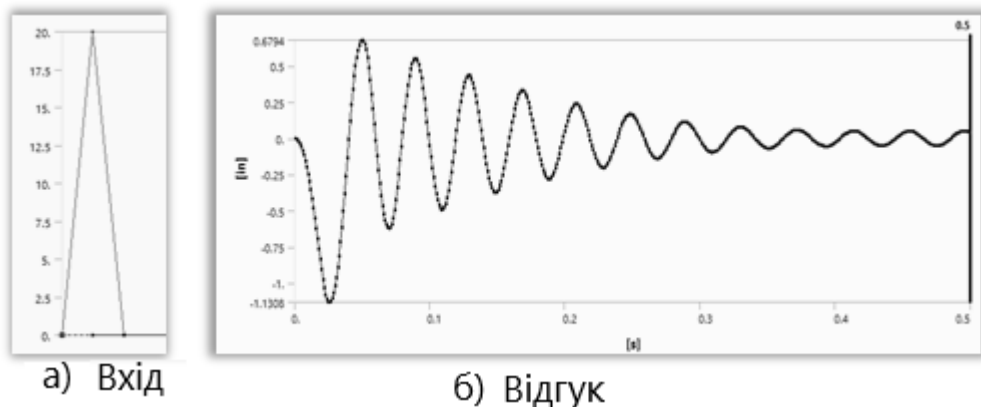


Рисунок 3.1 Графік побудови вхідних даних та відгук на них при часовому методі

Для частотної області вхідні дані є синусоїдальними, що дозволяє ефективно обчислити сигнал для конкретної частоти збудження, тобто така область вказує на кількість сигналів, які знаходяться у межах кожної визначеної частотної смуги всередині діапазону частот. Гармонійна функція(3.1) включає три основні змінні: частота збудження (Ω_i), амплітуда (F_i) та кут фази (θ_i). Ітерації розв'язання повторюються, коли ми просуваємося по зазначеному діапазону частоти, що цікавить, і отримуємо стійкі синусоїдальні відповіді.

$$F_i = F_i \sin(\Omega_i t + \theta_i) \quad (3.1)$$

$$\Omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{1}{T_f}$$

де, Ω_i – установлена кутова частота, f – вимушена частота, T_f – період, t – час, F_i -амплітуда, θ_i – кут фази.

Амплітуда являється піко примусового збудження, і воно діє як в позитивному, і негативному напрямках. Кут фази стає ключовим, коли присутні різні навантаження, керуючи їхнім відносним фазовим або часовим взаєморозташуванням.

Введено комплексні змінні для полегшення математичних рішень у гармонійному аналізі. Комплексні змінні, представлені на комплексній площині (діаграма Арганда рисунок 3.2), мають дійсні (x) та уявні (y) частини(рівняння 3.2), $i = \sqrt{-1}$ уявне число. З діаграми Арганда та простої тригонометрії можна отримати: $x + iy = A(\cos \phi + i \sin \phi)$. Експоненціальна форма є математично елегантною для похідних, тоді як тригонометрична форма надає більш інтуїтивне візуалізацію гармонійного руху.

$$z = x + iy \quad (3.2)$$

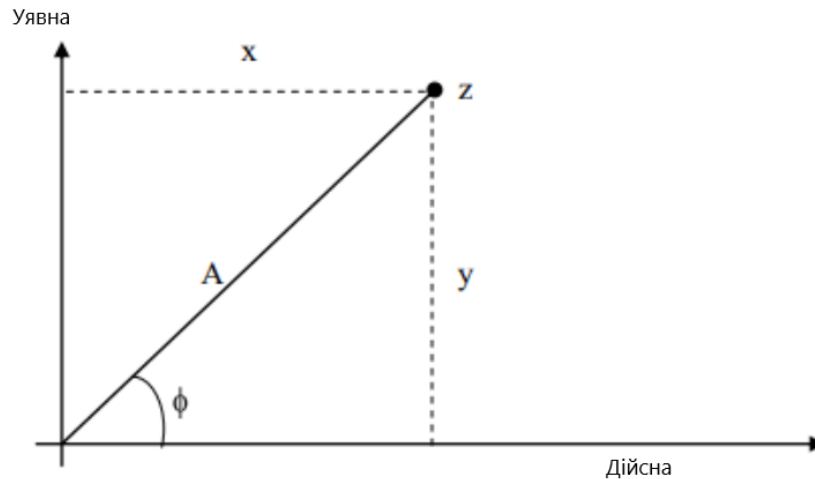


Рисунок 3.2 Графік побудови вхідних даних та відгук на них при часовому методі

Комплексні змінні можна записати у двох загальних формах:

$$z = x + iy = Ae^{i\phi} \quad A = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{Амплітуда}$$

$$z = x + iy = A(\cos \phi + i \sin \phi) \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad \text{Кут фази}$$

Швидкість та прискорення також є важливими величинами у гармонійному русі. Швидкість - це похідна від переміщення, а прискорення - похідна від швидкості:

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} - \text{швидкість}; \quad \ddot{u} = \frac{d\dot{u}}{dt} - \text{прискорення}$$

Отже, враховуючи, форму зміщення, яке представляє синусоїдальне зміщення: $u = Ae^{i\Omega t}$

Швидкість та прискорення обчислюються диференціюванням експоненціальної форми:

$$\dot{u} = i\Omega Ae^{i\Omega t} \quad \ddot{u} = -\Omega^2 Ae^{i\Omega t}$$

В результаті виведено тригонометричні форми рівнянь:

$$u = A(\cos \Omega t$$

$$+ i \sin \Omega t) \quad \dot{u} = \Omega A(i \cos \Omega t - \sin \Omega t) \quad \ddot{u} = -\Omega^2 A(\cos \Omega t + i \sin \Omega t)$$

З рисунка 3.3 легко бачити графічно, як гармонічна відповідь у стаціонарному стані змінюється з часом. Швидкість зсувається на 90 градусів не по фазі від зміщень. Коли переміщення є максимальним або мінімальним, швидкість дорівнює нулю. Також прискорення зсувається на 180 градусів від фази та переміщень (або на 90 градусів від швидкості). Крім того, коли переміщення є максимальним, прискорення є мінімальним, і навпаки.

