

# МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

## Сумський державний університет

Факультет електроніки та інформаційних технологій

Кафедра прикладної математики та моделювання складних систем

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

Ігор КОПЛИК

\_\_\_\_\_ 2024 р.

## КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

### на здобуття освітнього ступеня бакалавр

зі спеціальності 133 Прикладна математика

освітньо-професійної програми Наука про дані та моделювання складних систем

на тему: Пошук закономірностей в поведінці інтернет-користувачів на прикладі

популярних вебсайтів з добовим трафіком більше 100 мільйонів користувачів. А/В

тестування на практиці. Використання результатів для оптимізації прийняття

рішень в розробці.

Здобувача групи ПМ-01 Максима ХАРЛАМА

Кваліфікаційна робота містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

\_\_\_\_\_ Максим ХАРЛАМ

Керівник      доцент, кандидат наук, Аліна ДВОРНІЧЕНКО

Суми – 2024

**СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Факультет	електроніки та інформаційних технологій
Кафедра	прикладної математики та моделювання складних систем
Рівень вищої освіти	перший
Галузь знань	11 «Математика та статистика»
Спеціальність	113 «Прикладна математика»
Освітня програма	освітньо-професійна «Наука про дані та моделювання складних систем»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри ПМтаМСС

Ігор КОПЛИК \_\_\_\_\_

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2024 р.

**ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ****НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ ЗДОБУВАЧЕВІ ВИЩОЇ ОСВІТИ**

Максиму ХАРЛАМУ

1. Тема роботи Пошук закономірностей в поведінці інтернет-користувачів на прикладі популярних вебсайтів з добовим трафіком більше 100 мільйонів користувачів. А/В тестування на практиці. Використання результатів для оптимізації прийняття рішень в розробці.

Керівник роботи доцент, кандидат наук, Аліна ДВОРНИЧЕНКО  
затверджено наказом по факультету ЕлІТ від «05» квітня 2024 р. № 0349-VI

2. Термін подання роботи здобувачем «31» травня 2024 р.

3. Вихідні дані до роботи: Дані експериментів компанії «СРС» з сервісу Optimizely.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, для розроблення): А/В-тестування, бізнес-метрики, тестування гіпотез, Optimizely, експеримент, аналіз результатів.

## 5. Перелік графічного матеріалу:

Робота А/В-тестування, варіації прикладів, експерименту, код реалізації варіацій та інтеграції Optimizely, результати метрик експерименту.

## 6. Консультанти проєкту (роботи) із зазначенням розділів проєкту, що їх стосується

Розділ	Ім'я ПРИЗВИЩЕ та посада консультанта	Підпис, дата	
		Завдання видав	Завдання прийняв
А/В-тестування	Аліна ДВОРНІЧЕНКО, доцент		
Математика А/В-тестів	Аліна ДВОРНІЧЕНКО, доцент		
А/В-тестування на практиці	Аліна ДВОРНІЧЕНКО, доцент		

7. Дата видачі завдання « 09 » квітня 2024 р.

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Вид робіт	Термін виконання	Примітка
1	Аналіз інформації про А/В-тестування, проблем, які воно вирішує та де його можна застосовувати	03.04.2024 р. – 10.04.2024 р.	
2	Дослідження математики, що лежить в основі А/В-тестування та Optimizely	11.04.2024 р. – 15.04.2024 р.	
3	Огляд роботи А/В-тестування на практиці з використанням сервісу Optimizely	16.04.2024 р. – 30.04.2024 р.	

Здобувач вищої освіти

Максим ХАРЛАМ

Керівник роботи

Аліна ДВОРНІЧЕНКО

## Анотація

**Кваліфікаційна робота:** 66 сторінок, 40 рисунків, 22 джерела, 30 формул, 2 таблиці.

**Мета кваліфікаційної роботи:** Використання А/В-тестування для визначення впливу змін на користувацький досвід.

**Об'єкт дослідження:** Вебсайт з великим добовим трафіком.

**Предмет дослідження:** Елементи вебсайту, які можуть бути зміненими для підвищення конверсії.

**Методи дослідження:** Аналіз літератури, розбір методів математичної статистики та функціоналу сервісу Optimizely, апробація результатів тестування та їх подальший аналіз.

Для проведення тестування було розглянуто, що таке А/В-тестування, як його застосовувати та які елементи воно охоплює. Було визначено метрики, за допомогою яких оцінюється успішність експерименту. Для розуміння оцінки значущості результатів були вивчені методи тестування гіпотез. Щоб зрозуміти середовище роботи, було проаналізовано його інтерфейс та математику, яка лежить в його основі. Після цього були реалізовані варіації тестування та налаштовано сам експеримент.

Використовуючи знання про значущість результатів та метрик, було проведено аналіз результатів тестування з метою визначення успішності варіацій відносно одна одної.

**Ключові слова:** А/В-ТЕСТУВАННЯ, КОНВЕРСІЯ, МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА, СТАТИСТИЧНА ЗНАЧУЩОСТЬ, ДОВІРЧИЙ ІНТЕРВАЛ, ВАРІАЦІЯ.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ 1. А/В-ТЕСТУВАННЯ .....	7
1.1. Що таке А/В-тестування.....	7
1.2. Чому компанії повинні його використовувати .....	8
1.3. Етапи А/В-тестування.....	9
1.4. Сегментація аудиторії.....	10
1.5. Метрики.....	11
1.6. Функціонал експерименту.....	13
РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИКА А/В-ТЕСТІВ .....	17
2.1. Що таке статистична значущість.....	17
2.2. Перевірка гіпотез та рівень значущості в Optimizely .....	27
РОЗДІЛ 3. А/В-ТЕСТУВАННЯ НА ПРАКТИЦІ .....	31
3.1. Гіпотеза тестування.....	31
3.2. Термінологія .....	31
3.3. Використані метрики .....	32
3.4. Варіації дизайну.....	36
3.5. Аналіз результатів .....	47
ВИСНОВОК.....	56
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	57
ДОДАТОК А. Таблиця значень t для Т-тесту .....	60
ДОДАТОК Б. Таблиця значень F-статистики для рівня значущості 0.05 .....	61
ДОДАТОК В. Інтерпретація кореляції Пірсона.....	62
ДОДАТОК Г. Таблиця значень $\chi^2$ .....	63
ДОДАТОК Д. Таблиця біноміального розподілу .....	64
ДОДАТОК Е. Таблиця критичних значень для U .....	65
ДОДАТОК Ж. Таблиця критичних значень для W .....	66

## ВСТУП

У сфері цифрового маркетингу А/В-тестування посіло важливе місце, оскільки воно допомагає зрозуміти поведінку та вподобання, як відвідувачів, так і клієнтів і разом із цим поліпшити користувацький досвід. Також А/В-тестування дає можливість компаніям зменшити витрати на рекламні кампанії, оскільки воно дає можливість збільшити коефіцієнт конверсії з наявною клієнтською базою, а не збільшувати її з надією, що це збільшить конверсію. Це досягається через тестування різних варіацій продукту, хай то буде їхній дизайн чи функціонал, на реальних користувачах.

Сам експеримент представляє дуже просту ідею взяти вже наявний елемент, зробити його варіацію та протестувати в наявному середовищі, яка варіація краще, порівнюючи їх між собою та використовуючи будь-які наявні або, навіть, вигадані метрики.

Простота цього методу також означає, що потреби припиняти процес тестування немає. Постійно можна тестувати якісь непомітні елементи, щоб покращити користувацький досвід.

Також А/В-тестування дає розробникам можливість приймати рішення щодо зміни дизайну не на припущеннях про можливу реакцію користувачів, а на реакції цих же самих користувачів зі статистичною точністю, щоби підтвердити, що результати є значущими, оскільки в індустрії було немало прикладів того, коли компанія вирішила, що макет сайту застарів або до функціоналу сайту потрібно додати нові елементи, які нікому не були потрібні й це в результаті результувало у втраті вже наявної платоспроможної клієнтської бази.

Тому в процесі практики буде розглянуто популярні метрики, які бізнес використовує для оцінювання успішності роботи продукту, приклади використання А/В-тестування в уже існуючих та успішних проєктах та функціонал найпопулярнішого інструменту для А/В-тестування Optimizely та його можливості. Це дасть можливість розширити розуміння роботи цифрового маркетингу та бізнесу сьогодні.

## РОЗДІЛ 1. А/В-ТЕСТУВАННЯ

### 1.1. Що таке А/В-тестування

А/В-тестування, яке також називають спліт-тестуванням або бакет-тестуванням, – це експеримент, ідея якого полягає у порівнянні двох і більше версій продукту, щоб визначити найкращу варіацію. В А/В-тестуванні «А» означає оригінальну змінну тестування, тоді як «В» означає «варіацію» або нову версію оригінальної змінної тестування.

Даний експеримент дає змогу приймати рішення базуючись на реальних даних, а не спекуляціях про можливу реакцію користувачів на зміни. Для порівняння варіацій з метою визначення вподобань користувачів, цей експеримент використовує метрики, такі як коефіцієнт конверсії, коефіцієнт натискань, показник відмов тощо. Ці варіації можуть бути як простими змінами, наприклад колір кнопки чи текст заголовка, так і повним редизайном вебсторінки чи вебсайту «див. рис. 1.1». Таким чином об'єктом експерименту можуть бути нові макети продукту, кнопки заклику до дії, дизайн продуктів, кольори різних елементів тощо.

Як було сказано вище, користувачам надається дві або більше варіацій, і кожна їхня взаємодія з бажаними об'єктами реєструється та зберігається в базі даних. Потім всі їхні взаємодії аналізуються використовуючи статистичні інструменти. Як результат отримується ефект цих варіацій по відношенню до оригіналу незалежно від того, чи є це позитивний, негативний чи нейтральний ефект «див. рис. 1.1».

Саме А/В-тестування є складовою частиною процесу оптимізації коефіцієнта конверсії (CRO) за використання якого можна зібрати якісну та кількісну інформацію про користувачів. Такі дані можна використовувати для аналізу поведінки користувачів, рівня їхньої взаємодії з продуктом, болючих точок та рівня задоволеності функціоналом продукту. Не використовуючи А/В-тестування бізнес, безсумнівно, втрачає багато потенційних клієнтів.[1][2][3]

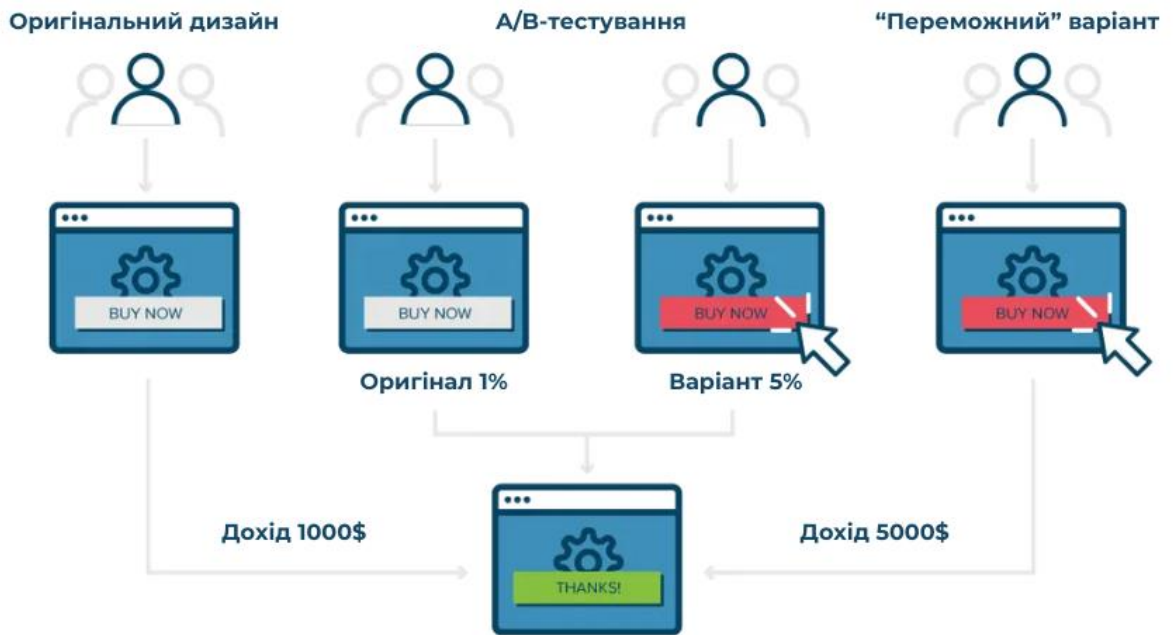


Рис. 1.1 – Схема роботи A/B-тестування

## 1.2. Чому компанії повинні його використовувати

A/B-тестування дає командам та компаніям змогу вносити поступові та обережні зміни до продукту при цьому збираючи дані про реакцію користувачів на ці зміни. Це, зі свого боку, дозволяє протестувати гіпотези про вплив різних варіацій на користувацький досвід, а не робити важливі рішення покладаючись на думки про «найкраще» рішення.

Цей експеримент може не тільки дати відповіді на конкретні запитання та усунути розбіжності серед команди, а й дати достатньо інформації для поліпшення користувацького досвіду і тим самим покращити результати важливих для бізнесу метрик, таких як коефіцієнт конверсії, середній дохід на одного користувача, середню тривалість сесії тощо.

Уявімо, що компанія вирішила підвищити загальну якість та кількість потенційних клієнтів. Задля досягнення цієї мети, команда може провести тестування можливих болючих точок користувача, або елементів, якими користуються найчастіше і які ще можна покращити. Шляхом поетапного тестування окремих змін команда оцінює результати тестування та їх ефект на користувачів. Після цього



команда може поєднати всі успішні зміни в одну варіацію та порівняти її з оригіналом, щоб побачити наскільки пророблені зміни покращили метрики успішності продукту.

Цей метод також має змогу допомогти маркетологам. Наприклад, команда маркетологів вирішила розпочати рекламну кампанію через email-розсилку і хоче зробити її як можна ефективнішою. Для досягнення цієї мети вони можуть модифікувати вміст повідомлень та протестувати наскільки більше натискань зібрала кожна з варіацій повідомлення і також можна дослідити, яка частина з цих людей виконує бажані дії, та конвертується зі звичайних відвідувачів у потенційних клієнтів.

[1][2][3]

### 1.3. Етапи А/В-тестування

- **Збирання даних**

Використання аналітичних інструментів по типу Google Analytics для визначення потенційних сфер та елементів, що потребують оптимізації. Слід починати з тих розділів продукту, через які проходить найбільше трафіку, щоб ефективніше збирати дані. Якщо ціль тестування – це збільшення коефіцієнту конверсії, то є сенс зосередитися на розділах продукту з найбільшим коефіцієнтом відмов або тих, що потребують оптимізації. Крім того, можна проаналізувати ресурси, такі як теплові карти уваги, відгуки з соціальних мереж та опитування, щоб знайти додаткові шляхи для покращення користувацького досвіду.

- **Поставити цілі**

Ціллю для тестування може бути різноманітні речі починаючи рекламним текстом та електронними листами та закінчуючи СТА кнопки для завершення покупки продукту.

- **Створити гіпотези тестування**

Визначившись з цілями експерименту можна почати генерацію ідей для А/В-тестів та формулювання гіпотез тестування, які пояснюють, чому варіація є кращою за оригінал. Після цього ідеї потрібно відсортувати за пріоритетом на основі передбачуваного результату та складності реалізації.

- **Додати варіації**

Використовуючи платформи для А/В-тестування як Optimizely, додати створені варіації оригінального елемента до параметрів тестування. Більшість подібних інструментів мають візуальний редактор, що робить процес налаштування простим.

- **Розпочати тестування**

На цьому етапі є можливість обрати аудиторію для тестування та розподілити її між варіаціями по відсотках, або ж залишити адаптивний режим, який сам вирішує коли та кому дати яку варіацію. Також є можливість обрати рівень значущості експерименту (детальніше про це у розділі 2.2). Після цього розпочинаємо експеримент під час якого кожна дія відвідувача/користувача буде відстежуватись, підраховуватись та порівнюватись зі стандартним значенням метрики (значенням оригіналу).

- **Почекати на результати тестування**

Час, необхідний для досягнення якісних результатів, коливається залежно від об'єму аудиторії. Якісними результатами можна вважати результати тестування, які мають задовільний рівень значущості, інакше визначитись як саме вплинули зміни на аудиторію і чи вплинули взагалі є неможливим.

