

**МОДЕЛЮВАННЯ КВАЗИСТАТИЧНОГО ПРОЦЕСУ УТВОРЕННЯ ЛЕЖАЧОЇ  
КРАПЛІ НА ТОРЦІ НОЖОВОГО КАПІЛЯРА****І.Є. Овчар, аспірант***Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,  
м. Івано-Франківськ*

*Проведено моделирование квазистатического процесса роста лежащей капли на торце ножового капилляра для разных значений капиллярной постоянной  $a_r^2$ , и его программная реализация. В результате этого получены численные значения параметров капли в процессе ее роста, а также в момент достижения ею максимального давления.*

*Проведено моделювання квазістатичного процесу росту лежачої краплі на торці ножового капіляра для різних значень капілярної сталої  $a_r^2$  та його програмна реалізація. У результаті цього отримані числові значення параметрів краплі в процесі її росту, а також у момент досягнення нею максимального тиску.*

**ВСТУП**

З метою покращання технології виробництва впроваджуються неперервні технологічні процеси, що функціонують при високих тисках, строго визначених температурах, концентраціях і т.д. Забезпечення таких умов у промислових масштабах потребує вдосконалення вимірювальної техніки і автоматичного регулювання. Використання капілярних методів [1] є основою для розроблення приладів вимірювання, контролю і діагностики якісного та кількісного складу речовин.

У праці [2] розглянуто метод визначення динамічних характеристик міжфазного натягу за зміною тиску у краплі, що утворюється на торці ножового капіляра. З допомогою даного методу можна створити універсальну автоматизовану систему контролю навколишнього середовища, що здійснює програмну обробку результатів вимірювання в реальному часі.

Математичною моделлю рідини, що підлягає аналізу, є циклічний процес утворення краплі з даною рідиною на торці ножового капіляра, при якому відбувається оновлення поверхні розділу фаз з подальшою зміною поверхні утвореної краплі за рахунок внутрішньої адсорбції. При дослідженні навколишнього середовища спеціально підібрана рідина поміщається у газове середовище, де поверхня краплі змінюється під впливом зовнішньої адсорбції. Математичному моделюванню в цьому випадку підлягає процес зміни міжфазного натягу залежно від вимірних параметрів рідинного меніска.

Для розв'язання сформульованих вище задач необхідно розробити алгоритм моделювання квазістатичного росту краплі з фіксованим радіусом основи та його програмну реалізацію, а також подати результати розрахунків у зручному для користувача вигляді та з можливістю використання у програмних продуктах автоматизованих систем.

**ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ**

Математичне моделювання процесу росту краплі при дослідженні капілярних поверхонь дозволяє встановити залежність можливих станів краплі від її поверхневих властивостей, а також визначити геометричні параметри краплі.

У даній роботі розглядаються меніски, що мають форму лежачої краплі. Це меніски, вільна поверхня яких спрямована в бік, протилежний напрямку дії поля масових сил. Прикладом лежачої краплі може бути крапля або газовий пухирець, що утворюється із вертикально розміщеного циліндра, вихідний отвір якого спрямований вгору, якщо різниця питомих ваг краплеутворювального і зовнішнього середовища більше нуля; і спрямований вниз, якщо ця різниця менша нуля. З допомогою математичних термінів лежачу краплю можна охарактеризувати як гладку випуклу вісесиметричну поверхню, ортогональну до осі обертання в точці її перетину з віссю (т.О), середня кривизна якої спадає пропорційно відстані від проекції розглядуваної точки на вісь симетрії до точки перетину.

Використовуючи термінологію теорії подібності з [3], будемо розглядати меніск у безрозмірному вигляді, тобто всі параметри меніска зведемо до одного з них, який візьмемо за одиницю масштабу. Найбільш зручно з точки зору простоти фізичної інтерпретації процесу утворення краплі як такий параметр розглядати радіус основи краплі  $r$ . Приведена до безрозмірного вигляду капілярна поверхня в повному обсязі характеризується відношенням параметра  $a^2$  до будь-якого геометричного параметра у певному степені і кутом  $\varphi$ .