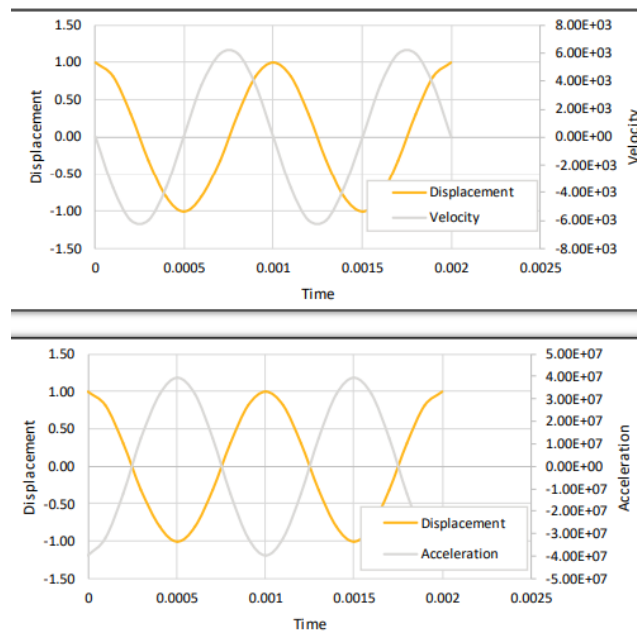


Рисунок 3.3 Графік залежності переміщення, швидкості та прискорення від часу

Починаючи з матричної форми основних рівнянь руху, досліджуємо гармонійне рішення цього рівняння:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{A\} \quad (3.3)$$

Функція сили F і переміщення u мають вигляд, показаний нижче (рівняння 3.4). Їх можна візуалізувати у вигляді синусоїд і просто вказавши значення для часу (t) і кругової частоти (Ω), обчислити комплексні значення сили або переміщення в кожному вузлі, щоб не розв'язувати невідомі максимальні значення і фазові зсуви для кожного вузла в моделі.

$$\{F\} = \{F_{max} e^{i\psi}\} e^{i\Omega t} \quad \{u\} = \{u_{max} e^{i\psi}\} e^{i\Omega t} \quad (3.4)$$

Диференціюємо переміщення, щоб отримати швидкість і прискорення, підставляємо і спрощуємо отримані рівняння в гармонічні рівняння руху:

$$(-\Omega^2 [M] + i\Omega [C] + K) (\{u_1\} + i\{u_2\}) = (\{F_1\} + i\{F_2\}) \quad (3.5)$$

Використовуючи метод суперпозиції мод і опускаючи всі деталі, рівняння можна перетворити в модальну форму:

$$(-\Omega^2 + i2\omega_j\Omega\zeta_j + \omega_j^2) y_{jc} = f_{jc} \quad (3.6)$$

де, ψ - зсув фази, ϕ - фазовий зсув зміщення, Ω - накладена кутова частота, u_1 - дійсний вектор переміщення, u_2 - вектор уявного зміщення, F_1 - вектор дійсної сили, F_2 - вектор уявної сили, ω - власна частота, ζ - коефіцієнт демпфування, y_{jc} – комплексні модальні координати, f_{jc} - комплексна модальна сила.

Модальна форма рівняння (3.6) має комплексні модальні координати y_{jc} як невідомі, які менше для вирішення, ніж фізичні DOF як невідомі.

$$y_{jc} = \frac{f_{jc}}{(\omega_j^2 - \Omega^2) + i(2\omega_j\Omega\zeta_j)} \quad (3.7)$$

Це ефективно з точки зору обчислень, оскільки рівняння не пов'язані (лише одна залежна змінна на рівняння). За допомогою методу суперпозиції форм коливань, обчислюємо внесок зміщення від кожної моди:

$$\{C_j\} = \{\Phi_j\}y_{jc}, \quad \{C_j\} - \text{Внесок моди } j$$

Використовуючи y_{jc} та форми мод (власні вектори) Φ_j обчислюємо комплексні переміщення шляхом підсумовування n мод.

$$\{u_c\} = \sum_{j=1}^n \{C_j\} \quad (3.8)$$

З рівняння (3.7) можна зробити висновки: Коли частота збудження (Ω) дорівнює власній частоті ω , а дзета (ζ) = 0, тоді модальна координата (y_{jc}) є нескінченною; У фізичній системі може статися збудження на власній частоті або резонансі ($\Omega = \omega$), але в системі завжди має бути деяка кількість демпфування, щоб запобігти передбаченню нефізичної нескінченної реакції; Крім того, при збудженні на власній частоті або резонансі ($\Omega = \omega$), фазовий кут відповіді на вхідний сигнал становить 90 градусів. Результатом гармонійного розв'язку є комплексний вектор зміщення (рівняння 3.8).

Це забезпечує реальні та уявні значення результату, але часто більш корисними формами результатів є амплітуда та фаза:

$$\begin{aligned} z = x + iy = Ae^{i\phi} & \quad A = \sqrt{x^2 + y^2} & \quad \text{Амплітуда} \\ z = x + iy = A(\cos \phi + i \sin \phi) & \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} & \quad \text{Кут фази} \end{aligned}$$

де x — дійсне значення, а y — уявне значення.

Таким чином можна обчислити амплітуду відклику в стаціонарному стані, що зазвичай корисніше, ніж знати реальні чи уявні результати. З одного боку, дійсне й уявне можна розглядати як частину амплітуди в даний момент часу,

засновану на куті, як було представлено на векторному графіку. Коли є залежність в часі, величина Ωt змінюється, що призводить до різних значень дійсної ($\cos\Omega t$) та уявної ($\sin\Omega t$) складових зміщення. Комплексне рівняння переміщення:

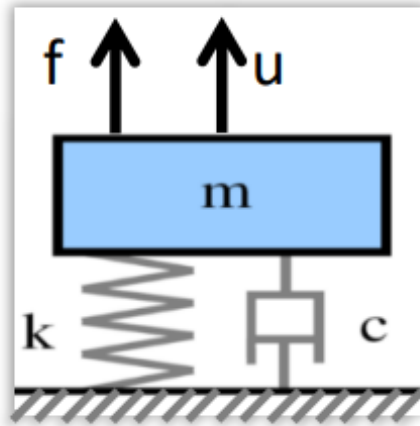
$$\{u\} = \{u_{max} e^{i\phi}\} e^{i\Omega t}$$

Розглянуто результати величин переміщення, швидкості та прискорення. Проте, деформації виводяться з переміщень, а напруження - з деформацій та конструктивної моделі (у випадку лінійно-упругих матеріалів - закон Гука). Часто є цікавість розуміти гармонійні (синусоїдальні) рівні напруг, оскільки вони повторюються при відомих частотах. За допомогою цих результатів можна проводити аналіз втоми та робити прогнози щодо терміну служби. В результаті, хоча компоненти напружень та деформації (нормальні та зсувні) є гармонійними (синусоїдальними), популярні похідні величини, такі як головні напруги чи еквівалентні напруги, такими не є.