- **Проаналізувати результати**

Не менш важливим етапом за підготовку до А/В-тестування є аналіз триманих результатів. Обрана платформа для проведення експерименту зазвичай буде мати коефіцієнт відносної успішності варіації над оригіналом по всім метрикам, а також значущість результатів заданої метрики. Використовуючи наданий функціонал та метрики завдання команди тестування лише у правильній інтерпретації чисел.[1][2]

## **1.4. Сегментація аудиторії**

Компанії дуже часто використовується сегментація аудиторії, оскільки деякі зміни можуть бути призначеними для різної аудиторії, наприклад немає сенсу включати аудиторію з застосунків та мобільних телефонів для тестування нового макету вебсторінки для настільної версії вебсайту, також використання змін на всьому трафіку може призвести до ілюзорних результатів та упереджених дій, або,

якщо коротко, статистичної незначущості результатів. Тому є сенс тестувати зміни на знайомій аудиторії. Іноді компанії навпаки проводять тестування на специфічній аудиторії з метою краще її зрозуміти.

Водночас однією з найпоширеніших помилок під час тестування є занадто мала тестова аудиторія. Результатом цієї помилки є статистична незначущість результатів або збільшення часу для визначення впливу змін. Тому перед початком тестування слід оцінити розміри сегментів, щоб отримати значущі результати.

Однією з найпопулярніших причин для сегментації є відокремлення нових відвідувачів від постійних (користувалися продуктом більше 1-го разу), задля тестування змін тільки на них, як, наприклад сторінка реєстрації чи авторизації.[1][3]

## 1.5. Метрики

- **Коефіцієнт натискань (Click-through rate або CTR)** – це відношення кількості натисків на певний елемент реклами (посилання на продукт чи відео) до кількості показів цього елемента. Зазвичай використовується для оцінювання ефективності рекламних кампаній, а також результативності розсилок «див. формулу 1.1».

$$CTR = \frac{\text{кількість натискань по елементу}}{\text{кількість показів елемента}} \quad (1.1)$$

- **Коефіцієнт конверсії (Conversion Rate або CR)** – це відношення кількості користувачів, які виконують бажані дії, наприклад: здійснюють покупки, заповнюють форми або підписуються на розсилки; до загальної кількості відвідувачів продукту. Коефіцієнт конверсії допомагає визначити, наскільки успішно відбувається конверсія відвідувачів у клієнтів «див. формулу 1.2».

$$CR = \frac{\text{кількість виконаних бажаних дій}}{\text{загальна кількість трафіку сайту}} \quad (1.2)$$

- **Коефіцієнт відмов (Bounce Rate або BR)** – це коефіцієнт, який вказує на частку відвідувачів, які покинули вебсайт після перегляду лише однієї вебсторінки без взаємодії з ним або ж відразу закрили вебсторінку. Цей коефіцієнт також можна назвати коефіцієнтом «липкості» вебсайту. Вебсайт вважається ефективним,

якщо він здатний утримати відвідувачів на вебсайті та заохочувати їх на подальше дослідження вмісту «див. формулу 1.3».

$$BR = \frac{\text{кількість людей, що не пішли далі першої відкритої вебсторінки}}{\text{кількість людей, що зайшла на вебсайт через цю вебсторінку}} \quad (1.3)$$

- **Коефіцієнт виходів (Exit Rate або ER)** – це коефіцієнт, який вказує на частку користувачів, які закривають продукт на специфічній вебсторінці «див. формулу 1.4».

$$ER = \frac{\text{кількість відвідувачів, що закрила вебсайт на цій вебсторінці}}{\text{кількість людей, що переглянула цю вебсторінку}} \quad (1.4)$$

- **Середній дохід на одного користувача (Average Revenue Per User або ARPU)** – це коефіцієнт, який використовується у компаніях, чия бізнес модель побудована на основі підписки або вони є онлайн-платформами, які сфокусовані на продажах. Цей коефіцієнт вимірює середню суму доходу, що припадає на одного користувача за певний період часу, зазвичай за місяць або рік. Цей коефіцієнт допомагає бізнесу оцінити ефективність цінових стратегій, відстежити зростання доходів і зрозуміти, який середній дохід здатен принести бізнесу один користувач «див. формулу 1.5».

$$ARPU = \frac{\text{дохід за певний проміжок часу}}{\text{кількість користувачів за цей час}} \quad (1.5)$$

- **Середня тривалість сесії (Average session duration або ASD)** – це коефіцієнт, що вказує на середню кількість часу, який користувач проводить на вебсайті або застосунку протягом однієї сесії. Сесію ж можна описати як період часу, протягом якого користувач взаємодіє з продуктом. Відлік часу для сесії починається з моменту відкриття користувачем вебсайту та закінчується або моментом, коли користувач закриває продукт, або через неактивність протягом певного часу. Середня тривалість сесії розраховується шляхом підсумовування тривалості всіх сесій за певний період (наприклад день, тиждень чи місяць) і ділиться на загальну кількість сесій за цей період. Цей коефіцієнт дає уявлення про ефективність вебсайту чи застосунку у питаннях залучення та утримання уваги користувачів.
- **Середня вартість замовлення (Average order value або ARV)** – це метрика, яка показує середню суму коштів, яку клієнти витрачають за транзакцію. Для

розрахунку AOV достатньо поділити загальний дохід на кількість замовлень «див. формулу 1.6».

$$AOV = \frac{\text{загальний дохід}}{\text{кількість замовлень}} \quad (1.6)$$

## 1.6. Функціонал експерименту

- **Вирішення больових точок відвідувача**

Кожен відвідувач, коли він заходить на вебсайт чи в застосунок має конкретну мету, яку він хоче досягти. Це може бути зацікавленість у детальнішій інформації про якийсь продукт, подію, послугу чи бажання придбати певний товар. Незалежно від того, яка у цього відвідувача мета, він може зіткнутися з різними проблемами під час її досягнення. Це може бути незрозумілий текст, який не дає необхідну інформацію, а може навпаки створити більше питань, або складність знайти кнопку заклику до дії (CTA button), таку як «Придбати зараз», «Додати до кошика» та інші.

Невдача у досягненні своєї мети призводить до негативного користувацького досвіду, який дає ризик втрати потенційного клієнта і впливає на коефіцієнт конверсії.

Розглянемо приклад A/B-тестування вебсайту Exproze.io. Вони вирішили протестувати фон на своїй головній сторінці використовуючи алгоритм відстежування очей і подали результат у вигляді теплової карти зон уваги користувача.

Проблема цього сайту, як можна побачити на оригіналі на рисунку 1.2 версії А, у низькому контрасті тексту та фону, тому розробники вирішили зробити варіації дизайну та провели тестування сегментувавши своїх відвідувачів порівну та дослідили на що вони більше звертають увагу за методом описаним вище. Після цього вони вирішили зробити новий більш контрастний фон з 2 варіаціями обкладинки відео як показано на рисунку 1.3. Результат дослідження показав 40% приріст уваги до відео у версії В відносно версії А, а також 25% збільшення натискань на CTA кнопку.[4]

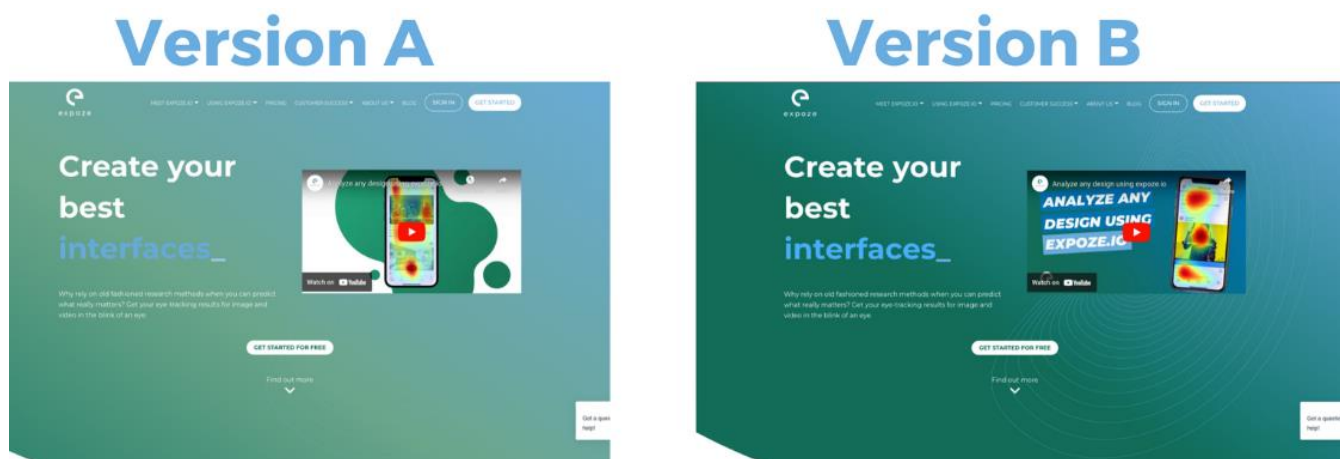


Рис. 1.2 – Варіації дизайну сайту Exproze.io

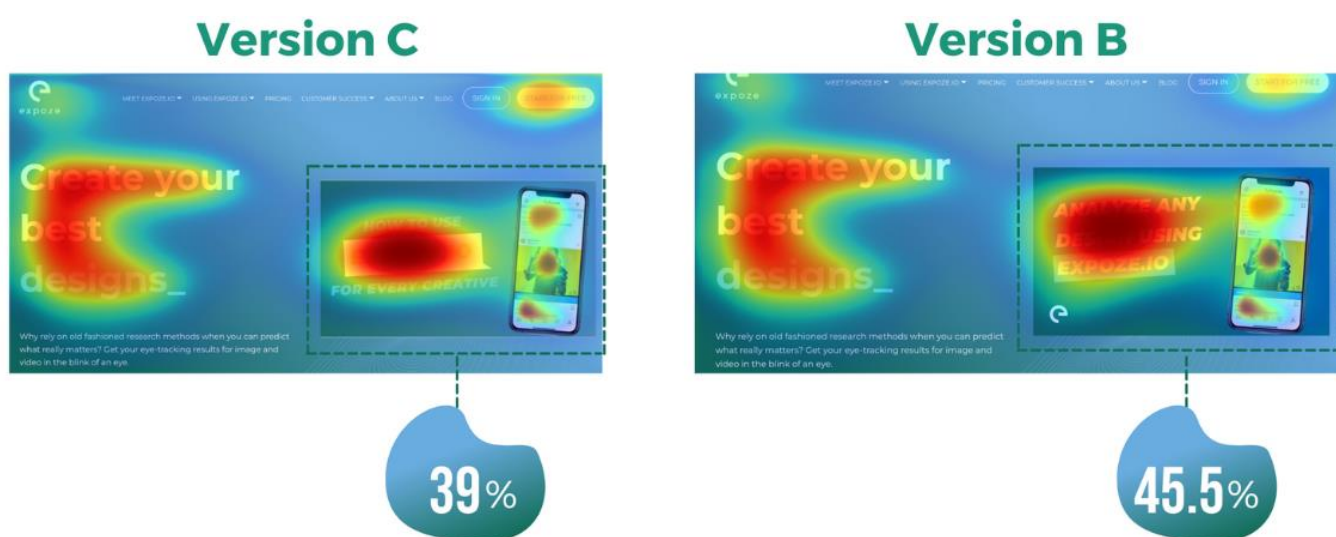


Рис. 1.3 – Зони уваги користувачів

- **Отримання кращої рентабельності інвестицій (ROI) з наявного трафіку**

Багато розробників розуміють, що привернення якісного трафіку є важливим для бізнесу, а А/В-тестування дає можливість використовувати наявний трафік з метою збільшити конверсію без необхідності витратити додаткові кошти на рекламні кампанії задля привернення додаткового трафіку. Таким чином А/В-тестування дозволяє отримати високу рентабельність інвестицій (ROI) через невеликі протестовані зміни, які відвідувачі вважають гарними й згодом можуть конвертуватися у клієнтів.

Розглянемо приклад на сайті [thrivethemes.com](http://thrivethemes.com). Проблема дизайну цього сайту була у тому, що він використовував банер, що акцентував увагу на особливостях

продукту, але не показував реакцію клієнтів на нього. Тому команда вирішила провести цей експеримент, щоб подивитися наскільки позитивно додавання відгуків на головну сторінку вплине на коефіцієнт конверсії «див. рис. 1.4».

Розділивши трафік порівну між 2 варіаціями вони отримали приріст до коефіцієнту конверсії на 22% «див. табл. 1.1».[4][5]

Таблиця 1.1

	Оригінал	Варіація	Різниця
Трафік	10 398	9 663	
Продажі	161	182	+13%
Коефіцієнт конверсії	1.6%	1.9%	+22%

The image displays two side-by-side screenshots of the Thrive Themes website homepage, labeled 'VARIANT A' and 'VARIANT B'. Both variants feature a green and white color scheme with a central video player and a 'Get Thrive Suite Now' button. Variant B includes a testimonial section at the bottom with two quotes: one from Jeff Sauer, Founder of Jeffalytics, and one from Philip Shaw, Cleverclicks. A large red arrow points from the testimonial section in Variant B towards the bottom right corner of the page.

**VARIANT A**

**VARIANT B**

Рис. 1.4 – Варіації дизайну сайту thrivethemes.com

- **Зменшення відсотку відмов**

Зменшення коефіцієнта відмов напряму впливає на кількість відвідувачів продукту і тим самим на кількість потенційних клієнтів. Причинами високого показника може бути надмірна кількість варіантів вибору, складна навігація, використання технічного жаргону та інші.

Через різноманітність в індустрії універсального розв'язання проблеми немає, однак А/В-тестування дає змогу перевірити різні елементи продукту, щоб зробити продукт більш ефективним, а також виявити болючі точки користувача, які також можна згодом виправити, щоб покращити загальний користувацький досвід, збільшити їхню активність у продукті та, ймовірно, зменшити відсоток відмов.

- **Створення модифікацій з низьким рівнем ризику**

Як уже згадувалося, цей метод дозволяє вносити поступові невеликі зміни до продукту, щоб оцінити ефект кожної зміни та виправити погані рішення, якщо такі є. Також це може дати користувачам адаптуватися до змін поступово, бо якщо це сильні зміни, як перероблення макета сторінки, навігаційного меню чи інтерфейсу, то користувачі можуть розгубитися та покинути продукт, що для бізнесу означає втрату платоспроможної аудиторії.

Внесення змін на сайті без попереднього тестування може приносити користь як у короткостроковій, так і у довгостроковій перспективі. Але тестування перед внесенням змін може зробити результати більш очевидними та визначеними.

- **Досягнення статистично значущих покращень**

А/В-тестування дає змогу об'єктивно оцінити ефективність змін виключаючи припущення та особисті прогнози. Такі точні дані дають змогу швидко виявити, яка з версій є більш успішною, аналізуючи попередньо визначені метрики.



## РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИКА А/В-ТЕСТІВ

### 2.1. Що таке статистична значущість

Статистична значущість – це важлива концепція у математичній статистиці, яка допомагає аналітикам визначитись з тим, наскільки результати є важливими або чи могли вони виникнути випадково. Ця оцінка базується на р-значенні.

р-значення – це значення ймовірності, що отримуваний результат є тим про який говорить нульова гіпотеза, вважаючи що вона є правдивою. Фактично, це є ймовірністю, що нульова гіпотеза є правдивою.

Сама нульова гіпотеза тестується якимось зі статистичних тестів. Тести підбираються по декількох параметрах: статистичному припущенню, типу змінних та типу тесту (параметричний та непараметричний).

Розглянемо ці параметри детальніше:

- Найпоширеніші статистичні припущення, які використовуються при перевірці гіпотез:
  - незалежність даних, тобто змінні не залежать одне від одного;
  - однорідність дисперсії, тобто дисперсія між усіма вибірками є відносно схожою;
  - Дані розподілені по нормальному закону, тобто якщо побудувати гістограму або KDE-графік, то обидва будуть нагадувати функцію Гауса.
- Типи змінних:
  - Кількісні змінні, які також поділяються на підтипи:
    - Неперервні, тобто дійсні числа, які не можна підрахувати (наприклад 0.5 грам);
    - Дискретні, які є дійсними числами (наприклад 4 котів).
  - Категоричні змінні:
    - Порядкові – це дані які можуть бути відсортовані (наприклад рейтинг);
    - Номінальні – це назви груп елементів (наприклад назви брендів);
    - Бінарні – це дані, які можуть мати тільки 2 значення так/ні або 1/0.