Тому при заданому відношенні  $a_r^2 = \frac{a^2}{r^2}$  (1) різним значенням будуть відповідати певні послідовні значення станів меніска лежачої краплі. Метою математичного моделювання процесу утворення краплі є знаходження параметрів краплі, які залежать від кута  $\varphi$ , для різних значень  $a_r^2$ :

$$z_r = z/r, L_r = L/r, K_r = K \cdot r, S_r = S/r^2, V_r = V/r^3, P_r = P/\Delta\gamma \cdot r, \quad (2)$$

де  $\varphi$  – кут між нормаллю до поверхні у даній точці і віссю капілярної поверхні;  $L$  – довжина дуги профілю краплі від омболічної точки;  $a$  – капілярна стала ( $a^2 = \gamma/\Delta\rho g$ , де  $\gamma$  – міжфазний натяг;  $\Delta\rho$  – різниця густин контактуючих фаз;  $g$  – гравітаційна стала);  $K$  – гаусівська кривизна капілярної поверхні в омболічній точці;  $x, z$  – декартові координати даної точки;  $V$  – об'єм, обмежений капілярною поверхнею;  $S$  – площа капілярної поверхні. Вісесиметричні капілярні поверхні описуються системою диференціальних рівнянь[4]:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dL} = K_0 - \frac{\sin\varphi}{x} + \frac{z}{a^2}, \\ \frac{dx}{dL} = \cos\varphi, \\ \frac{dz}{dL} = \sin\varphi, \\ \frac{dV}{dL} = \pi \cdot x^2 \cdot \sin\varphi, \\ \frac{dS}{dL} = 2\pi \cdot x. \end{cases} \quad (3)$$

Якщо початок системи координат помістити у вершину краплі, то початкові умови для системи (3) мають вигляд

$$\varphi_{/L=0} = x_{/L=0} = z_{/L=0} = S_{/L=0} = V_{/L=0} = 0. \quad (4)$$

При інтегруванні системи (3) виникає невизначеність виразу  $\frac{\sin \varphi}{x}$ . Тому для розв'язання системи (3), крім початкових умов (4), потрібна ще додаткова умова

$$\frac{d\varphi}{dL} = \frac{\sin \varphi}{x} = \frac{1}{R_0} = \frac{K_0}{2}, \quad (5),$$

де  $R_0$  – радіус кривизни капілярної поверхні в точці О. У результаті розв'язання (3)-(4)-(5) отримаємо розмірні значення геометричних параметрів меніска. Зведення цих параметрів до безрозмірного вигляду здійснюється шляхом ділення на величину радіуса капіляра  $r$  у відповідному степені.

#### РЕЗУЛЬТАТИ

Інтегрування системи (3) здійснювалося за допомогою пакета прикладних програм MATLAB7. Для розв'язання задачі (3)-(4)-(5) використовувались солвери ode45, ode23, ode113, причому найвища точність обчислень  $10^{-6}$  отримувалася за допомогою солвера ode45. Крім того, програма здійснювала пошук максимальних значень  $P_{\max}$ ,  $Z_{\max}$ ,  $V_{\max}$ . У таблиці 1 наведені геометричні параметри меніска лежачої краплі в момент максимального тиску для значень  $a_r^2$  від 0,1 до 1000, що отримані програмним способом. Оскільки моделюванню підлягав процес росту краплі шляхом збільшення її об'єму, то стан краплі після досягнення  $V=V_{\max}$  не розглядався. Теоретично крапля може досягнути  $V=V_{\max}$  при ідеальних умовах її утворення, але при подальшому збільшенні об'єму крапля переходить в нестійке положення і руйнується. При утворенні газового пухирця із отвору, спрямованого вертикально вниз, об'єм пухирця буде зростати до досягнення  $P=P_{\max}$ , після чого його об'єм стрибкоподібно зростає до стану, при якому внутрішній тиск зрівноважується зовнішнім, а якщо він з'єднаний з камерою великого об'єму, то пухирець розривається.