Щоб отримати чисельний результат форми відгуку потрібно проводити аналіз Response Spectrum, тобто отримати характеристику відгуку системи на вплив конкретної сили.

Цей розрахунок має завершуватися гармонічним розрахунком. В гармонічному розрахунку нас будуть цікавити амплітуди котрі будуть досягатися при вимушених коливаннях.

Для прикладу розглянемо систему з одним ступенем вільності (рисунки 3.4). Гармонійна сила (f) прикладена до маси (m), результуюче зміщення (u) та фазовий кут (ϕ) буде отримано при зміні частоти збудження від нуля до 3-кратної власної частоти.



Рисцнок 3.4 Система з одним ступенем вільності

З рівняння руху (3.3)

$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f \sin \Omega t$ - Основне рівняння руху

$u = \frac{f/k}{\sqrt{(1 - (\frac{\Omega}{\omega_n})^2)^2 + (2\xi(\frac{\Omega}{\omega_n}))^2}}$ - Переміщення маси

$\phi = \tan^{-1} \frac{2\xi(\frac{\Omega}{\omega_n})}{1 - (\frac{\Omega}{\omega_n})^2}$ - Фаза кута

$c_c = 2\sqrt{kt}$ - Граничне демпфування

$\zeta = c/c_c$ - Коефіцієнт демпування

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ - Згасаюча власна частота

Коли накладена частота (Ω) наближається до власної частоти (ω) у напрямку збудження, виникає резонанс, як вказують спайки на графіку (рисунок 3.5). Збільшення демпфування зменшує амплітуду відгуку для всіх накладених частот.

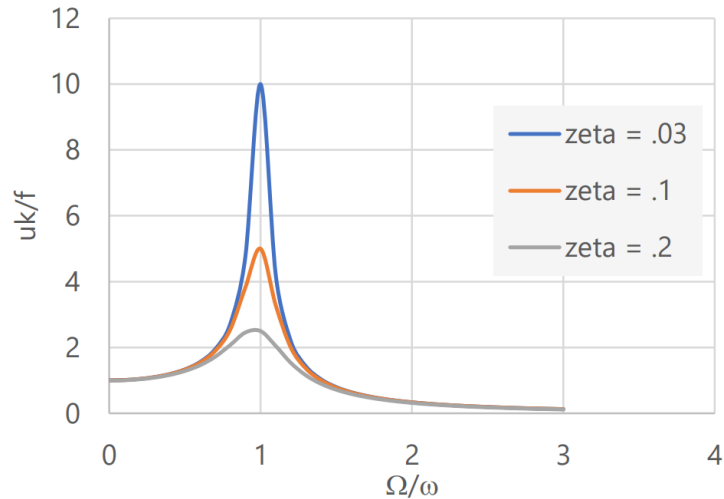


Рисунок 3.5 Безрозмірна характеристика АЧХ(амплітудно частотна характеристика) для одномасової моделі

Невелика зміна демпфування має великий вплив на відгук поблизу резонансу. Згасаюча власна частота ωd менша за власну частоту, яку можна побачити з ζ (дзета) = 0,2 з невеликим зсувом піку менше ніж 1,0. Коефіцієнт ζ (дзета) = 0,2, такий високий коефіцієнт демпфування може бути присутнім для деяких еластомерів, каучуків тощо, але коефіцієнт демпфування більшості технічних металів зазвичай менше 0,05 (5%).

При побудові фазових частотних характеристик(ФЧХ) кут завжди проходить через $\pm 90^\circ$ при резонансі для будь-якої величини демпфування, як показано на графіку(Рисунок 3.6). Фазовий кут показує відносний час збудження до реакції.

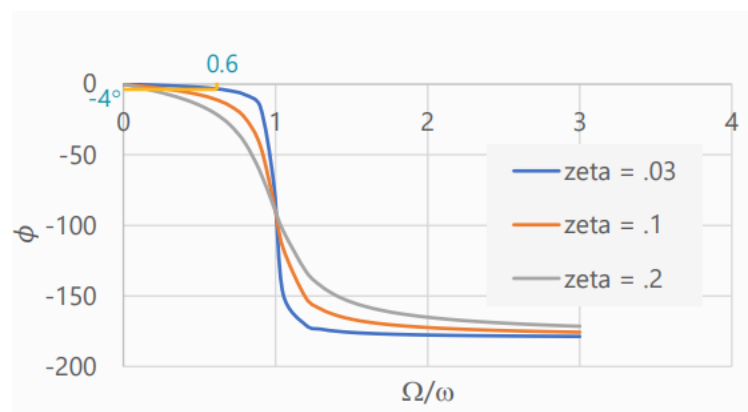


Рисунок 3.6 Безрозмірна характеристика ФЧХ для одномасової моделі

В результаті при $(\Omega/\omega) \sim 0,6$ і $\zeta = 0,03$, графік фазового кута повідомляє про фазовий кут близько -4° . На графік нижче, ми бачимо, що результат буде трохи відставати від входу.

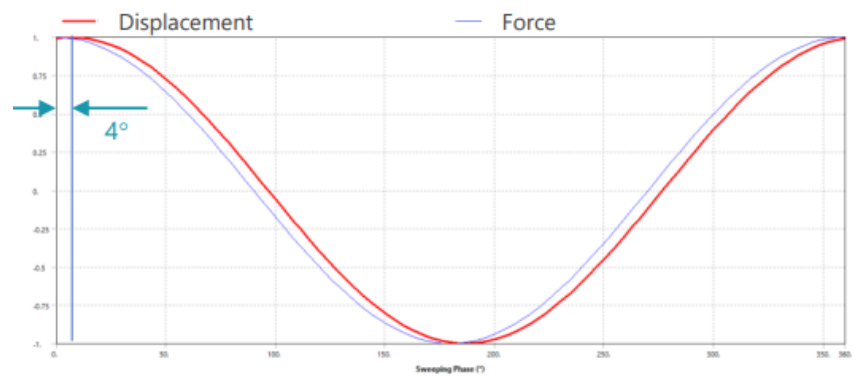


Рисунок 3.7 Гармонічний рух одномасової моделі

Останній результат, коли $(\Omega/\omega) = 2.0$ і $\zeta = 0,03$, графік фазового кута повідомляє про фазовий кут -177° . Аналізуючи графік, можна сказати, що вихід буде майже повністю протилежний входу. При такому фазовому куті, коли до блоку прикладено мінімальну силу, блок зазнає максимального зміщення.