Тепер розглянемо тести. Існують параметричні тести та тести без параметрів. До перших відносяться: регресії (проста регресія, декілька регресій та логічна регресія), порівняльні тести (парний Т-тест, незалежний Т-тест, ANOVA та MANOVA) і кореляція Пірсона. До других відносяться: тест на незалежність за критерієм  $\chi^2$ , тест знаків, тест Крускала-Уолліса, ANOSIM, U-критерій Манна-Уїтні (Тест Вілкоксона на суму рангів) та знаковий ранговий тест Вілкоксона. Детальніше про це в таблиці 2.1 та рисунку 2.2

Таблиця 2.1

Назва тесту	Застосування
	Регресійні тести шукають причинно-наслідкові зв'язки та можуть бути використані для оцінки впливу однієї чи декількох неперервних змінних на іншу змінну.
Проста лінійна регресія	<p>Розглянемо функцію 2.1:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>y</math> – це вихідна змінна, яка є залежною від <math>X</math>.</li> <li><math>\beta_0</math> – значення <math>y</math>, коли <math>x</math> дорівнює 0 «див. формулу 2.2».</li> <li><math>\beta_1</math> – це коефіцієнт регресії «див. формулу 2.3».</li> </ul> $y = \beta_0 + \beta_1 X \quad (2.1)$ $\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{X} \quad (2.2)$ $\beta_1 = \frac{\sum[(X - \bar{X})(y - \bar{y})]}{\sum[(X - \bar{X})^2]} \quad (2.3)$ <p>Символ «<math>\bar{\quad}</math>» над групою означає, що береться її середнє значення.[9]</p>
Поліноміальна регресія	<p>Схожа ідеєю з простою лінійною регресією, але додається сума для декількох груп, тобто отримуємо формули 2.4 та 2.5.[10]</p> $\beta_0 = \bar{y} - (\beta_1 \bar{x}_1 + \beta_2 \bar{x}_2 + \dots + \beta_n \bar{x}_n) \quad (2.4)$ $\beta_n = \frac{\sum[(X_n - \bar{x}_n)(y - \bar{y})]}{\sum[(X_n - \bar{x}_n)^2]} \quad (2.5)$
Логістична регресія	<p>Коефіцієнти <math>\beta_0</math> та <math>\beta_1</math> розраховуються по формулам 2.4 та 2.5 і потім підставляються у формулу логістичної функції «див. формулу 2.6».</p> <p>Після цього результати класифікуються по формулі 2.7.[11]</p> $p = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_n X_n)}} \quad (2.6)$

$$y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } p < 0.5 \\ 1, & \text{якщо } p \geq 0.5 \end{cases} \quad (2.7)$$

Тести порівняння шукають відмінності між середніми значеннями вибірок. Вони можуть бути використані для тесту впливу категоричних даних на середнє значення якихось других характеристик.

Парний Т-тест

Маємо 2 гіпотези:

- Нульова гіпотеза: між середніми вибірок немає істотної різниці,  
 $H_0: \bar{X}_1 = \bar{X}_2$
- Альтернативна гіпотеза може бути трьох видів, але загальна ідея у тому, що існує статистично значуща різниця між середніми вибірок. Математичний запис буде мати вигляд
  - $H_1(\text{two} - \text{tailed}): \bar{X}_1 \neq \bar{X}_2$
  - $H_1(\text{left} - \text{tailed}): \bar{X}_1 < \bar{X}_2$
  - $H_1(\text{right} - \text{tailed}): \bar{X}_1 > \bar{X}_2$

$$t = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_{\text{різ}}}{s_{\text{різ}}} \quad (2.8)$$

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n - 1}} \quad (2.9)$$

Тепер перейдемо до формули розрахунку t-статистики (див. формулу 2.8) де:

- $n$  – це розмір вибірки.
- $\bar{X}_{\text{різ}}$  – середнє значення різниць значень двох вибірок.
- $s_{\text{різ}}$  – виправлене середньоквадратичне відхилення, яке розраховується за формулою 2.9

Тепер порівнюється отримане значення зі значенням  $t_{\text{крит}}$ , яке можна знайти у Додатку А. Якщо  $t_{\text{крит}} > t$ , то можна відкинути нульову гіпотезу і можемо сказати, що результат є статистично значущим, оскільки р-значення є меншим за критичне для заданого рівня значущості.[12][13]

<p>Незалежний Т-тест</p>	<p>Виконується так же само як і парний, різниця буде тільки в даних. Якщо пояснювати різницю на прикладі, то візьмемо вчителя, який викладає статистику 10 студентам і він вирішив спробувати дві методології.</p> <p>При парному Т-тесту він використає спочатку одну методику та оцінить її результати на тесті, потім викладе той же самий матеріал тим же студентам, але по другій методиці й знову оцінить успіх методики тестом.</p> <p>У випадку незалежного Т-тесту він візьме 2 групи по 10 студентів і перевірить методики паралельно.</p> <p>Якщо в А/В-тестуванні буде проводитись Т-тест для визначення значущості результату, то це ймовірно буде саме незалежний Т-тест.[12][13]</p>
<p>ANOVA-тест</p>	<p>ANOVA-тест схожий на Т-тест, але він здатен порівнювати понад два середніх на відміну від Т-тесту. Сам тест базується на порівнянні дисперсії. Якщо міжгрупова дисперсія висока, а внутрішньогрупова низька, це свідчить про те, що середні значення вибірок суттєво відрізняються.</p> $F = \frac{MSB}{MSW} \quad (2.10)$ <p>Завдання тесту полягає в знаходженні F-значення за формулою 2.10.</p> $MSB = \frac{SSB}{dfB} \quad (2.11)$ <p>MSB – це сума квадратів різниці середніх кожної вибірки з загальним середнім поділена на ступінь вільності між вибірками «див. формулу 2.11».</p> $MSW = \frac{SSW}{dfW} \quad (2.12)$ <p>MSW – це сума квадратів різниці між точками груп і їх середніми значеннями поділена на ступінь вільності груп «див. формулу 2.12».</p>

	$SSW = \sum (x_{ij} - \bar{X}_i)^2 \quad (2.13)$ <p>SSW – це сума квадратів різниці між кожною одиницею даних вибірок і їх середніми значеннями «див. формулу 2.13».</p> $SSB = \sum (\bar{X}_i - \bar{X})^2 \quad (2.14)$ <p>SSB – це сума квадратів різниці середніх кожної вибірки з загальним середнім «див. формулу 2.14».</p> $dfW = N - k \quad (2.15)$ $dfB = k - 1 \quad (2.16)$ <p><math>k</math> – кількість груп; <math>N</math> – кількість даних</p> <p><math>dfW</math> – це ступені вільності груп «див. формулу 2.15».</p> <p><math>dfB</math> – це ступені вільності між групами «див. формулу 2.16».</p> <p>Після розрахунку F-статистики вона порівнюється з його критичним значенням, яке можна знайти у таблиці подібній як у Додатку Б. Якщо значення менше, то нульова гіпотеза відкидається, якщо ж ні, то вона залишається.[14]</p>
MANOVA-тест	<p>Цей тест далі розвиває ANOVA-тест. Для його використання потрібно 2 і більше пояснювальних змінних. Для цього цей тест використовує один з наступних тестів: тест Вілка, тест Лоулі-Хотелінга, тест Піллаї, тест Роя на максимальний корінь.</p> <p>Кожен з цих тестів повертає свій коефіцієнт, який потім використовується в індивідуальній формулі для розрахунку F-статистика. Сенсу розглядати ці тести детально немає, оскільки вони є доволі об'ємними та складними.</p>
<p>Кореляційні тести перевіряють чи пов'язані між собою змінні без необхідності висування гіпотез. Їх можна використовувати для перевірки чи є дві змінні (вибірки) автокорельованими.</p>	
Кореляція Пірсона	$r_{X,Y} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{X}}{s_X} \right) \left( \frac{y_i - \bar{Y}}{s_Y} \right) \quad (2.17)$

	<p><math>s_x</math> та <math>s_y</math> – це виправлені середні квадратичні відхилення, які розраховуються за формулою 2.9</p> <p>Кореляція Пірсона для вибірок розраховується за формулою 2.17. Значення кореляції може набувати значень на проміжку від -1 до 1, де «-1» – ідеальна негативна кореляція, «0» – відсутність кореляції (групи є незалежними) та «1» – ідеальна позитивна кореляція. Детальніше про це у Додатку В. [18]</p>																																												
<p>Непараметричні тести не роблять багато припущень про дані і є корисними тільки коли 1 або кілька припущень порушуються. Висновки таких тестів не будуть мати таку ж вагу як параметричні тести.</p>																																													
<p>Кореляції Спірмена</p>	<p>Цей коефіцієнт кореляції використовується коли вибірки мають категоричний тип даних, а сама кореляція фактично є кореляцією Пірсона, але для ранжованих даних. Цю кореляцію також можна знайти для неперервних даних попередньо проранжувавши їх, наприклад найбільшим значенням дати значення одиниці, а далі давати більший ранг меншим значенням, як продемонстровано на рисунку 2.1.</p> <table border="1" data-bbox="699 1249 1217 1624"> <thead> <tr> <th>Mobility</th> <th>Density Ln</th> <th>MobilityRank</th> <th>DensityRank</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1468.71</td> <td>1.841</td> <td>1</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>1464.35</td> <td>1.572</td> <td>2</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>1457.63</td> <td>2.2</td> <td>3</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1447.89</td> <td>2.047</td> <td>4</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>1442.96</td> <td>1.115</td> <td>5</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>1425.21</td> <td>0.963</td> <td>6</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>1421.38</td> <td>1.006</td> <td>7</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>1414.51</td> <td>0.79</td> <td>8</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>1353.86</td> <td>0.377</td> <td>9</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>1327.54</td> <td>0.119</td> <td>10</td> <td>10</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">Рис. 2.1 – Ранжування значень груп</p>	Mobility	Density Ln	MobilityRank	DensityRank	1468.71	1.841	1	3	1464.35	1.572	2	4	1457.63	2.2	3	1	1447.89	2.047	4	2	1442.96	1.115	5	5	1425.21	0.963	6	7	1421.38	1.006	7	6	1414.51	0.79	8	8	1353.86	0.377	9	9	1327.54	0.119	10	10
Mobility	Density Ln	MobilityRank	DensityRank																																										
1468.71	1.841	1	3																																										
1464.35	1.572	2	4																																										
1457.63	2.2	3	1																																										
1447.89	2.047	4	2																																										
1442.96	1.115	5	5																																										
1425.21	0.963	6	7																																										
1421.38	1.006	7	6																																										
1414.51	0.79	8	8																																										
1353.86	0.377	9	9																																										
1327.54	0.119	10	10																																										
<p>Тест на незалежність за критерієм <math>\chi^2</math></p>	<p>Нульова гіпотеза (<math>H_0</math>): Змінна 1 і змінна 2 не пов'язані в популяції; частки змінної 1 однакові для різних значень змінної 2.</p> <p>Альтернативна гіпотеза (<math>H_1</math>): Змінна 1 і змінна 2 пов'язані в популяції; частки змінної 1 не є однаковими для різних значень змінної 2.</p>																																												

	$\chi_{\text{очікуване}} = \frac{\text{Сума по рядку} \cdot \text{Сума по стовпцю}}{\text{Сума таблиці}} \quad (2.18)$ $\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E} \quad (2.19)$ <p>Де <math>O</math> – це значення комірки в оригінальній таблиці, а <math>E</math> – це <math>\chi_{\text{очікуване}}</math> для цієї комірки</p> <p><math>\chi_{\text{очікуване}}</math> розраховується за формулою 2.18 для кожної комірки. Далі проходимо по всі коміркам формулою 2.19.</p> <p>Після цього знаходиться критичне значення <math>\chi_{\text{крит}}^2</math> у таблиці у Додатку Г і порівнюємо з отриманим <math>\chi^2</math>. Якщо воно менше за критичне, то нульова гіпотеза відкидається.[19]</p>
Тест знаків	<p>Візьмемо дві вибірки. Віднімаємо від другої вибірки першу і отримуємо третю вибірку. Після цього підраховується кількість позитивних та негативних результатів.</p> <p>Тепер для проведення тесту потрібен розмір вибірки віднявши кількість нулів і знаходимо р-значення з таблиці біноміального розподілу схожої на таблицю у Додатку Д. Потім р-значення порівнюється з рівнем значущості і вирішується чи відкидається нульова гіпотеза.</p>
Тест Крускала-Уолліса	<p>Тест є альтернативною одностороннього тесту ANOVA, коли в останньому не пройшла перевірка на нормальність даних. Для цього тесту потрібно, щоб вибірки мали подібний розподіл, незалежність змінних і порядковий або неперервний тип даних у пояснювальній змінній.</p> <p>Уявімо що є 3 вибірок порядкових даних. Об'єднуємо їх в одну групу і сортуємо у порядку зростання і ранжуємо їх, потім повертаємо дані в групи з призначеним рангом і знаходимо суму рангів для кожної групи. Далі рахуємо H-статистику за формулою 2.20 і знаходимо критичне значення по таблиці у Додатку Г і порівнюємо.[20]</p>

	$H = \left( \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^c \frac{T_i^2}{n_i} \right) - 3(N+1) \quad (2.20)$ <p>Де <math>N</math> – це сума розмірів усіх груп, <math>c</math> – кількість груп,  <math>T_i</math> – обрахована сума рангів для <math>i</math>-ї групи, <math>n_i</math> – розмір <math>i</math>-ї групи.</p>
<p>ANOSIM тест</p>	$R = \frac{\bar{r}_B - \bar{r}_W}{n(n-1)/4} \quad (2.21)$ <p>ANOSIM тест є альтернативою MANOVA тесту і алгоритм складається так:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Порахувати матрицю відстаней як у тесті Крускала-Уолліса. Ранжувати відстані так щоб найменше значення мало ранг 1.</li> <li>• Повернути значення в оригінальні вибірки.</li> <li>• Порахувати середній ранг по вибіркам (<math>\bar{r}_W</math>) та між вибіками (<math>\bar{r}_B</math>). Якщо фактор групування є важливим, то середній ранг всередині вибірок має бути меншим, ніж середній ранг між вибірками.</li> <li>• Порахувати R-статистику по формулі 2.21, яка може набувати значень від «-1», якщо всі найнижчі ранги знаходяться між вибірками, до «1», якщо всі найнижчі ранги знаходяться всередині вибірок. Він дорівнює нулю, якщо найвищі та найнижчі ранги ідеально змішані між вибірками та серед вибірок.</li> </ul> <p>Перевіряємо значущість R за допомогою перестановок в залежності від обраної варіації тесту:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Перемішаймо порядок значень у факторі.</li> <li>• Перерахуємо R, використовуючи змінений фактор</li> <li>• Повторюємо перші два кроки n-ну кількість разів і будуємо вибірковий розподіл R з яким порівнюється фактичне значення статистика пороховане перед ітераційним процесом.</li> <li>• Розраховуємо р-значення як частку перестановок у яких перераховані R дорівнювали чи були більші за R фактичне.[21]</li> </ul>



<p>U-критерій Манна-Уїтні (Тест Вілкоксона на суму рангів)</p>	$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - R_1 \quad (2.22)$ $U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - R_2 \quad (2.23)$ <p>Гіпотези:  <math>H_0</math>: Обидві вибірки є рівними.  <math>H_1</math>: Обидві вибірки не є рівними.</p> <p>Так же само об'єднуємо дві вибірки, сортуємо у зростаючому порядку, присвоюємо ранги і сумуємо ранги у кожній вибірці і зберігаємо у змінні <math>R_1</math> та <math>R_2</math> відповідно. Тепер розрахуємо статистику <math>U</math> по формулам 2.22 та 2.23.</p> <p>Беремо найменше значення <math>U</math>, та порівнюємо його з критичним з таблиці у Додатку Е.</p>
<p>Знаковий ранговий тест Вілкоксона</p>	<p>Знаковий ранговий тест Вілкоксона – це непараметрична версія парного Т-тесту. Він використовується для перевірки того, чи існує значуща різниця між двома середніми значеннями популяції.</p> <p>Спочатку робимо те ж саме що у звичайному знаковому тесті, знаходимо різницю між 2 вибірки і робимо 2 нові вибірки: перша для обрахованої різниці, а інша це ця ж сама група, але по взята за модулем. Після цього ці вибірки ранжуються, але у групі з різницею ранжуються тільки від'ємні значення. Знаходимо матричну суму цих двох вибірок і маємо нову вибірку з рангами тільки позитивної різниці. Тепер рахуємо суму негативних та позитивних рангів. Статистика <math>W</math> буде дорівнювати найменшій абсолютній сумі. Порівнюємо це значення з критичним у Додатку Ж.[22]</p>