Таблиця 1 - Параметри меніска в момент максимального тиску

$a_r^2$	$\varphi$ (град.)	$z_r$	$K_r$	$L_r$	$S_r$	$V_r$	$P_{\max}$
0,0100	179,63	0,20655	0,00208	2,4024	4,4434	0,6485	0,20657
0,0125	179,54	0,23174	0,00510	2,4499	4,6020	0,7276	0,2318
0,015	179,45	0,25462	0,00976	2,4929	4,7461	0,7995	0,25477
0,020	179,26	0,29543	0,02379	2,569	5,0034	0,9280	0,29591
0,030	178,90	0,36397	0,06573	2,6961	5,4381	1,1460	0,36595
0,040	178,53	0,42130	0,11709	2,8024	5,8065	1,3319	0,42599
0,050	178,17	0,47110	0,17095	2,8952	6,1315	1,4968	0,47956
0,075	177,23	0,57392	0,29828	3,0886	6,8199	1,8505	0,59629
0,100	176,28	0,65657	0,40651	3,2461	7,3908	2,1496	0,69722
0,150	174,31	0,78624	0,57187	3,4954	8,3122	2,6460	0,87202
0,200	172,27	0,88674	0,69087	3,6877	9,0357	3,0508	1,0249
0,250	170,16	0,96861	0,78157	3,8409	9,6177	3,3884	1,1640
0,300	168,00	1,03710	0,85433	3,9648	10,088	3,6714	1,2934
0,400	163,44	1,1450	0,96856	4,1442	10,757	4,0980	1,5324
0,500	158,59	1,2232	1,0607	4,2513	11,124	4,3620	1,7535
0,750	145,13	1,3187	1,2610	4,2749	10,993	4,4200	2,2644

Продовження таблиці 1

1,000	131,65	1,3074	1,4443	4,0793	9,9918	3,9498	2,7517
1,500	114,88	1,2132	1,6749	3,7133	8,4031	3,1546	3,7256
2,500	103,31	1,1205	1,8324	3,4417	7,3480	2,6260	5,7015
5,000	96,150	1,0569	1,9254	3,2774	6,7526	2,3288	10,684
7,500	94,000	1,0372	1,9521	3,2293	6,5840	2,2447	15,678
10,00	92,970	1,0277	1,9647	3,2065	6,5051	2,2053	20,675
15,00	91,960	1,0183	1,9769	3,1842	6,4284	2,1670	30,672
20,00	91,460	1,0137	1,9829	3,1733	6,3910	2,1483	40,671
100,0	90,290	1,0027	1,9967	3,1478	6,3043	2,1050	200,67
1000	90,020	1,0001	1,9997	3,1419	6,2840	2,0950	2000,7

### ВИСНОВКИ

Отримані результати математичного моделювання квазістатичного процесу утворення лежачої краплі дають можливість вибрати оптимальні розміри капілярів залежно від діапазону зміни поверхневого натягу контактуючих фаз. Залежність міжфазного натягу від тиску у краплі постійного об'єму з рівнем надійності 0,99 можна вважати лінійною і на підставі результатів обчислень побудувати досить точну апроксимаційну залежність.

Розроблена програма також може бути використана як обчислювальний модуль в наукових дослідженнях та в автоматизованих системах контролю навколишнього середовища.

### SUMMARY

#### DESIGN OF KVAZISTATIC PROCESS OF FORMATION OF LYING DROP ON BUTT END OF KNIFE CAPILLARY

*I.E. Ovchar*

*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas*

*Modelling of quasistatic process of growth of a lying drop at an end face of a knife capillary for different values of a capillary constant, and its program realisation has been carried out. As a result of this numerical values of parametres of a drop in the course of its growth, and also at the moment of achievement of its maximum pressure are received.*

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Финн Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. – М.: Мир, 1989. – 310 с.
2. Малько О.Г., Дранчук М.М. Методологічний підхід щодо якісного і кількісного контролю середовища та речовин по зміні міжфазного натягу // Методи та прилади контролю якості. – 2002. - №8. - С.30 - 34.
3. Иващенко Ю.М., Еременко В.Н. Основы прецизионного измерения поверхностной энергии расплавов по методу лежащей капли. – Киев: Наукова думка, 1972. – С.234.
4. Русанов А.И., Прохоров В.А. Межфазная тензометрия. – СПб.: Химия, 1994. – 400 с.

*Надійшла до редакції 16 лютого 2009 р.*