3.2 Гармонічний розрахунок багатомасової моделі рами кузова

Гармонічний аналіз використовується для визначення вігуку конструкції на синусоїдально(гармонічно) змінне за часом навантаження.

Для гармонічного аналізу попередньо було проведено модальний аналіз конструкції з врахуванням вимушеної сили(для розрахунку задаємо 10000 Н у напрямку вісі x) рисунок 3.7. При аналізі результату з врахуванням вимушеної сили коливань рами за рахунок дорожніх нерівностей, або встановленого додатково обладнання (шнек в причепі для перевантаження, щипоріз та ін.). Сила буде діяти у напрямку координати x.

Для розрахунку багатомасової моделі в програмному комплексі Ansys для використовується Response Spectrum. В ньому потрібно прикласти силу вплив дії якої, ми шукаємо та провести модальний розрахунок пов'язаний з попереднім

статичним розрахунком. Проаналізувавши результати модального розрахунку (рисунок 3.8). Потрібно визначити найбільш навантажені моди(форми коливань) по вісям навантаження та враховувати ефективну масу(рисунок 3.9).

F: Harmonic Response
Remote Force
Frequency: 0, Hz
Remote Force: (Real) 5, e+005, (Imag) 0, N
Components: (Real) 0, -5, e+005, 0, N
Components: (Imag) 0, 0, 0, N

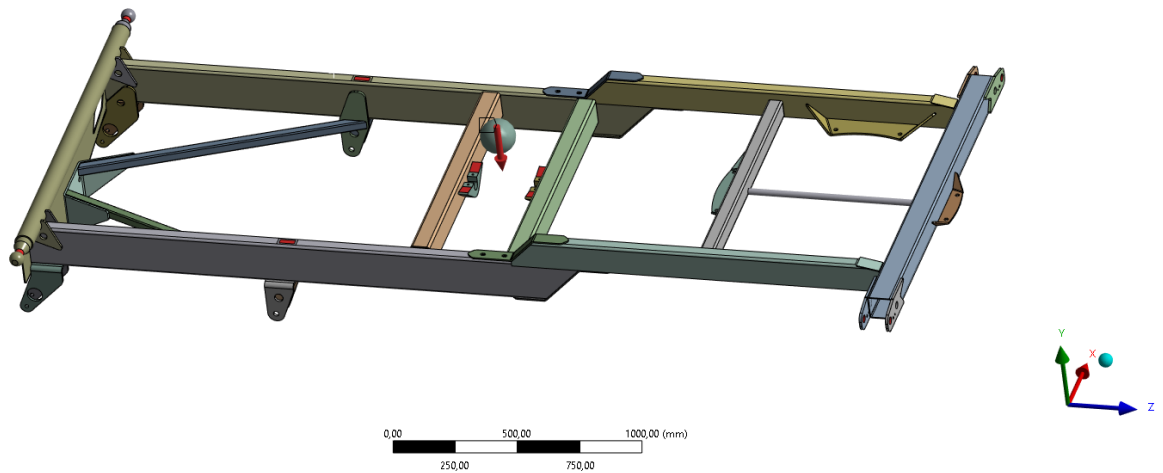


Рисунок 3.7 Прикладення віддаленої сили за допомогою Remote point (віддаленої точки прикладання)

| Mode | Frequency [Hz] | X Direction | Y Direction | Z Direction | Rotation X | Rotation Y | Rotation Z |
|------|----------------|--------------|--------------|--------------|------------|--------------|-------------|
| 1 | 19,638 | 0,83207 | 1,0254e-004 | -1,2405e-004 | 0,21893 | -1534,3 | -64,199 |
| 2 | 23,294 | 2,2921e-005 | -0,11765 | 0,77669 | -139,08 | -4,4091e-002 | -1,337e-003 |
| 3 | 31,904 | -1,4303e-004 | 0,81314 | 0,10953 | 1507,8 | 0,31423 | 9,8749e-003 |
| 4 | 62,243 | 0,32001 | 3,3665e-004 | 1,2807e-003 | 0,67706 | -1095,5 | 49,259 |
| 5 | 121,63 | 7,9976e-002 | -6,0367e-004 | 5,0599e-004 | -1,0937 | -185,82 | 151,49 |
| 6 | 132,45 | 2,7235e-003 | 6,879e-002 | 5,9943e-002 | 215,2 | -16,56 | -4,4236 |
| 7 | 136,19 | 2,6881e-002 | -3,6822e-002 | 3,2063e-002 | -127,61 | -131,7 | -22,99 |
| 8 | 137,18 | -8,0806e-003 | -4,1381e-002 | 2,3911e-002 | -126,75 | 50,107 | 10,364 |
| 9 | 139,19 | -2,0317e-002 | -1,4708e-002 | 6,2656e-002 | -73,24 | 84,582 | 9,9217 |
| 10 | 150,82 | -1,5587e-002 | -4,0357e-003 | -3,0097e-003 | 5,9432 | 6,8341 | 115,48 |

Рисунок 3.8 Вклад форм коливань у загальний відклик системи

| Mode | Frequency [Hz] | X Direction | Y Direction | Z Direction | Rotation X | Rotation Y | Rotation Z |
|------|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 19,638 | 0,78513 | 1,1924e-008 | 1,7452e-008 | 1,2846e-008 | 0,62125 | 4,7912e-002 |
| 2 | 23,294 | 5,9579e-010 | 1,5696e-002 | 0,6841 | 5,185e-003 | 5,1302e-010 | 2,078e-011 |
| 3 | 31,904 | 2,32e-008 | 0,74981 | 1,3604e-002 | 0,60937 | 2,6057e-008 | 1,1336e-009 |
| 4 | 62,243 | 0,11613 | 1,2852e-007 | 1,86e-006 | 1,2287e-007 | 0,31671 | 2,8207e-002 |
| 5 | 121,63 | 7,2533e-003 | 4,1326e-007 | 2,9034e-007 | 3,2064e-007 | 9,112e-003 | 0,26677 |
| 6 | 132,45 | 8,4116e-006 | 5,3663e-003 | 4,0747e-003 | 1,2412e-002 | 7,2374e-005 | 2,2748e-004 |
| 7 | 136,19 | 8,194e-004 | 1,5376e-003 | 1,1658e-003 | 4,3649e-003 | 4,7374e-003 | 6,1441e-003 |
| 8 | 137,18 | 7,4047e-005 | 1,9418e-003 | 6,4838e-004 | 4,3061e-003 | 6,6258e-004 | 1,2488e-003 |
| 9 | 139,19 | 4,6809e-004 | 2,4531e-004 | 4,4533e-003 | 1,4378e-003 | 1,888e-003 | 1,1444e-003 |
| 10 | 150,82 | 2,7552e-004 | 1,8469e-005 | 1,0272e-005 | 9,4673e-006 | 1,2326e-005 | 0,15502 |
| Sum | | 0,91016 | 0,77461 | 0,70806 | 0,63709 | 0,95429 | 0,50667 |