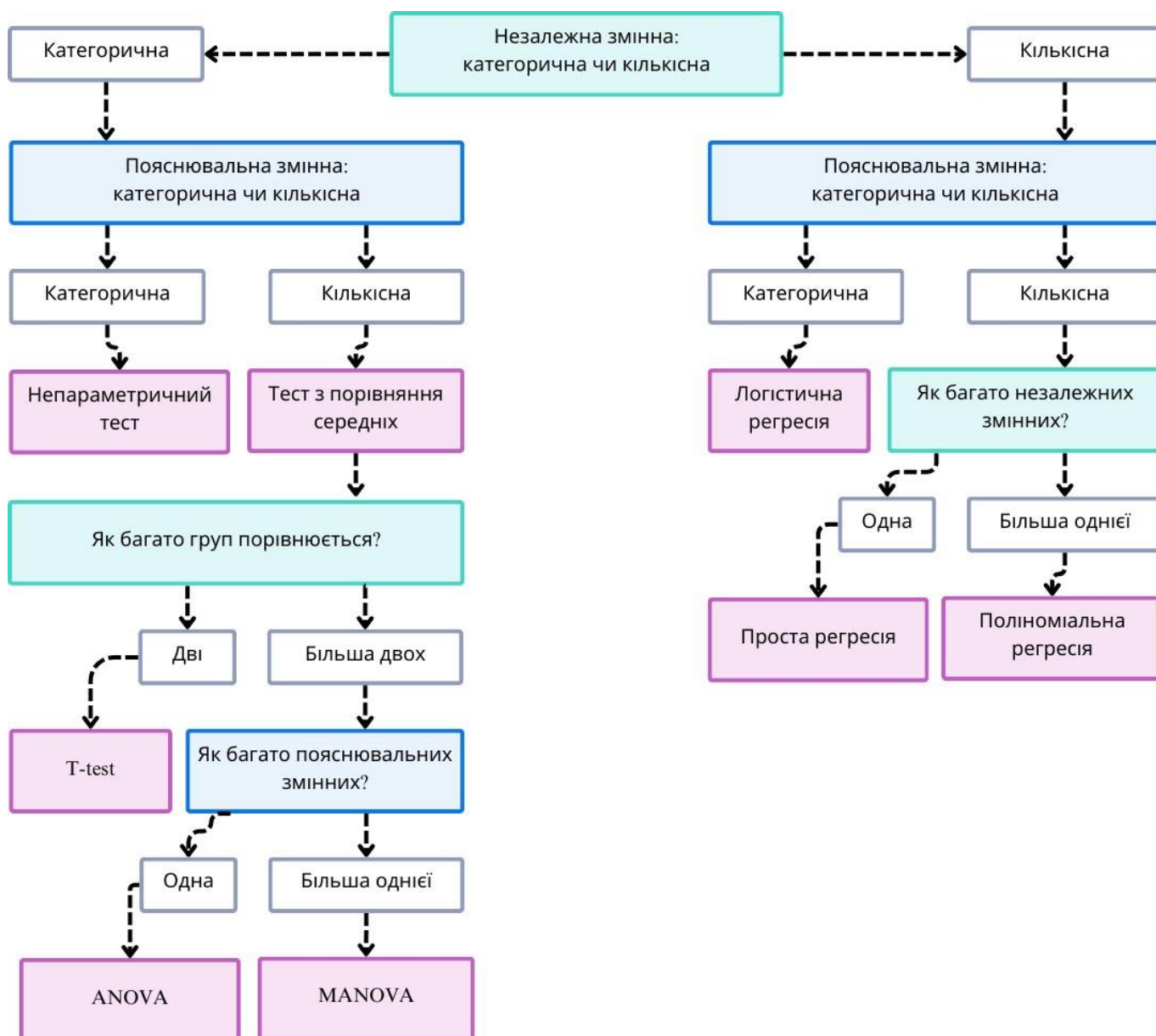


Рис. 2.2 – Алгоритм вибору тесту гіпотези

## 2.2. Перевірка гіпотез та рівень значущості в Optimizely

Рівень значущості допомагає сервісу контролювати кількість помилок під час експерименту і як у будь-якому контрольованому експерименті у нас може бути 3 результати «див. рис. 2.3»:

- Точні результати (Істиннопозитивні[True-positive] та Істиннонегативні[True-negative]) – Якщо є значуща, позитивна або негативна різниця, то дані показуються переможця і переможеного, а якщо різниці немає, то дані показують непереконливий результат.
- Помилка I типу (Хибнопозитивні або False-positive) – Дані показують значну різницю між варіаціями, але самі варіації не сильно відрізняються, тому це говорить про наявність «шуму» серед даних.
- Помилка II типу (Хибнонегативні або False-negative) – Тест показує непереконливий результат, хоча варіація відрізняється базового рівня.

Рівень значущості визначає, які дані вважатимуться значущими, а які – ні для заданих гіпотез. Занизький рівень значущості зменшує ймовірність виникнення помилки першого роду, але збільшує ймовірність помилки другого роду, коли точні результати, які повинні бути визнані істиннопозитивними, класифікуються неправильно або не вдається відхилити нульову гіпотезу. Занадто високий рівень значущості зменшує ризик помилки другого роду, але збільшує ризик помилки першого роду. Зазвичай вибирають рівень значущості 0.05 або 0.01, проте в Optimizely є спосіб вирішення цих проблем за умови, описаної нижче.

Перед початком експерименту в Optimizely можна обрати тип тестів:

- Двосторонній тест, який виявляють відмінності між оригіналом і варіацією в обох напрямках. Двосторонні тести показують, чи є варіація кращою або гіршою за оригінал і наскільки.
- Односторонній тест, який показує, чи є варіація або кращою, або гіршою за оригінал і наскільки. Тобто якщо взято за альтернативну гіпотезу те, що варіація краще за оригінал, то ми або отримаємо результат наскільки вона краще, або те що вона не є кращою.

Також в Optimizely є функціонал сегментування трафіку, але при сегментації сервіс не проводить додаткову корекцію частоти помилкових відкриттів (False discovery rate control) для сегментованих результатів.

Контроль частоти помилкових відкриттів – це статистична процедура для виправлення множинності, спричиненої одночасним проведенням декількох тестів гіпотез. Він допомагає визначити справжнього переможця у випадку, коли тест оголосив фальшивого, через велику кількість «шуму».

При багаторазовому сегментуванні та пошуку статистично значущих результатів, самі результати з більшою імовірністю можуть виявитися хибнопозитивними. Цей ризик можна обмежити, якщо перевіряти лише найбільш значущі сегменти, бо велика кількість помилкових результатів виникає тестування проводиться на багатьох різних сегментах.

У додаток до статистичної значущості Optimizely також використовує довірчі інтервали. Довірчий інтервал показує інтервал можливих значень результату тестування з заданим довірчим коефіцієнтом, який зазвичай береться як різниця одиниці та рівня значущості.

Наприклад, потрібно дізнатися середній зріст людей у країні та почали опитувати людей. У результаті було отримано 170 сантиметрів, але не можна впевнено сказати, що це фактичний середній зріст. Знайшовши довірчий інтервал з рівнем довіри 95% отримуємо інтервал від 165 до 175 сантиметрів, це означає що у 95 випадків зі 100 при повторному опитуванні середня висота людей буде лежати в межах цього інтервалу.

Сам довірчий інтервал розраховується по двох формулам, але перша формула використовується тільки за відомою дисперсії популяції, що на практиці зустрічається вкрай рідко, тому розглянемо формулу для вибірок «див. формулу 2.24». Також є інші формули, але вони є взаємозамінними, оскільки дисперсія рахується по середньому значенню, а середньоквадратичне відхилення по дисперсії відповідно.

$$\left[ \bar{X} - t_{\text{двосторонній}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_{\text{двосторонній}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right] \quad (2.24)$$

де  $\bar{X}$  – це середнє вибірки,  $t$  – значення по розподілу Стьюдента «див. Додаток А»,  $s$  – виправлене середньоквадратичне відхилення «див. формулу 2.9»,  $n$  – розмір вибірки.

Варіація вважається значущою, коли довірчий інтервал перестає містити нуль. Інтервали, які перетинають нуль у негативному напрямку, означають, що вони мають недостатньо доказів чи існує чіткий вплив.

- Виграшна варіація – Довірчий інтервал повністю перевищує 0% «див. рис. 2.4».
- Непереконлива варіація – Довірчий інтервал включає 0% «див. рис. 2.5».
- Програшна варіація – Довірчий інтервал повністю нижче 0% «див. рис. 2.6».

————— Що говорять результати тесту —————

		Оригінал та варіація показують однаковий результат	Оригінал та варіація показують різний результат
Що є правдою	Оригінал та варіація показують однаковий результат	✓ Точні Результати	✗ Помилка I типу
	Оригінал та варіація показують різний результат	✗ Помилка II типу	✓ Точні Результати

Рис. 2.3 – Матриця невідповідностей для тесту гіпотез

## Primary Metric

Click Event for #test

Unique conversions per visitor for Click Event for #test event

Edit

	Unique Conversions Visitors	Conversion Rate	Improvement	Confidence Interval	Statistical Significance
Original	1,646 120,543	1.37%	--	--	-- Baseline
Variation #1	3,121 120,359	2.59%	+89.9%	+77.57%   +105.21%	>99%

Рис. 2.4 – Довірчий інтервал повністю перевищує 0%

## Primary Metric

Overall Revenue

Extreme values are smoothed for the results

Total revenue per visitor summed across all events

Edit

	Total Revenue Visitors	Revenue per Visitor	Improvement	Confidence Interval	Statistical Significance
Original	\$1,356,371.34 423,535	\$3.20	--	--	-- Baseline
Variation #1	\$1,365,117.19 423,357	\$3.22	+0.69%	-20.19%   +22.13%	<1% >100,000 visitors remaining

Рис. 2.5 – Довірчий інтервал включає 0%

## Primary Metric

CLICK BUY NOW Button

Unique conversions per visitor for CLICK BUY NOW Button event

Edit

	Unique Conversions Visitors	Conversion Rate	Improvement	Confidence Interval	Statistical Significance
Original	3,656 194,126	1.88%	--	--	-- Baseline
Variation #1	2,593 162,556	1.60%	-15.3%	-15.55%   -9.19%	>99%

Рис. 2.6 – Довірчий інтервал повністю нижче 0%

## РОЗДІЛ 3. А/В-ТЕСТУВАННЯ НА ПРАКТИЦІ

### 3.1. Гіпотеза тестування

Надання персоналізованих рекомендацій читачам за допомогою гібридної колаборативної фільтрації матиме позитивний вплив на CTR транспортеру, бо персоналізовані рекомендації покращують релевантність та корисність представленого контенту.

### 3.2. Термінологія

**Транспортером** називається елемент сайту, де відбуваються зміни. Він знаходиться над футером вебсторінки.

**Гібридна колаборативна фільтрація (Hybrid Collaborative Filtering або HCF)** – це тип рекомендаційної системи, який поєднує різні підходи для рекомендацій, часто використовуючи методи колаборативної фільтрації на основі користувача і об'єктів. Поєднання цих двох методів спрямоване на підвищення точності та ефективності рекомендацій, використовуючи як уподобання користувачів, так і схожість об'єктів.

Тестування буде проводитись на усіх можливих платформах на території Сполучених Штатів Америки «див. рис. 3.1» на вебсторінках вказаних у вкладці Targeting «див. рис. 3.2».

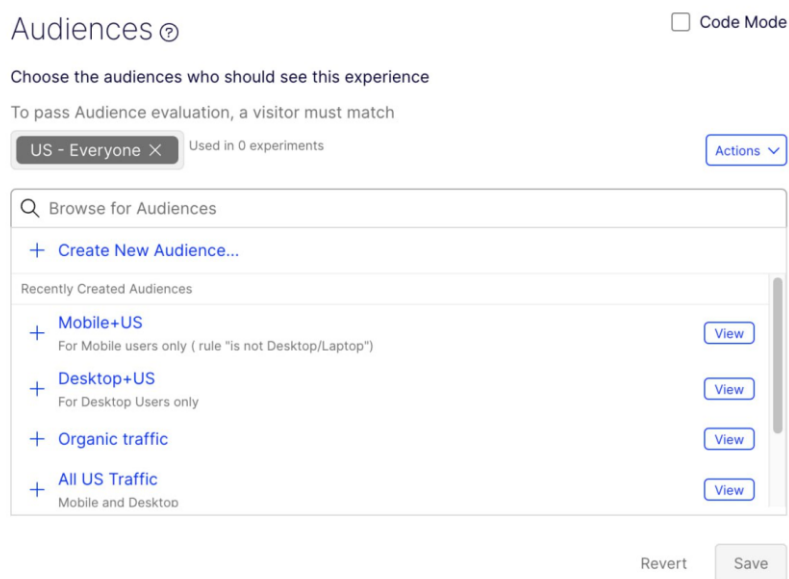


Рис. 3.1 – Сегментація аудиторії на вкладці Audiences

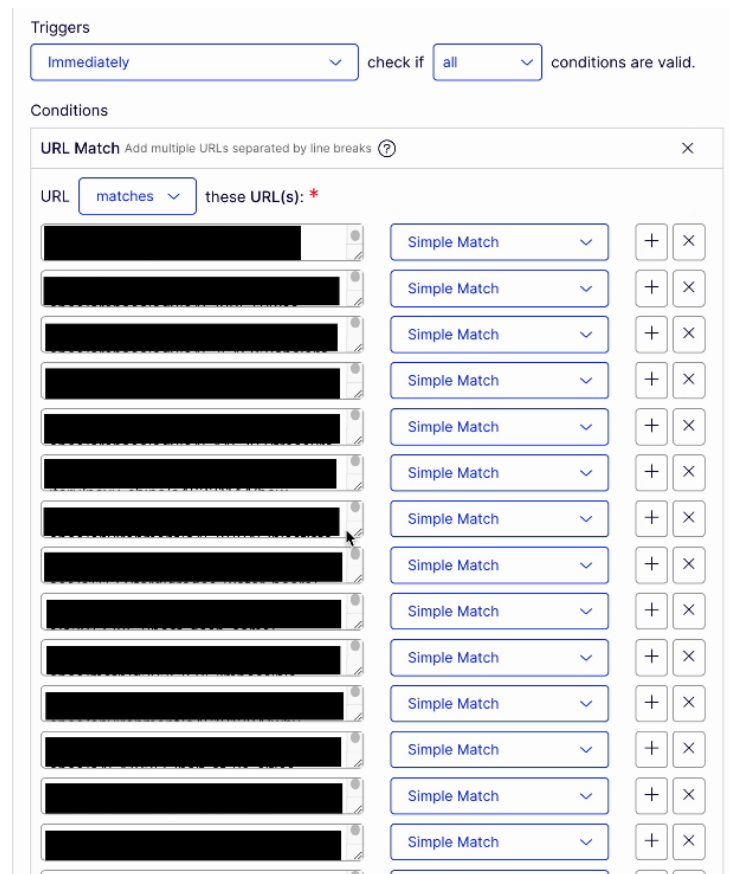


Рис. 3.2 – Вибір вебсторінок на яких буде проводитися тестування

### 3.3. Використані метрики

1. **Унікальні кліки у транспортері (total\_transporter\_clicks)** є головною метрикою і буде показувати успіх рекомендаційної системи у заохоченні користувачів на взаємодію з вебсайтом через індивідуально-запропоновані статті. Причина, чому саме ця метрика є головною, оскільки ця метрика також може слугувати як індикатор конверсії відвідувачів у потенційних клієнтів. Ця метрика, як і метрика обраховуються у кодї на рисунку 3.6 за допомогою функції на рисунку 3.3.
2. **Загальна кількість натисків у транспортері (total\_transporter\_clicks)** показує загальне залучення відвідувачів з транспортером.
3. **Кількість пройдених вебсторінок за сесію (pages\_per\_user)** показує наскільки вдалими були рекомендації, бо чим більше це число, тим краще рекомендаційна система визначила тему, яка до вподоби відвідувачу. Подія інкрементації кількості сторінок відбувається у функції на рисунку 3.5.



4. **Відносна кількість відвідувачів, які дійшли до транспортера (reached\_transporter\_block)**, тобто кількість відвідувачів, яка переглянула свою першу вебсторінку до кінця. Функція слідування цієї події «див. рис. 3.4» викликається в коді на рисунку 3.6.
5. **Середня тривалість сесії (session\_length)** показує чи стали відвідувачі проводити більше часу на вебсайті після введених змін. Інформація по сесії відправляється кожні 30 секунд і значення цієї метрики інкрементуються.
6. **Коефіцієнти конверсії відвідувачів (Product Click, mr\_product\_click, psv\_product\_click)** показує наскільки введені зміни впливають на «конвертацію» відвідувача у клієнта.
7. **Кількість порожніх відповідей (recommendation\_fallback)** показує наскільки часто система рекомендацій повертає «порожню» відповідь. Ця відповідь формується та відправляється у коді на рисунку 3.10.
8. **Унікальні кліки на елементи 1-12 (element\_{1...12}\_clicked)** показують на які статті користувачі більше звертають увагу (всього буде 12 рекомендацій). Ця метрика також обраховується функцією на рисунку 3.3 разом з метриками 1 та 2.

```

// Here we fetch event of transporter clicks
function fetchTransporterItemClicks(transporterItemEl, elementIndex) {
  transporterItemEl.addEventListener('click', (event) => {

    window.optimizely.push({
      type: 'event',
      eventName: `element_${elementIndex}_clicked`,
      tags: {}
    });

    window.optimizely.push({
      type: 'event',
      eventName: EVENT_TRANSPORTER_CLICK,
      tags: {}
    });
  });
}

```

Рис. 3.3 – Функція підрахунку кількості натискань по елементах транспортеру

```

// Here we fetch event of transporter block reached
const transporterBlockObserver = new IntersectionObserver((entries) => {
  entries.forEach((entry) => {
    if (entry.isIntersecting) {
      window.optimizely.push({
        type: 'event',
        eventName: EVENT_REACHED_TRANSPORTER_BLOCK,
        tags: {}
      });
      // Stop observing once the event is triggered
      transporterBlockObserver.unobserve(entry.target);
    }
  });
});
});

```

Рис. 3.4 – Функція підрахунку кількості натискань по елементах транспортеру

```

// Function that send +1 page per user, every time after page loaded
const pagesPerUser = function() {
  window.optimizely.push({
    type: 'event',
    eventName: PAGES_PER_USER,
    tags: {}
  });
};

// When page load, we send total_pages_per user event
window.onload = pagesPerUser();

```

Рис. 3.5 – Функція визначення кількості сторінок, переглянутих відвідувачем

```

// When our tracking page is loaded we activate experiment flag and expire time
window.onload = setExperimentStatus();

let utils = window.optimizely.get('utils');

const uniqueTransporterClicks = new Set();

// Waiting until transporter block will be ready
utils
  .waitUntil(() => {
    return document.querySelectorAll('[data-block="transporter"] a[data-vars-cta]').length;
  })
  .then(() => {
    // Get Our transporter block
    transporterEl = document.querySelector('[data-block="transporter"]');
    transporterBlockObserver.observe(transporterEl);
    transporterItemEls = transporterEl.querySelectorAll('a[data-vars-cta]');

    for (let i = 0; i < transporterItemEls.length; i++) {
      let transporterItemEl = transporterItemEls[i];

      // Here we counting added elements, for catch this in metric with special element clicked
      const elementIndex = i + 1;
      fetchTransporterItemClicks(transporterItemEl, elementIndex);
    }

    return transporterEl;
  }).then((transporterEl) => {
    let elementIndex = 0;
    // Set Observer to transporter block changes, when we set new transporter items
    const observer = new MutationObserver((mutations) => {
      mutations.forEach((mutation) => {
        if (!mutation.addedNodes) return;

        for (let i = 0; i < mutation.addedNodes.length; i++) {
          let node = mutation.addedNodes[i];

          if (typeof node.hasAttributes !== 'function' || !node.hasAttribute('data-vars-cta')) {
            return;
          }

          // Here we counting added elements, for catch this in metric with special element clicked
          elementIndex++;

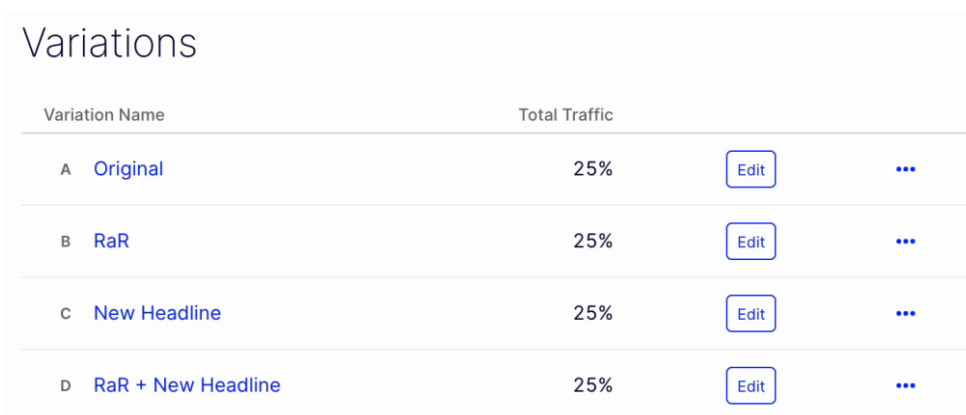
          fetchTransporterItemClicks(node, elementIndex);
        }
      });
    });
  });

```

Рис. 3.6 – Опрацювання елементів транспортера з метою обчислення натисків по НИХ

### 3.4. Варіації дизайну

У нас є 4 варіації дизайну транспортера: перша – це оригінал «див. рис. 3.8», друга – з доданою рекомендаційною системою «див. рис. 3.16», третя – з новим заголовком «див. рив. 3.19», і четверта – гібрид третьої і четвертої варіацій «див. рис. 3.19». Кожна варіація буде показуватися порівно, тобто вони всі мають імовірність бути показаними 25% «див. рис. 3.7».



Variation Name	Total Traffic		
A Original	25%	Edit	...
B RaR	25%	Edit	...
C New Headline	25%	Edit	...
D RaR + New Headline	25%	Edit	...

Рис. 3.7 – Розподіл трафіку для тесту варіацій

## Перша варіація

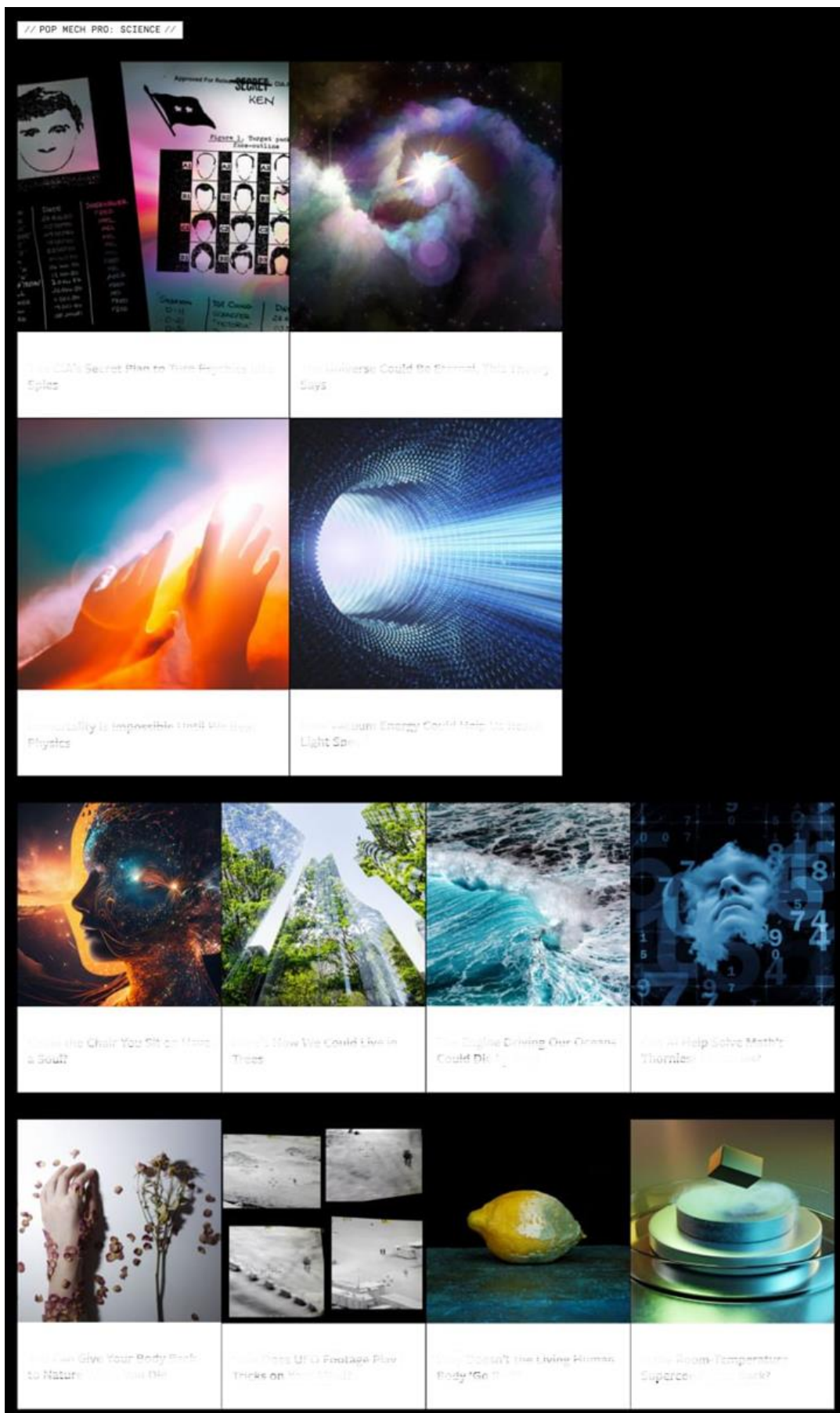


Рис. 3.8 – Стандартний вигляд транспортера вебсайту (Оригінал)

## Друга варіація

У цій варіації було додано рекомендаційну систему.

Спочатку задаються параметри підключення до бази даних neo4j.

```
const NEO4J_URL = 'neo4j+s://{custom param}';
const NEO4J_USER = 'neo4j';
const NEO4J_PASSWORD = '{database password}';
```

Константа з назвою івенту, яка є сьомою матрикою (recommendation\_fallback).

```
const EVENT_RECOMMENDATION_FALLBACK = 'recommendation_fallback';
```

І кількість рекомендацій, яку буде повертати neo4j.

```
const recommendedLimit = 12;
```

Функція підключення до neo4j (див. рис. 3.9).

```
function loadModule() {
  return new Promise((resolve, reject) => {
    const script = document.createElement("script");
    script.src = 'https://unpkg.com/neo4j-driver@5.11.0/lib/browser/neo4j-web.min.js';
    script.type = 'text/javascript';
    script.addEventListener('load', () => {
      resolve(); // Resolve the Promise when the script is loaded
    });
    script.addEventListener('error', () => {
      reject(new Error('Failed to load Neo4j module')); // Reject the Promise if an error occurs
    });
    document.head.appendChild(script);
  });
}
```

Рис. 3.9 – Функція підключення до бази даних neo4j

Далі маємо функцію знаходження рекомендацій, де процес знаходження схожих статей відбувається за запитом нижче:

```
const query = `
MATCH r = (c:content{id: "${urlReccomendation}})-[v:VIEWED]-(u:user)-[:VIEWED]->(c2:content)
WHERE NOT (c2.id =~ '.*(\.com|\.com\/)$') AND c <> c2 AND c2.content_title IS NOT NULL AND
c2.content_image_url IS NOT NULL
RETURN c2.id AS url, c2.content_title AS header, c2.content_image_url AS image_url,
c2.content_image_crop_string AS crop_string, COUNT(v) AS related_view_count, c2.view_count AS
view_count
ORDER BY related_view_count DESC, view_count DESC
LIMIT 12

UNION

MATCH (c:content{id: "${urlReccomendation}})
WITH c
MATCH (c2:content{content_section: c.content_section, content_subsection: c.content_subsection})
WHERE NOT (c2.id =~ '.*(\.com|\.com\/)$') AND c <> c2 AND c2.content_title IS NOT NULL AND
c2.content_image_url IS NOT NULL
RETURN c2.id AS url, c2.content_title AS header, c2.content_image_url AS image_url,
c2.content_image_crop_string AS crop_string, 0 AS related_view_count, c2.view_count AS view_count
ORDER BY related_view_count DESC, view_count DESC
LIMIT 12
`;
```

У першій частині запиту (до об'єднання результатів за допомогою UNION) знаходиться інформація про передану на функцію статтю, таку як: посилання на статтю (URL), заголовок (header), посилання на зображення статті (image\_url), параметри обрізання зображення (crop\_string), кількість користувачів, які переглянули поточну статтю та рекомендовану (related\_view\_count) та загальна кількість переглядів рекомендованої статті (view\_count). Тепер сортуємо ці дані по related\_view\_count та view\_count у порядку зменшення і виводимо лише 12 перших результатів.

У другій частині запиту фільтрується статті по їхньому вмісту, а саме секції контенту (content\_section) та підсекції контенту (content\_subsection), щоб вони співпадали з поточною статтею. Ознаку related\_view\_count беремо за 0, оскільки в цьому запиті немає взаємодії з другими користувачами вебсайту, а сама ознака потрібна для операції об'єднання результатів та подальшого сортування.

Після результати обох запитів об'єднуються в один, сортуються по related\_view\_count та view\_count у порядку зменшення та обмежуються до 12 перших.

Далі результати фільтруються, щоб показувалися лише унікальні статті. Якщо ж запит до neo4j не дав жодних результатів, то активується подія EVENT\_RECOMMENDATION\_FALLBACK для метрики під номером 7.

Тепер використовуємо цю функцію для додавання цих результатів у транспортер сторінки кодом на рисунку 3.15. Спочатку чекаємо поки сторінка завантажиться до транспортеру і беремо поточне посилання сторінки та чистимо його від зайвих символів. Потім у циклі «for» ховаються всі елементи транспортеру після 12 і після успішного виконання циклу виконується функція fetchRecommendedArticles та її результати опрацьовуються, по перше обрізаємо результати до 12 у випадку, якщо повернулося більше і потім проходимося по кожній рекомендації.