Рисунок 3.9 Відношення ефективної маси до загальної маси

Після підготовки моделі для гармонічного аналізу переходимо до Harmonic Response. В цьому модулі є два методи рішення, перший, це Mode Superposition, який вирішує задачу за рахунок сумування відповідних мод та форм коливань. Такий спосіб є швидким при розрахунку, але менш точним та повний метод, який відображає всі форми та впливи.

Проаналізувавши значення власних мод по вісям координат з рисунків 3.8, 3.9 зроблено висновок, що для гармонічного аналізу можна обмежитись, лише першими 6 формами, що відповідає діапазону до 100Гц.

Для того, щоб отримати реальний відгук системи, потрібно враховувати демпфування. Оскільки при відсутності дисипації енергії система буде отримувати розрив на пікому значенні, тобто безрозмірне відношення власної частоти до вимушеною при співпаданні буде рости до безкінечності. Тому при розрахунку таких систем, потрібно знати демпування, а воно буде визначати амплітуду. В початкових значеннях вони не відомі, тому доводиться спираючись на досвід попередніх робіт [9,10,13,14]. В рівнянні 3.6 враховані демпфування та навантаження, тобто гармонічний розрахунок використовується уже для відклику сигналу на вплив, цей результат можна виразити чере переміщення, навантаження та деформації і т.д.. Система рівнянь лінійна і тому всі нелінійності не враховуються. Враховуючи вплив контактів(таблиця 2.1), які можуть задавтись при модальному аналізі, оскільки вони впливають на жорсткість, а жорсткість це частота, відповідно і форми і т.д..

В розрахунку враховується демфування. Демпфування це механізм розсіювання енергії, що призводить до згасання коливань. Демфування залежить від матеріалу, швидкості та частоти. При великому значенні демпфування амплітуда може змінити свою форму і бути увігнутою. При розрахунках розділяють демфування на декілька груп, пропорційне швидкості до частоти, переміщення до деформації та числове. Числове демфування використовується при числових дослідженнях з метою виключення зглаження амплітуд коливань. Їх визначають за по критеріях демфування для числових розрахунків[7]. Формула для визначення

демпфування включає в себе коефіцієнти, які відповідають за масу та жорсткість системи.

В результаті було отримано амплітудно частотну характеристику, яка показує залежність амплітуди від частоти, також було отримано фазову частотну характеристику, яка показує здвиг фази. Він рахує форми та власні частотию.

В результаті отримаємо відповідну гармонійну реакцію на динамічну дію.