Спочатку копіюємо *i*-ий елемент транспортеру у тимчасову змінну transporterItemEl та глибоку копію у змінну cloneEl. Потім зберігаємо посилання на рекомендовану статтю та її обкладинку в окремі змінні й оновлюємо посилання, заголовок і зображення використовуючи функції на рисунках 3.11 – 3.14. Тепер робимо оновлений елемент cloneEl дочірнім елементом transporterItemEl видаляємо



останній з «дерева» елементів, оскільки cloneEl є заміною цього елемента. Після цього всього відображається оновлений елемент cloneEl на сторінці.

```
function fetchRecommendedArticles (urlReccomendation) {
  return new Promise((resolve, reject) => {
    try{
      const driver = neo4j.driver(NEO4J_URL, neo4j.auth.basic(NEO4J_USER, NEO4J_PASSWORD));
      const session = driver.session();

      const query = `
MATCH r = (c:content{id: "${urlReccomendation}"})←[v:VIEWED]-(u:user)-[:VIEWED]→(c2:content)
WHERE NOT (c2.id =~ '.*(\.com|\.com\/)$') AND c <> c2 AND c2.content_title IS NOT NULL AND c2.content_image_url IS NOT NULL
RETURN c2.id AS url, c2.content_title AS header, c2.content_image_url AS image_url, c2.content_image_crop_string AS crop_string,
COUNT(v) AS related_view_count, c2.view_count AS view_count
ORDER BY related_view_count DESC, view_count DESC
LIMIT 12

UNION

MATCH (c:content{id: "${urlReccomendation}"})
WITH c
MATCH (c2:content{content_section: c.content_section, content_subsection: c.content_subsection})
WHERE NOT (c2.id =~ '.*(\.com|\.com\/)$') AND c <> c2 AND c2.content_title IS NOT NULL AND c2.content_image_url IS NOT NULL
RETURN c2.id AS url, c2.content_title AS header, c2.content_image_url AS image_url, c2.content_image_crop_string AS crop_string,
0 AS related_view_count, c2.view_count AS view_count
ORDER BY related_view_count DESC, view_count DESC
LIMIT 12
`;

      session
        .run(query)
        .then(result => {

          // Filtering result query for unique recommendation urls
          const uniqueObjects = new Set();
          const filteredResults = result.records.filter(record => {
            const obj = record._fields[1];
            if (obj) {
              const objString = JSON.stringify(obj); // Convert to a string for comparison
              if (!uniqueObjects.has(objString)) {
                uniqueObjects.add(objString);
                return true; // Include this object in the filtered array
              }
            }
            return false; // Object is a duplicate
          });

          if (filteredResults.length === 0) {
            window.optimizely.push({
              type: 'event',
              eventName: EVENT_RECOMMENDATION_FALLBACK,
              tags: {}
            });
          }

          session.close();
          driver.close();

          resolve(filteredResults);
        })
        .catch(error => {
          console.error(error);
          session.close();
          driver.close();
          reject(error); // Reject the outer promise with the error
        });
    } catch (error) {
      console.log(error);
    }
  });
}

```

Рис. 3.10 – Функція підбору рекомендацій



```

const updateUrl = function (cloneEl, url) {
  cloneEl.setAttribute('href', 'https://' + url);
  cloneEl.setAttribute('data-vars-ga-outbound-link', url);

  return cloneEl;
};

```

Рис. 3.11 – Функція оновлення посилання

```

const updateTitle = function (cloneEl, title) {
  const targetSpan = cloneEl.querySelector('div:last-child p span:first-child + span');
  const cleanTitle = title.replace(/<[^>]*>/g, "");

  targetSpan.innerText = cleanTitle;
  cloneEl.setAttribute('data-vars-ga-call-to-action', cleanTitle);

  return cloneEl;
};

```

Рис. 3.12 – Функція оновлення заголовку

```

const updateQueryStringParameter = function (uri, key, value) {
  var re = new RegExp("([?&])" + key + ".*?(&|$)", "i");
  var separator = uri.indexOf('?') !== -1 ? "&" : "?";
  if (uri.match(re)) {
    return uri.replace(re, '$1' + key + "=" + value + '$2');
  } else {
    return uri + separator + key + "=" + value;
  }
};

```

Рис. 3.13 – Функція витягування зображень різного розміру для різних пристроїв

```
const updateImage = function (cloneEl, imageUrl, alt) {
  const imageEl = cloneEl.querySelector('div > img');

  let src;
  let srcset;

  src = updateQueryStringParameter(imageUrl, 'resize', '180:*');
  srcset =
    updateQueryStringParameter(imageUrl, 'resize', '360:* 720w') + ', ' +
    updateQueryStringParameter(imageUrl, 'resize', '270:* 540w') + ', ' +
    updateQueryStringParameter(imageUrl, 'resize', '180:* 360w') + ', ' +
    updateQueryStringParameter(imageUrl, 'resize', '90:* 180w');

  imageEl.setAttribute('src', src);
  imageEl.setAttribute('data-src', src);
  imageEl.setAttribute('srcset', srcset);
  imageEl.setAttribute('data-srcset', srcset);

  if (alt && imageEl.getAttribute('alt')) {
    imageEl.setAttribute('alt', alt);
  }
  if (alt && imageEl.getAttribute('title')) {
    imageEl.setAttribute('title', alt);
  }

  return cloneEl;
};
```

Рис. 3.14 – Функція завантаження зображення

```

let utils = window.optimizely.get('utils');

loadModule()
  .then(() => {
    return utils.waitForElement('[data-block="transporter"]');
  })
  .then((transporterEl) => {

    // REPLACE HERE URL FROM STAGE TEST URL INTO COSMO TRACKED URL
    const currentURL = window.location.href;
    const urlReccomendation = currentURL.replace(/^https?:\/\//i, '').replace(/\?[^#]*/, '');
    // console.log('Here is the new cleaned URL for graph - ', urlReccomendation);
    const transporterItemElms = transporterEl.querySelectorAll('[data-vars-cta]');

    for (let i = recommendedLimit; i < transporterItemElms.length; i++) {
      transporterItemElms[i].style.display = 'none';
    }

    fetchRecommendedArticles(urlReccomendation).then((results) => {
      // console.log('Resolved Array:', results);

      // Loop through each recommended article and update the corresponding element
      results
        .slice(0, recommendedLimit)
        .forEach((recommendedArticle, index) => {
          let
            transporterItemEl = transporterItemElms[index],
            cloneEl = transporterItemEl.cloneNode(true);
          try {
            let transporterItemEl = transporterItemElms[index];

            let recommendedArticleUrl = recommendedArticle._fields[0];
            let recommendedArticleImageUrl = recommendedArticle._fields[2];

            updateUrl(cloneEl, recommendedArticleUrl);
            updateTitle(cloneEl, recommendedArticle._fields[1]);
            updateImage(cloneEl, recommendedArticleImageUrl, recommendedArticle._fields[1]);

            // Insert the clone element after the transporter item element
            transporterItemEl.parentNode.insertBefore(cloneEl, transporterItemEl.nextSibling);

            transporterItemEl.remove();
            cloneEl.style.display = 'block';
          } catch (e) {
            console.log(e);
          }
        });
    });
  });
};

```

Рис. 3.15 – Функція заміни стандартних елементів транспортеру рекомендованими

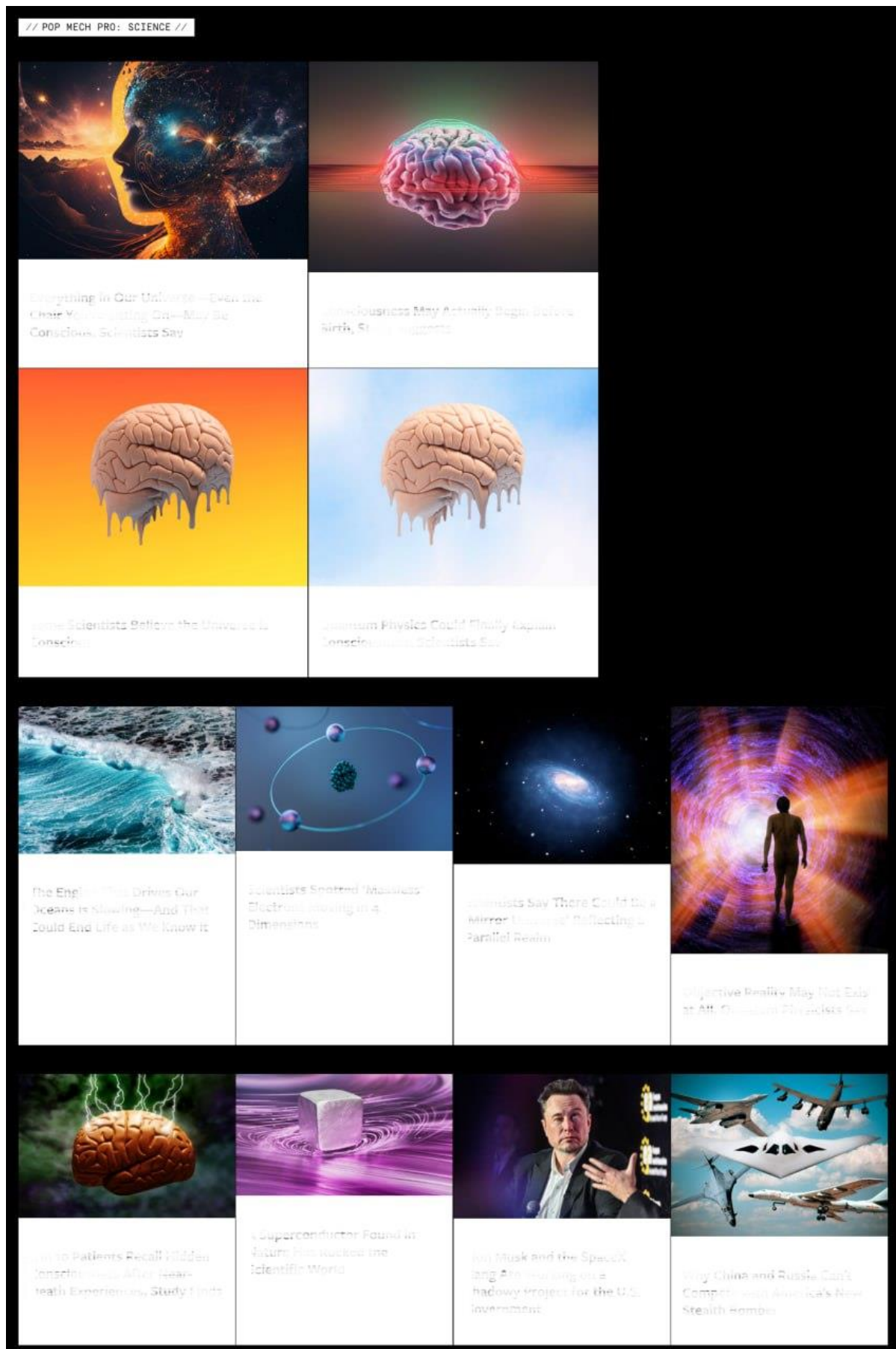


Рис. 3.16 – Друга варіація з системою рекомендацій (RaR variation)

### Третя варіація

У третій варіації було змінено тільки заголовок транспортера. Код заміни заголовку знаходиться на рисунку 3.17, а його вигляд на рисунку 3.18.

```
const headline = "Recommended For You";

let updateHeadline = function (transporterEl, headline) {
  const headlineEl = transporterEl.querySelector('section:first-child > div:first-child h2 a');
  headlineEl.innerText = headline;
  headlineEl.style.pointerEvents = 'none';
};

let utils = window.optimizely.get('utils');
utils
  .waitForElement('[data-block="transporter"]')
  .then((transporterEl) => {
    // update transporter headline
    updateHeadline(transporterEl, headline);
  });
```

Рис. 3.17 – Код заміни заголовку в транспортері



Рис. 3.18 – Вигляд зміненого заголовку на вебсторінці



## Четверта варіація

Четверта варіація є комбінацією другої та третьої варіацій та має вигляд як на рисунку 3.19.

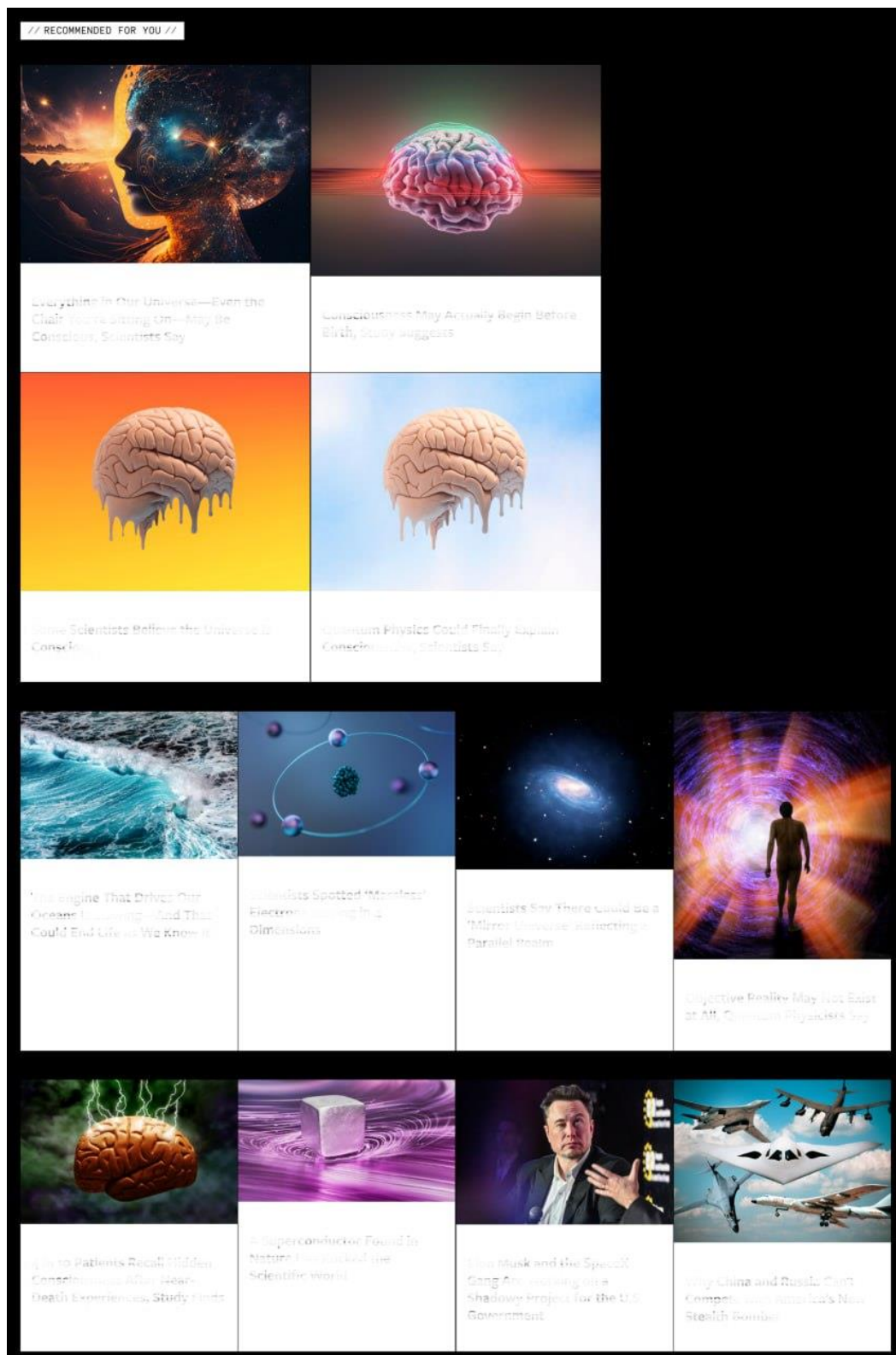


Рис. 3.19 – Комбінація нового заголовку з НСФ

### 3.5. Аналіз результатів

Тепер можна перейти до найважливішої частини А/В-тестування, а саме аналізу результатів. Дивлячись на результати на рисунках 3.21 та 3.22 варіації з новим заголовком «див. рис. 3.19» можна побачити рівень значущості менший за 1%, що означає, що цю варіацію можна відкинути, оскільки її результати є не значущими. Тепер перейдемо до огляду всіх метрик по іншим 2 варіаціям.

Спершу подивимось на метрику `reached_transported_block`. Оригінал має коефіцієнт конверсії 10.87%, тобто тільки цей відсоток відвідувачів прокручує вебсторінку до кінця. Порівнюючи оригінал з варіаціями можна побачити, що варіації з рекомендаційною системою мають меншу конверсію ніж оригінал. Можна зробити висновок, що ця метрика більше говорить про приблизний відсоток аудиторії, яка прогорнула до елементів тестування ніж про результати варіацій. Також подивившись на рисунок 3.21(Г) можна побачити, що результати для цієї варіації є статистично незначущими, тому її можна відкинути.

Тепер розглянемо `total_transporter_click`. На зображенні є дві ознаки з таким іменем. Перше це унікальні натискання, тобто тільки перше натискання, яке прийшлося на блок реєструється, а всі інші відкидаються, друга ж ознака реєструє всі натискання. У результаті маємо, що на оригінальній варіації на транспортер прийшлося 0.6% унікальних і 0.007% загальних натискань.

Порівнюючи результати з варіаціями, можна побачити, що відвідувачі більш залучені до взаємодії з транспортером у всіх інших варіаціях. Обидві варіації з рекомендаційною системою мають збільшення конверсії більше ніж на 72% відсотки, що є дуже гарним результатом. Щодо загальних натискань, то вони також показують, що рекомендаційна система гарно впливає на зацікавленість відвідувачів у взаємодії з іншим контентом вебсайту. Подивившись на рисунок 3.21(А, Б) можна побачити, що результати варіацій з НСФ є статистично значущими, а їх довірчий інтервал лежить повністю за нулем, що означає, що якщо експеримент буде проведений ще один раз, то результати з імовірністю  $> 99\%$  будуть кращими за оригінал.

Тепер розглянемо як впливають ці зміни на `pages_per_user`. Ця метрика починає свій відлік з 0 і потім значення інкрементується з кожною новою сторінкою.

Дивлячись на значення значущості цієї метрики «див. рис. 3.21 (В)», можна побачити, що результати мають дуже малий кінцевий відсоток значущості, а саме 28% та 47%, а по графіку видно, що значення ще коливаються, тому результати не є статистично значущими, але якби експеримент тривав довше результати, то видно, що вони б «випрямилися».

Перейдемо до метрики тривалості сесії. Ця метрика також може бути статистично незначущою, але з результатів можна зрозуміти приблизний час, який відвідувачі проводять на вебсайті; цей час варіюється від 175 до 234 секунд. Це може бути пов'язано з коефіцієнтом відмов, який очікувано високий для вебсайтів з новинами.

По наступним 3 метрикам не було надано інформації про їх значення чи як вони розраховуються, а `recommendation_fallback` показує для якого відсотку відвідувачів сервер не зміг знайти рекомендації.

Метрики, що залишилися показують індивідуальний коефіцієнт конверсії для кожної статті. Для першої та третьої метрик, це статичні рекомендації, введені розробниками, а для другої та четвертої це результати NCF, які, як було описано вище, сортовані по «якості» у порядку спадання, де перші будуть у більшості рекомендації по схожості з другими користувачами, а в кінці просто схожі за темою статті.

Результати на рисунку 3.22 говорять, що результати є незначущими і мають великий інтервал довіри, але враховуючи результати `total_transporter_click`, цим метрикам просто потрібен час, щоб отримати значущі результати, оскільки зміна була додана нещодавно, невеликий відсоток відвідувачів прокручує вебсторінки до кінця що напряду впливає на якість рекомендацій, оскільки вона навчається весь цей час і чим більше користувачів будуть взаємодіяти з транспортером тим краще результати він буде давати, а на момент тестування NCF міг повертати багатьом просто схожі за змістом статті. Тому оглянемо результати цих метрик, щоб зрозуміти загальний характер конверсії по елементах. Дивлячись на результати першого елемента «див. рис. 3.22 (1)» з графіку можна побачити, що якість рекомендацій росте, а з рекомендацій на рисунку 3.22 (2) результат майже не коливається, а щодо других



елементів, то видно що сервер має недостатньо даних і дає нечіткі рекомендації на різних вебсторінках, що впливає на рівень значущості.

Summary						
Variations	Visitors	total_transporter_cl...	total_transporter_cl...	pages_per_user	reached_transport...	
Original	61,550 24.97%	-- 0.60%	-- 0.007	-- 0.361	-- 10.87%	
RaR	61,143 24.80%	+72.11% 1.04%	+77.41% 0.012	+2.76% 0.371	-1.61% 10.69%	
New Headline	61,853 25.09%	+2.45% 0.62%	-1.89% 0.007	+5.92% 0.382	+0.7% 10.95%	
RaR + New Headline	61,971 25.14%	+72.48% 1.04%	+76.67% 0.012	+4.63% 0.377	-1.84% 10.67%	

session_length	Product Click	mr_product_click	psv_product_click	recommendation_falhb...	element_1_clicked	element_2_clicked
-- 223.680	-- 0.026	-- 0.002	-- 0.000	-- 0.00%	-- 0.10%	-- 0.11%
-18.04% 183.319	+6.43% 0.027	+41.59% 0.003	+85.22% 0.001	-- 4.51%	+202% 0.29%	+89.31% 0.21%
-0.68% 222.150	+31.59% 0.034	+40.77% 0.003	+55.24% 0.001	-- 0.00%	+7.94% 0.10%	-0.49% 0.11%
-21.54% 175.495	+13.14% 0.029	+34.04% 0.003	+27.13% 0.001	-- 4.58%	+194.6% 0.28%	+98.64% 0.22%

element_3_clicked	element_4_clicked	element_5_clicked	element_6_clicked	element_7_clicked	element_8_clicked	element_9_clicked
-- 0.06%	-- 0.08%	-- 0.03%	-- 0.03%	-- 0.03%	-- 0.04%	-- 0.04%
+143.72% 0.15%	+57.29% 0.12%	+202% 0.08%	+136.56% 0.08%	+65.8% 0.05%	-24.5% 0.03%	+0.67% 0.04%
+30.93% 0.08%	+9.88% 0.09%	+36.83% 0.04%	+9.46% 0.04%	-18.05% 0.02%	+7.8% 0.04%	-17.8% 0.03%
+137.85% 0.15%	+84.16% 0.14%	+247.62% 0.09%	+39.05% 0.05%	+139.54% 0.07%	+32.43% 0.05%	-26.59% 0.03%

element_9_clicked	element_10_clicked	element_11_clicked	element_12_clicked
-- 0.04%	-- 0.07%	-- 0.03%	-- 0.04%
+0.67% 0.04%	-6.52% 0.06%	-4.63% 0.03%	+27.77% 0.05%
-17.8% 0.03%	-45.51% 0.04%	-5.73% 0.03%	-0.49% 0.04%
-26.59% 0.03%	-43.25% 0.04%	-16.36% 0.03%	-0.68% 0.04%

Рис. 3.20 – Зведена таблиця результатів

total\_transporter\_clicks

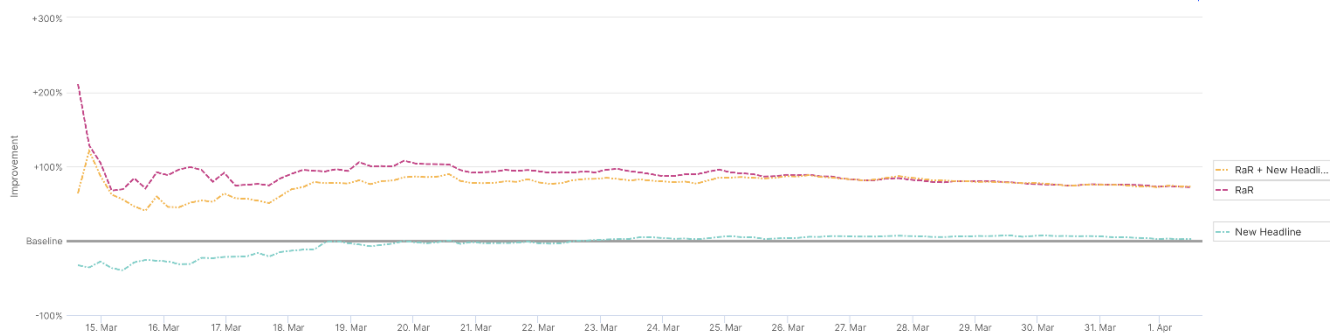
Unique conversions per visitor for total\_transporter\_clicks event

Edit

	Unique Conversions Visitors	Conversion Rate	Improvement	Confidence Interval	Statistical Significance
Original	372 61,552	0.60%	--	--	-- Baseline
RaR	636 61,145	1.04%	+72.11%		>99%
New Headline	383 61,853	0.62%	+2.46%		34% > 100,000 visitors remaining
RaR + New Headline	646 61,978	1.04%	+72.46%		>99%

Hide Graph

Improvement Over Time



### A) total\_transporter\_clicks (унікальні)

total\_transporter\_clicks

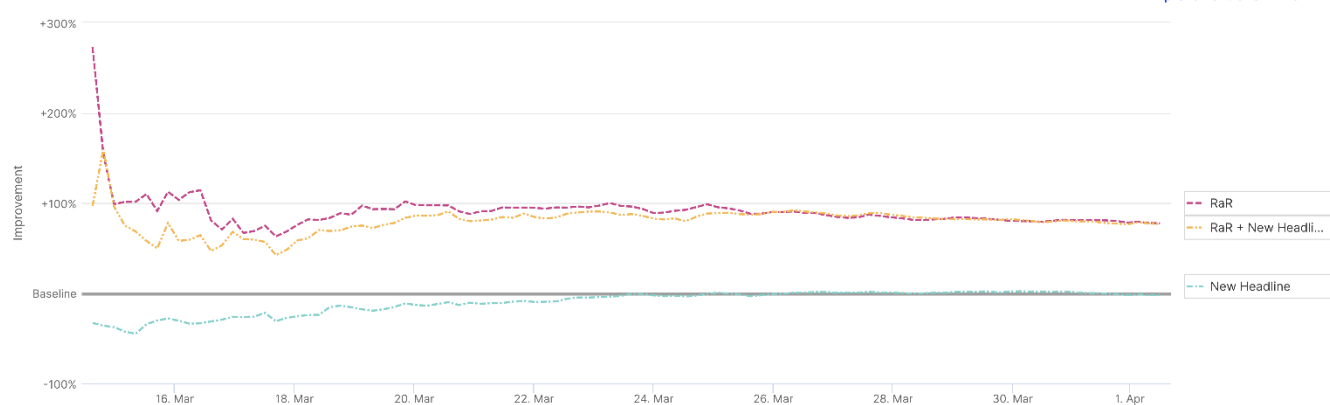
Total conversions per visitor for total\_transporter\_clicks event

Edit

	Total Conversions Visitors	Conversions per Visitor	Improvement	Confidence Interval	Statistical Significance
Original	425 61,552	0.007	--	--	-- Baseline
RaR	749 61,145	0.012	+77.41%		>99%
New Headline	419 61,853	0.007	-1.89%		<1% > 100,000 visitors remaining
RaR + New Headline	756 61,978	0.012	+76.66%		>99%

Hide Graph

Improvement Over Time



### Б) total\_transporter\_clicks (загальні)

pages\_per\_user

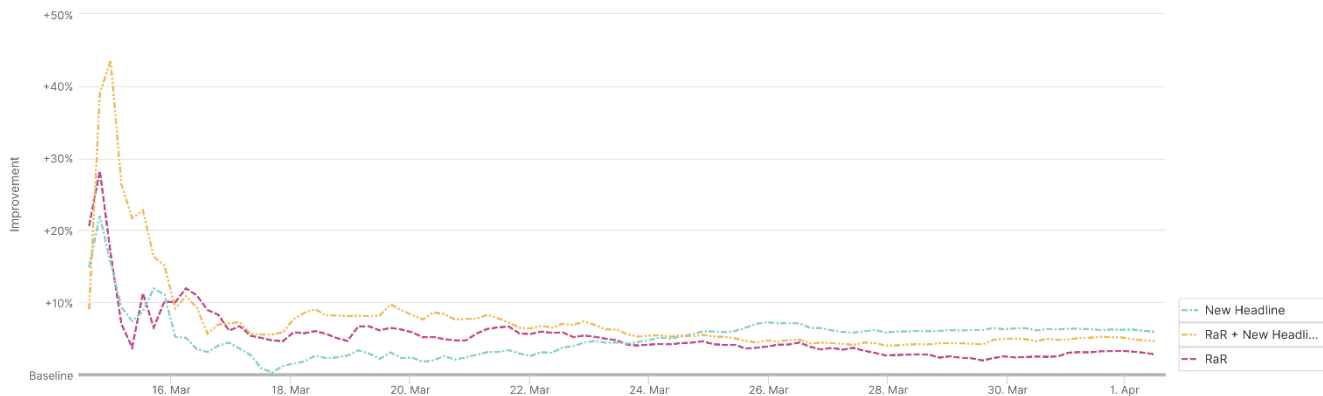
Total conversions per visitor for pages\_per\_user event

Edit

	Total Conversions Visitors	Conversions per Visitor	Improvement	Confidence Interval	Statistical Significance
Original	22,202 61,552	0.361	--	--	-- Baseline
RaR	22,668 61,145	0.371	+2.78%		28% >100,000 visitors remaining
New Headline	23,631 61,853	0.382	+5.92%		<1% 66,006 visitors remaining
RaR + New Headline	23,388 61,978	0.377	+4.62%		47% 67,821 visitors remaining

Hide Graph

Improvement Over Time



## B) pages\_per\_user

reached\_transported\_block

Unique conversions per visitor for reached\_transported\_block event

Edit

	Unique Conversions Visitors	Conversion Rate	Improvement	Confidence Interval	Statistical Significance
Original	6,690 61,552	10.87%	--	--	-- Baseline
RaR	6,539 61,145	10.69%	-1.61%		28% >100,000 visitors remaining
New Headline	6,770 61,853	10.95%	+0.7%		<1% >100,000 visitors remaining
RaR + New Headline	6,612 61,978	10.67%	-1.85%		36% >100,000 visitors remaining

## Г) reached\_transporter\_block

session\_length

Total value per visitor for session\_length event

Edit

	Total Value Visitors	Value per Visitor	Improvement	Confidence Interval	Statistical Significance
Original	13,770,570 61,552	223.723	--	--	-- Baseline
RaR	11,211,660 61,145	183.362	-18.04%		6% >100,000 visitors remaining
New Headline	13,742,490 61,853	222.180	-0.69%		<1% >100,000 visitors remaining
RaR + New Headline	10,883,220 61,978	175.598	-21.51%		31% 76,125 visitors remaining

## Д) session\_length

Рис. 3.21 – Графік значущості метрик

### ▼ element\_1\_clicked

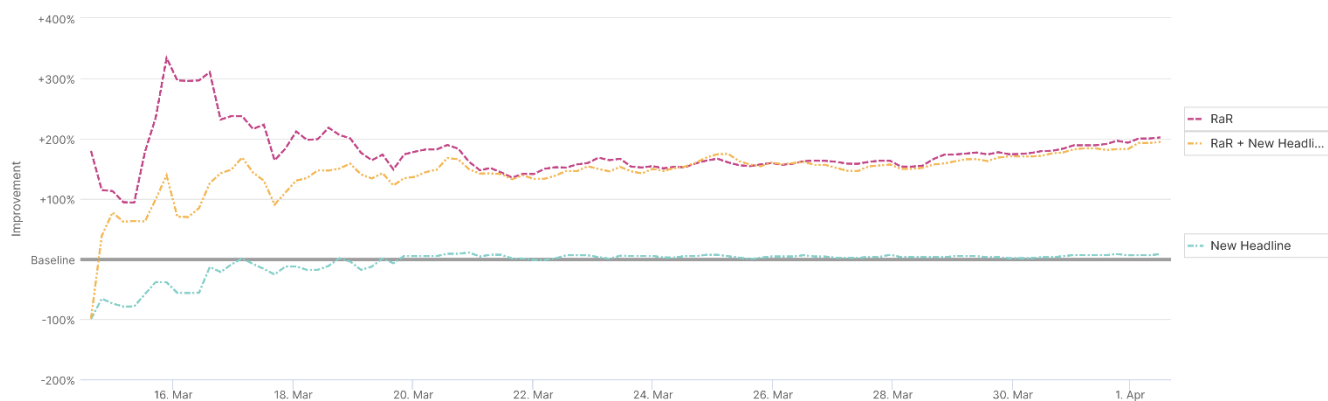
Unique conversions per visitor for element\_1\_clicked event

Edit

	Unique Conversions Visitors	Conversion Rate	Improvement	Confidence Interval	Statistical Significance
Original	59 61,552	0.10%	--	--	-- Baseline
RaR	177 61,145	0.29%	+202%		28% 8,379 visitors remaining
New Headline	64 61,853	0.10%	+7.95%		<1% >100,000 visitors remaining
RaR + New Headline	175 61,978	0.28%	+194.57%		33% 8,808 visitors remaining

Hide Graph ^

Improvement Over Time v



## 1) element\_1\_clicked

### ▼ element\_2\_clicked

Unique conversions per visitor for element\_2\_clicked event

Edit

	Unique Conversions Visitors	Conversion Rate	Improvement	Confidence Interval	Statistical Significance
Original	67 61,552	0.11%	--	--	-- Baseline
RaR	126 61,145	0.21%	+89.31%		18% 23,287 visitors remaining
New Headline	67 61,853	0.11%	-0.49%		<1% >100,000 visitors remaining
RaR + New Headline	134 61,978	0.22%	+98.63%		31% 19,973 visitors remaining

## 2) element\_2\_clicked

### ▼ element\_3\_clicked

Unique conversions per visitor for element\_3\_clicked event

Edit

	Unique Conversions Visitors	Conversion Rate	Improvement	Confidence Interval	Statistical Significance
Original	38 61,552	0.06%	--	--	-- Baseline
RaR	92 61,145	0.15%	+143.72%		6% 22,386 visitors remaining
New Headline	50 61,853	0.08%	+30.94%		<1% >100,000 visitors remaining
RaR + New Headline	91 61,978	0.15%	+137.83%		13% 23,728 visitors remaining

## 3) element\_3\_clicked

▼ element\_4\_clicked

Unique conversions per visitor for element\_4\_clicked event

[Edit](#)