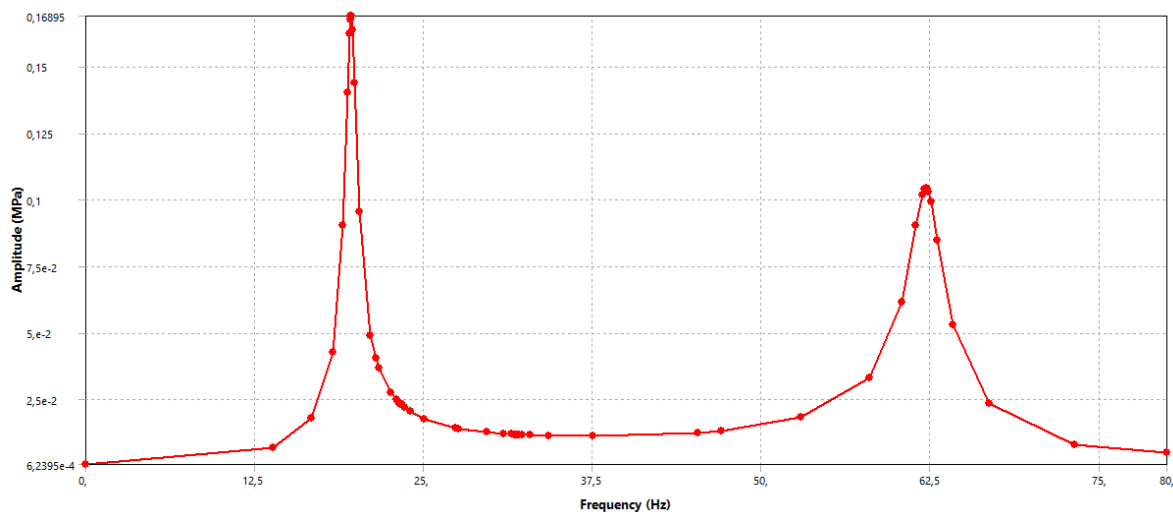


Рисунок 3.10 Амплітудно частотна характеристика рами кузова відносно осі x

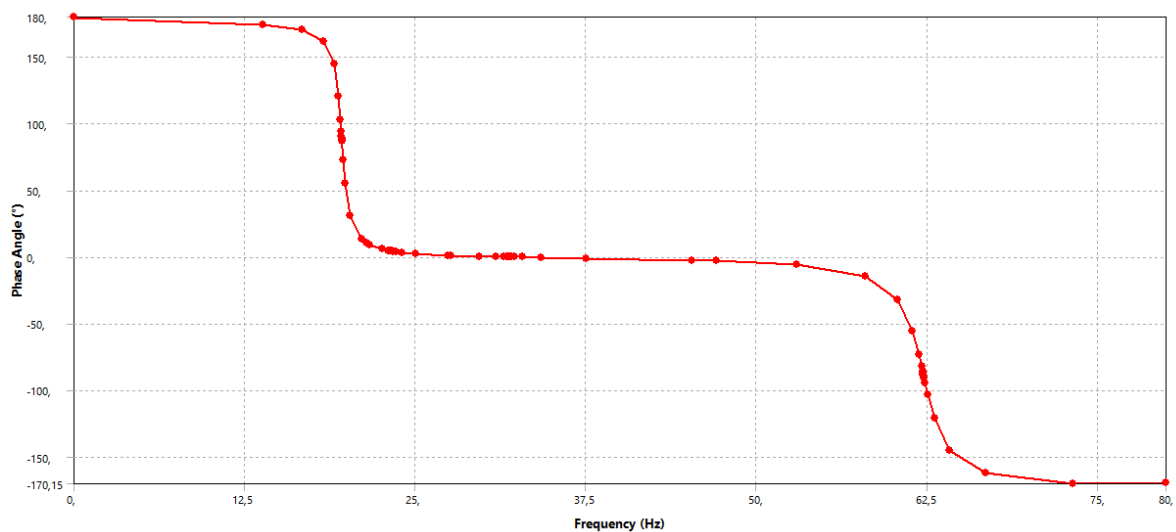


Рисунок 3.11 Фазова частотна характеристика рами кузова відносно осі x

Для наглядності результату розглянемо контури на піках АФЧХ заснованої на деформації по осі x.

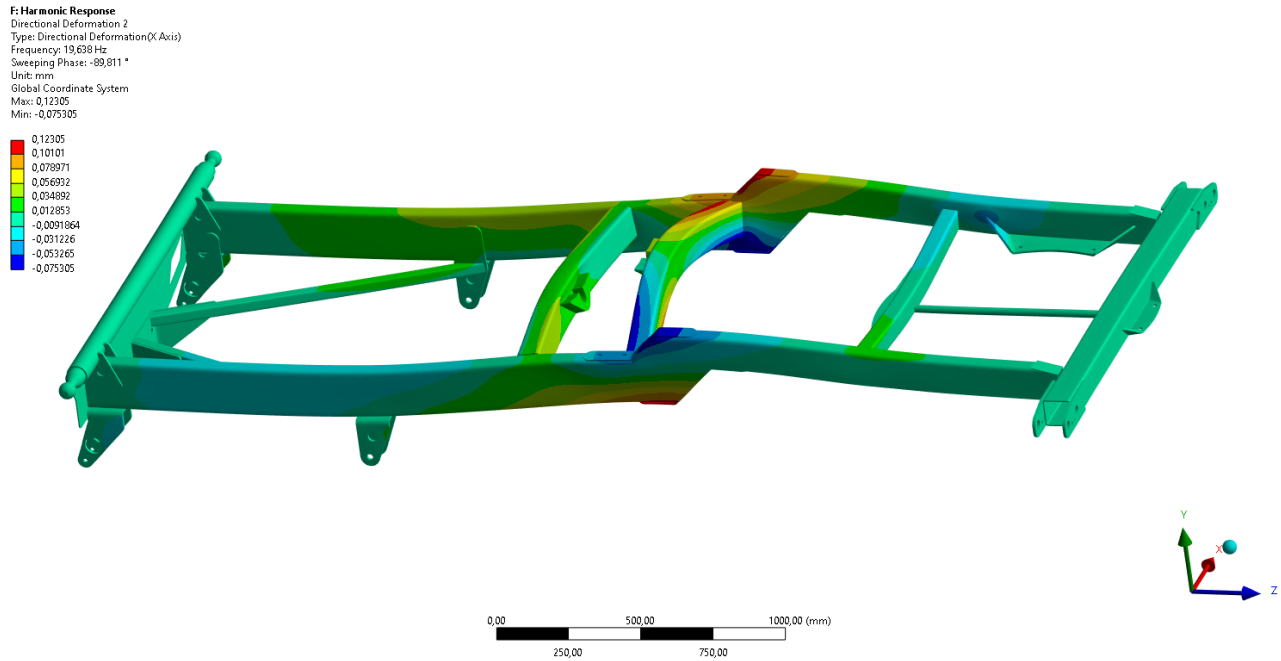


Рисунок 3.12 Форма коливань при резонансному режимі роботи в залежності від деформацій системи

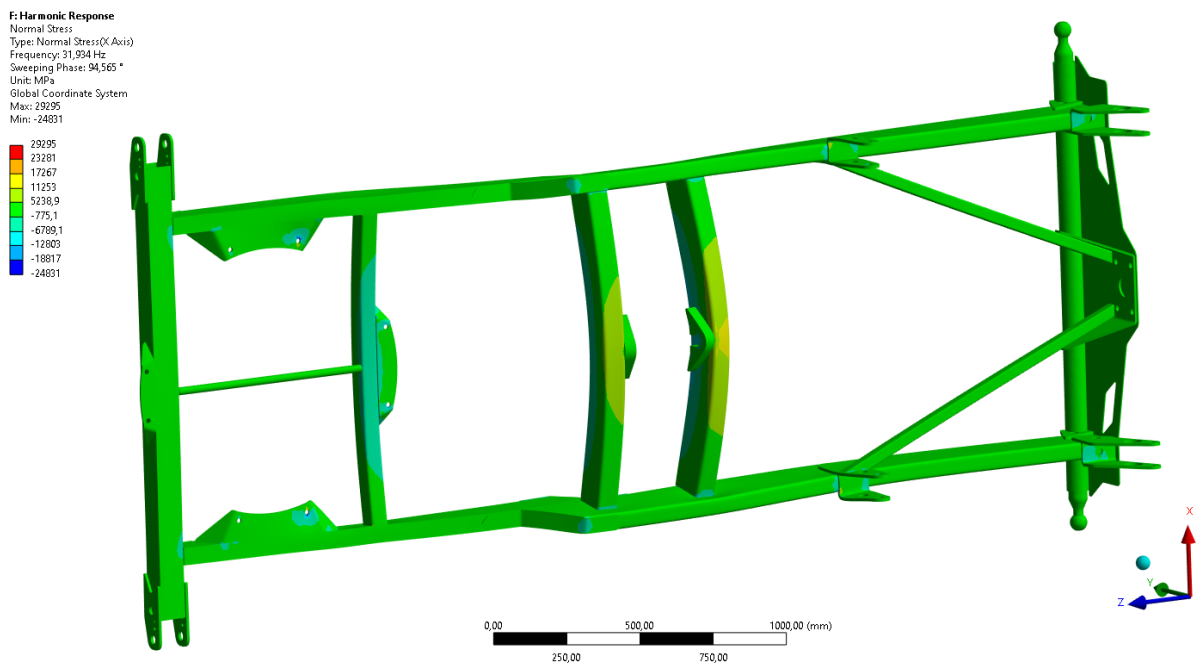


Рисунок 3.13 Форма коливань при резонансному режимі роботи в залежності від напружень системи відносно осі x

3.3 Динамічний розрахунок

За допомогою основне рівняння руху $\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f \sin \Omega t$ -, виконаємо динамічний розрахунок, де в правій частині виразу присутня компонента часу. Використаємо метод різниць за часом функція (3.9), де початковий час визначається за функцією 3.10.

$$\Delta t = t_n - t_{n-1} \quad (3.9)$$

$$\Delta t_{\Pi} = \frac{1}{20f_{\text{част}}} \quad (3.10)$$

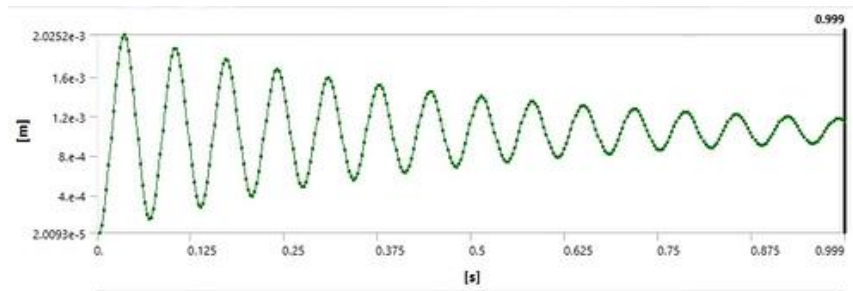
Початковими умовами для розгляду динамічної задачі є модальний аналіз. При використанні повного методу дослідження, буде вирішуватися повне рівняння руху враховуючи всі типи нелінійності(матеріалу, навантаження, нелінійної деформації). При розрахунку враховуються всі типи навантажень(демпфування).

Розв'язання задачі в залежності від часу відбувається з заданням методу суперпозиції з використанням результатів модального аналізу.

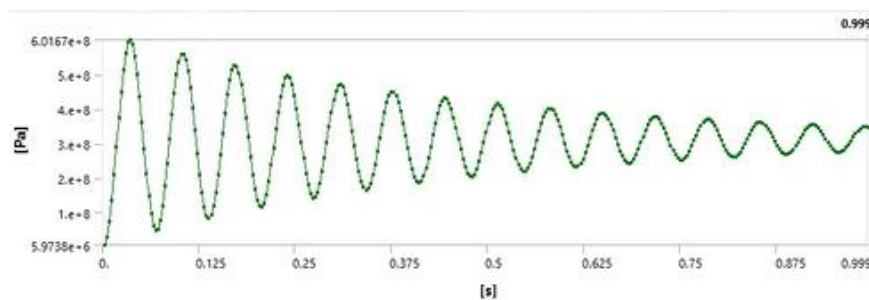
Відмінність статичного розрахунку від динамічного полягає в тому, що ще додаються динамічні сили, які залежать від характеру руху. Початкові умови беруться з модального аналізу, але вже накладається залежність від часу та включається інерційна залежність. В систему вводиться коефіцієнт демпфування, який залежать від результату дії механізму(ресор) розсіювання енергії, який передається в систему. Вводиться коефіцієнт, отриманий на основі попередніх досліджень таких механізмів(властивості ресор).

При заданні граничних умов, до системи прикладувалась миттєве навантаження для отримання відклику системи(затухаючих коливань відносно положення сатичної рівноваги). Задача розглядалась на протязі часу $t=1$ с, з шагом по часу $\Delta t=0,003$ с.

В результаті було отримано переміщення в напрямку прикладення сил та отримано графік коливань під дією значень постійних сил(рисунок 3.14.



а)

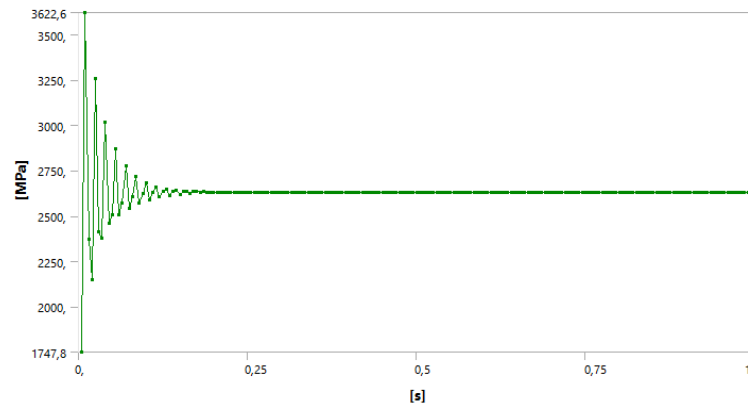


б)

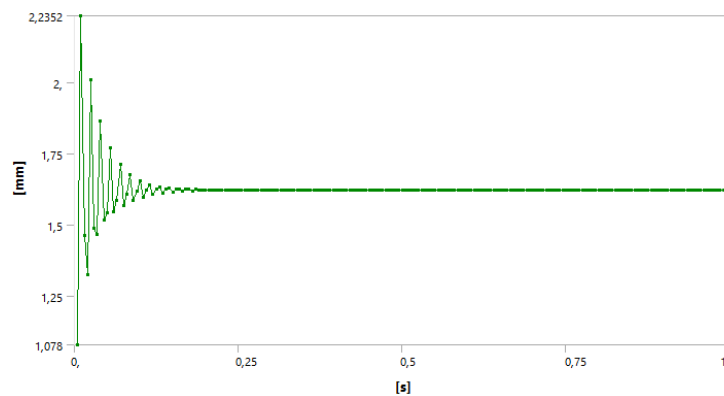
Рисунок 3.14 Форма коливань системи при миттєвому прикладенні сил в залежності від деформацій а) та напружень б) системи відносно осі x

Жорсткість такої конструкції обмежує коливання системи, а демпфування відносно швидко гасить утворені коливання системи, центр коливань зміщений відносно нуля. З графіку коливань можна визначити, частоту затухання за рахунок визначення сусідніх піків, а через них знайти частоту. $T=1/(0,04-0,025)=66,6$ Hz. В результаті було отримано максимальну частоту при модальному аналізі.

Змінивши демпфуючі властивості системи(використавши інший тип ресорів) при збільшеному демпфуванні, було отримано більш швидкі затухаючі коливання з такою ж частотою.



а)



б)

Рисунок 3.15 Форма коливань системи при миттєвому прикладені сил в залежності від деформацій а) та напружень б) системи відносно осі x

3.4 Висновки

Аналіз гармонійного відгуку обчислює реакцію конструкції на навантаження, яке має синусоїдальну відклик в часі. В нашому випадку задавалася спочатку гармонійний відклик для визначення діапазону частот. Конструкція має деякі власні частоти, які обчислюються за допомогою модального аналізу, і коли частота гармонійного навантаження відповідає власній частоті, відгук буде більшим, ніж коли частота гармонік вища або нижча за власну частоту.

Також проводився аналіз динамічних процесів — це просто обчислення історії конструкції в часі до миттєвого навантаження, яке отримало амплітудно-частотну характеристику та коливальні процеси при ній в залежності від

миттєвого навантаження та демпфування. В аналізі було зроблено заміну коефіцієнта демпфування, шляхом заміни ресор, що вплинуло на час гасіння коливань в такій системі.

ВИСНОВКИ

Проведений розрахунок несучих конструкцій транспортних засобів. Слід зазначити, що навантаження, що діють на конструкцію, змінюються в часі; їх амплітудно-частотні характеристики залежать від реального навантаження, швидкості транспортного засобу, стану дорожнього покриття та інших факторів. Це може спричинити високі напруження і в зонах напружень призвести до появи втомних тріщин, руйнування рам. Проаналізовано методи дослідження експлуатаційних навантажень і напружено-деформованого стану каркасних конструкцій за статичних і динамічних навантажень, що дозволило визначити найбільш навантажені вузли конструкції. Отримані числові результати можуть служити для прогнозування залишкового ресурсу рам причепів для сільськогосподарської техніки, враховуючи втомні відмови. Відзначено, що метод скінченних елементів є найбільш універсальним для здійснення статичного, модального, гармонійного та інших видів аналізу каркасних конструкцій.

Методом скінченних елементів досліджено напружено-деформований стан несучої конструкції причепа 2ТСП-8 за різних варіантів навантаження. Розрахунки напружено-деформованого стану рами причепа проведені для типових видів навантажень. Аналіз коефіцієнтів міцності за напругами виконано з метою врахування невизначеностей моделі рамної конструкції та невизначеностей експлуатаційного навантаження. Встановлено, що при розгляді досліджуваних варіантів навантаження каркасної конструкції найбільш небезпечними є ті, пов'язані з розвантаженням вантажу, що потребує подальших досліджень вказаних

Отримані результати розрахунків дозволили уточнити оцінку впливу динамічних навантажень на конструкцію кузова рами. Також вони надають можливість вживати заходів для поліпшення конструкції у випадку примусових коливань, спричинених нерівностями доріг або встановленням збудників коливань на рамах причепів.

Запропоновано методика, яка визначає спосіб розрахунку конструкції рами, враховуючи її міцність та жорсткість при впливі статичних та динамічних навантажень.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ТА ПОСИЛАНЬ

1. Pidgurskyi M., Ripetskyi Ye., Pidgurskyi I. Research and simulation of load modes in the evaluation of mobile machines resource. AIP Conference Proceedings. 2029. 020064. 2018. 7 p. <https://doi.org/10.1063/1.5066526>
2. Caban J., Nieoczym A., Gardyński L. Strength analysis of a container semi-truck frame. Engineering Failure Analysis. Vol. 127. 2021. 12 p. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2021.105487>
3. М.М. Ільчук, Л.Я. Зрібняк Організація і планування сільськогосподарського виробництва.. К.: 2008. – 784 с.
4. <https://westerntrailers.eu/>
5. Бабенко А.Є Коливання неконсервативних механічних систем: Монографія / А.Є.Бабенко, О.О.Боронко, Я.І.Лавренко, С.І.Трубачев. – Нац.техн.ун-т України «КПІ імені Ігоря Сікорського». –Київ: 2020. – 153с.
6. Козубенко А. І. Проектування та розрахунк на міцність рами кузова : робота на здобуття кваліфікаційного ступеня бакалавра : спец. 131 – прикладна механіка / наук. кер. О. О. Позовний. Суми : СумДУ, 2022. 41 с.
7. <https://www.ansys.com/>
8. Крутій Ю.С., Вандинський В.Ю. Метод розрахунку стрижневих конструкцій на коливання з врахуванням власної ваги. 2021. DOI:10.31650/2415-377X-2021-82-37-46
9. Перельмутер А. В., Юрченко В. В. Вибрані проблеми розрахунку та оптимального проектування сталевих конструкцій із холодногнутих профілів. - Київ : Каравела, 2022. - 205 с. : рис., табл.. -ISBN 978-966-8019-33-3
10. Y. W. Lee, T. P. Cheatham and J. B. Wiesner, "Application of Correlation Analysis to the Detection of Periodic Signals in Noise," in *Proceedings of the IRE*, vol. 38, no. 10, pp. 1165-1171, Oct. 1950, doi: 10.1109/JRPROC.1950.233423.
11. Mykola Stashkiv, Ivan Pidgurskyi, Oleh Pidluzhnyi, Mykola Pidgurskyi, Mykhaylo Levkovych, Ruslan Skliarov, Andriy Mushak, analysis of the stress-strain

state of the vehicle frame by finite element method, Journal of the Ternopil National Technical University, 2022, № 4 (108) https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu2022.04

12. Mohammed A.S., Babu N.R., Sivaprakasam P., Udayaprakash J. Modal Analysis and Comparison of Composite Materials and Mild Steel for Dump Truck Chassis Frame, International Journal of Vehicle Structures and Systems, 15 (2), pp. 247 – 250, DOI: 10.4273/ijvss.15.2.20

13. Автомобільні кузови. (2022) Частина 1 : навч. посіб. / О. М. Артюх, О.В. Дударенко, В.В. Кузьмін та ін. Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2022. – 292 с. [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://bodia.online/l/eQmIWj>.

14. Джінг К., Чен Дж., Ву Дж. (2018) Модальний аналіз каркаса кузова автобуса на основі Hyperworks. J. Сільськогосподарське обладнання та технології., 2: 54-57.

15. Дізо Дж. Статистичний аналіз рами одновісного тракторного причепа. (2021). Дізо Дж., Блатнікий М. (Жилінський університет, Словаччина), Семенов С., Міхайлов Є., Дахль В. (Східноукраїнський національний університет, Україна, Луганськ). Інженерія розвитку сільської місцевості. Праці міжнародної наукової конференції (Латвія).