	Unique Conversions Visitors <sup>?</sup>	Conversion Rate <sup>?</sup>	Improvement <sup>?</sup>	Confidence Interval <sup>?</sup>	Statistical Significance <sup>?</sup>
Original	48 61,552	0.08%	--	--	-- Baseline
RaR	75 61,145	0.12%	+57.29%		6% 69,572 visitors remaining
New Headline	53 61,853	0.09%	+9.88%		<1% >100,000 visitors remaining
RaR + New Headline	89 61,978	0.14%	+84.14%		14% 37,584 visitors remaining

#### 4) element\_4\_clicked

▼ element\_5\_clicked

Unique conversions per visitor for element\_5\_clicked event

[Edit](#)

	Unique Conversions Visitors <sup>?</sup>	Conversion Rate <sup>?</sup>	Improvement <sup>?</sup>	Confidence Interval <sup>?</sup>	Statistical Significance <sup>?</sup>
Original	16 61,552	0.03%	--	--	-- Baseline
RaR	48 61,145	0.08%	+202%		<1% >100,000 visitors remaining
New Headline	22 61,853	0.04%	+36.83%		<1% >100,000 visitors remaining
RaR + New Headline	56 61,978	0.09%	+247.59%		<1% >100,000 visitors remaining

#### 5) element\_5\_clicked

▼ element\_6\_clicked

Unique conversions per visitor for element\_6\_clicked event

[Edit](#)

	Unique Conversions Visitors <sup>?</sup>	Conversion Rate <sup>?</sup>	Improvement <sup>?</sup>	Confidence Interval <sup>?</sup>	Statistical Significance <sup>?</sup>
Original	20 61,552	0.03%	--	--	-- Baseline
RaR	47 61,145	0.08%	+136.56%		<1% >100,000 visitors remaining
New Headline	22 61,853	0.04%	+9.46%		<1% >100,000 visitors remaining
RaR + New Headline	28 61,978	0.05%	+39.04%		<1% >100,000 visitors remaining

#### 6) element\_6\_clicked

▼ element\_7\_clicked

Unique conversions per visitor for element\_7\_clicked event

[Edit](#)

	Unique Conversions Visitors <sup>?</sup>	Conversion Rate <sup>?</sup>	Improvement <sup>?</sup>	Confidence Interval <sup>?</sup>	Statistical Significance <sup>?</sup>
Original	17 61,552	0.03%	--	--	-- Baseline
RaR	28 61,145	0.05%	+65.8%		<1% >100,000 visitors remaining
New Headline	14 61,853	0.02%	-18.05%		<1% >100,000 visitors remaining
RaR + New Headline	41 61,978	0.07%	+139.52%		<1% >100,000 visitors remaining

#### 7) element\_7\_clicked

▼ element\_8\_clicked

Unique conversions per visitor for element\_8\_clicked event

[Edit](#)

	Unique Conversions Visitors	Conversion Rate	Improvement	Confidence Interval	Statistical Significance
Original	24 61,552	0.04%	--	--	-- Baseline
RaR	18 61,145	0.03%	-24.5%		<1% >100,000 visitors remaining
New Headline	26 61,853	0.04%	+7.81%		<1% >100,000 visitors remaining
RaR + New Headline	32 61,978	0.05%	+32.42%		<1% >100,000 visitors remaining

## 8) element\_8\_clicked

▼ element\_9\_clicked

Unique conversions per visitor for element\_9\_clicked event

[Edit](#)

	Unique Conversions Visitors	Conversion Rate	Improvement	Confidence Interval	Statistical Significance
Original	23 61,552	0.04%	--	--	-- Baseline
RaR	23 61,145	0.04%	+0.67%		<1% >100,000 visitors remaining
New Headline	19 61,853	0.03%	-17.79%		<1% >100,000 visitors remaining
RaR + New Headline	17 61,978	0.03%	-26.59%		<1% >100,000 visitors remaining

## 9) element\_9\_clicked

▼ element\_10\_clicked

Unique conversions per visitor for element\_10\_clicked event

[Edit](#)

	Unique Conversions Visitors	Conversion Rate	Improvement	Confidence Interval	Statistical Significance
Original	42 61,552	0.07%	--	--	-- Baseline
RaR	39 61,145	0.06%	-6.52%		<1% >100,000 visitors remaining
New Headline	23 61,853	0.04%	-45.5%		<1% >100,000 visitors remaining
RaR + New Headline	24 61,978	0.04%	-43.25%		<1% >100,000 visitors remaining

## 10) element\_10\_clicked

▼ element\_11\_clicked

Unique conversions per visitor for element\_11\_clicked event

[Edit](#)

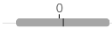


	Unique Conversions Visitors	Conversion Rate	Improvement	Confidence Interval	Statistical Significance
Original	19 61,552	0.03%	--	--	-- Baseline
RaR	18 61,145	0.03%	-4.63%		<1% >100,000 visitors remaining
New Headline	18 61,853	0.03%	-5.72%		<1% >100,000 visitors remaining
RaR + New Headline	16 61,978	0.03%	-16.37%		<1% >100,000 visitors remaining

## 11) element\_11\_clicked

▼ element\_12\_clicked

Unique conversions per visitor for element\_12\_clicked event

[Edit](#)

	Unique Conversions Visitors <sup>?</sup>	Conversion Rate <sup>?</sup>	Improvement <sup>?</sup>	Confidence Interval <sup>?</sup>	Statistical Significance <sup>?</sup>
Original	26 61,552	0.04%	--	--	-- Baseline
RaR	33 61,145	0.05%	+27.77%		<1% >100,000 visitors remaining
New Headline	26 61,853	0.04%	-0.49%		<1% >100,000 visitors remaining
RaR + New Headline	26 61,978	0.04%	-0.69%		<1% >100,000 visitors remaining

## 12) element\_12\_clicked

Рис. 3.22 – Графіки значущості результатів метрик element\_{1...12}\_clicked

## ВИСНОВОК

У даній роботі було проаналізовано концепцію А/В-тестування, яке є важливим інструментом у сучасній аналітиці та веб-розробці. Визначено, що А/В-тестування полягає в порівнянні альтернатив з метою визначення ефективнішої з них.

Також було розглянуто функціонал А/В-тестування з прикладами його використання для покращення конверсії продукту на вже існуючих проєктах. Разом з цим було розглянуто базові метрики, які можуть використовуватись для оцінки результатів тестування.

Великий акцент було зроблено на математичному аспекті А/В-тестування, включаючи формулювання гіпотез, поняття статистичної значущості та тести, для розрахунку р-значення. Також було розглянуто принцип роботи Optimizely з математичної точки зору.

Далі в роботі розглянуто практичний аспект застосування А/В-тестування на прикладі вебсайту. Цільовими метриками тестування стали CTR вебсайту та середня тривалість сесії. Для проведення тестування було використано платформу Optimizely та інтегровано її з вебсайтом за допомогою JavaScript. Було розроблено три варіації дизайну, не включаючи оригінал, для подальшого порівняння їх ефективності.

Після завершення тестування було проведено аналіз отриманих даних, що підтвердив гіпотезу про позитивний вплив гібридної колаборативної фільтрації на CTR вебсайту. Це дозволило зробити висновок про ефективність рекомендаційної системи та впровадити відповідні зміни на сайті з метою підвищення його продуктивності та конверсії.



## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. What is A/B testing? A practical guide with examples | VWO. *Website*. URL: <https://vwo.com/ab-testing/#what-can-you-a-b-test> (дата звернення: 03.04.2024).
2. CasalegNo F. A/B Testing—A complete guide to statistical testing. *Medium*. URL: <https://towardsdatascience.com/a-b-testing-a-complete-guide-to-statistical-testing-e3f1db140499> (дата звернення: 03.04.2024).
3. Kohavi R., Tang D., Xu Y. Trustworthy online controlled experiments: A practical guide to A/B testing. 2020. URL: <https://doi.org/10.1017/9781108653985>. (дата звернення: 03.04.2024).
4. Riserbato R. 11 A/B Testing Examples From Real Businesses. *HubSpot Blog / Marketing, Sales, Agency, and Customer Success Content*. URL: <https://blog.hubspot.com/marketing/a-b-testing-experiments-examples> (дата звернення: 04.04.2024).
5. Lindop D. How we boosted our sales page conversion rate by 25% with one stupid simple design improvement. *Thrive Themes*. URL: <https://thrivethemes.com/ab-testing-testimonials/> (дата звернення: 04.04.2024).
6. Turney S. Null and alternative hypotheses | definitions & examples. *Scribbr*. URL: <https://www.scribbr.com/statistics/null-and-alternative-hypotheses/> (дата звернення: 10.04.2024).
7. Bevans R. Choosing the right statistical test | types & examples. *Scribbr*. URL: <https://www.scribbr.com/statistics/statistical-tests/> (дата звернення: 10.04.2024).
8. Bevans R. An easy introduction to statistical significance (with examples). *Scribbr*. URL: <https://www.scribbr.com/statistics/statistical-significance/> (дата звернення: 10.04.2024).
9. Parmar G. Linear Regression: Definition, Formula Derivation and Examples - GeeksforGeeks. *GeeksforGeeks*. URL: <https://www.geeksforgeeks.org/linear-regression-formula/> (дата звернення: 10.04.2024).

10. Hayes A. Multiple Linear Regression (MLR) Definition, Formula, and Example. *Investopedia*. URL: <https://www.investopedia.com/terms/m/mlr.asp> (дата звернення: 10.04.2024).
11. Logistic Regression in Machine Learning - GeeksforGeeks. *GeeksforGeeks*. URL: <https://www.geeksforgeeks.org/understanding-logistic-regression/> (дата звернення: 10.04.2024).
12. Bevans R. An introduction to t tests | definitions, formula and examples. *Scribbr*. URL: <https://www.scribbr.com/statistics/t-test/> (date of access: 11.04.2024).
13. Turney S. Student's t table | guide & examples. *Scribbr*. URL: <https://www.scribbr.com/statistics/students-t-table/> (дата звернення: 11.04.2024).
14. Hassan M. ANOVA (analysis of variance) — formulas, types, and examples. *ResearchMethod.net*. URL: <https://researchmethod.net/ANOVA/> (дата звернення: 12.04.2024).
15. Hassan M. MANOVA (multivariate analysis of variance) - method & examples. *Research Method*. URL: <https://researchmethod.net/mANOVA/> (дата звернення: 13.04.2024).
16. Methods and formulas for MANOVA tests in General MANOVA - Minitab. *Support / Minitab*. URL: <https://support.minitab.com/en-us/minitab/help-and-how-to/statistical-modeling/ANOVA/how-to/general-mANOVA/methods-and-formulas/mANOVA-tests/#lawley-hotelling-test> (дата звернення: 13.04.2024).
17. D. L. Heck. Charts of some upper percentage points of the distribution of the largest characteristic root. *The annals of mathematical statistics*. 1960. Т. 31, № 3. С. 625—642. URL: <https://doi.org/10.1214/aoms/1177705790> (дата звернення: 13.04.2024).
18. Turney S. Pearson correlation coefficient (r) | guide & examples. *Scribbr*. URL: <https://www.scribbr.com/statistics/pearson-correlation-coefficient/> (дата звернення: 15.04.2024).
19. Bobbitt Z. Chi-Square test of independence: definition, formula, and example. *Statology*. URL: <https://www.statology.org/chi-square-test-of-independence/> (дата звернення: 15.04.2024).

20. Bobbitt Z. Kruskal-Wallis test: definition, formula, and example. *Statology*.  
URL: <https://www.statology.org/kruskal-wallis-test/> (дата звернення: 15.04.2024).
21. Bakker J. D. ANOSIM. *University of Washington Libraries — Pressbooks Publishing Platform*.  
URL: <https://uw.pressbooks.pub/appliedmultivariatestatistics/chapter/anosim/> (дата звернення: 15.04.2024).
22. Bobbitt Z. How to perform the wilcoxon signed rank test. *Statology*.  
URL: <https://www.statology.org/wilcoxon-signed-rank-test/> (дата звернення: 15.04.2024).

## ДОДАТОК А. Таблиця значень t для T-тесту

Degrees of freedom, або ж ступені вільності у цьому тесті будуть різницею розміру вибірки та 1, а significance level, або ж рівень значущості задається самостійно.

Critical values of t for two-tailed tests								
Significance level ( $\alpha$ )								
Degrees of freedom ( <i>df</i> )	.2	.15	.1	.05	.025	.01	.005	.001
1	3.078	4.165	6.314	12.706	25.452	63.657	127.321	636.619
2	1.886	2.282	2.920	4.303	6.205	9.925	14.089	31.599
3	1.638	1.924	2.353	3.182	4.177	5.841	7.453	12.924
4	1.533	1.778	2.132	2.776	3.495	4.604	5.598	8.610
5	1.476	1.699	2.015	2.571	3.163	4.032	4.773	6.869
6	1.440	1.650	1.943	2.447	2.969	3.707	4.317	5.959
7	1.415	1.617	1.895	2.365	2.841	3.499	4.029	5.408
8	1.397	1.592	1.860	2.306	2.752	3.355	3.833	5.041
9	1.383	1.574	1.833	2.262	2.685	3.250	3.690	4.781
10	1.372	1.559	1.812	2.228	2.634	3.169	3.581	4.587
11	1.363	1.548	1.796	2.201	2.593	3.106	3.497	4.437
12	1.356	1.538	1.782	2.179	2.560	3.055	3.428	4.318
13	1.350	1.530	1.771	2.160	2.533	3.012	3.372	4.221
14	1.345	1.523	1.761	2.145	2.510	2.977	3.326	4.140
15	1.341	1.517	1.753	2.131	2.490	2.947	3.286	4.073
16	1.337	1.512	1.746	2.120	2.473	2.921	3.252	4.015
17	1.333	1.508	1.740	2.110	2.458	2.898	3.222	3.965
18	1.330	1.504	1.734	2.101	2.445	2.878	3.197	3.922
19	1.328	1.500	1.729	2.093	2.433	2.861	3.174	3.883
20	1.325	1.497	1.725	2.086	2.423	2.845	3.153	3.850
21	1.323	1.494	1.721	2.080	2.414	2.831	3.135	3.819
22	1.321	1.492	1.717	2.074	2.405	2.819	3.119	3.792
23	1.319	1.489	1.714	2.069	2.398	2.807	3.104	3.768
24	1.318	1.487	1.711	2.064	2.391	2.797	3.091	3.745
25	1.316	1.485	1.708	2.060	2.385	2.787	3.078	3.725
26	1.315	1.483	1.706	2.056	2.379	2.779	3.067	3.707
27	1.314	1.482	1.703	2.052	2.373	2.771	3.057	3.690
28	1.313	1.480	1.701	2.048	2.368	2.763	3.047	3.674
29	1.311	1.479	1.699	2.045	2.364	2.756	3.038	3.659
30	1.310	1.477	1.697	2.042	2.360	2.750	3.030	3.646
40	1.303	1.468	1.684	2.021	2.329	2.704	2.971	3.551
50	1.299	1.462	1.676	2.009	2.311	2.678	2.937	3.496
60	1.296	1.458	1.671	2.000	2.299	2.660	2.915	3.460
70	1.294	1.456	1.667	1.994	2.291	2.648	2.899	3.435
80	1.292	1.453	1.664	1.990	2.284	2.639	2.887	3.416
100	1.290	1.451	1.660	1.984	2.276	2.626	2.871	3.390
1000	1.282	1.441	1.646	1.962	2.245	2.581	2.813	3.300
Infinite	1.282	1.440	1.645	1.960	2.241	2.576	2.807	3.291

Critical values of t for one-tailed tests								
Significance level ( $\alpha$ )								
Degrees of freedom ( <i>df</i> )	.2	.15	.1	.05	.025	.01	.005	.001
1	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309
2	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
40	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
50	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
60	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
70	0.847	1.044	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211
80	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195
100	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174
1000	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098
Infinite	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

Рис. А.1

## ДОДАТОК Б. Таблиця значень F-статистики для рівня значущості 0.05

У нашому випадку знаходиться критичне значення для ANOVA-тесту, тому DF1 буде дорівнювати різниці кількості вибірок та пояснювальних змінних (1 для ANOVA-тесту). DF2 у свою чергу буде різницею суми кількості даних у кожній вибірці та кількості вибірок.

F-table of Critical Values of $\alpha = 0.05$ for F(df1, df2)																			
	DF1=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
DF2=1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.91	245.95	248.01	249.05	250.10	251.14	252.20	253.25	254.31
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
$\infty$	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Рис. Б.1

## ДОДАТОК В. Інтерпретація кореляції Пірсона

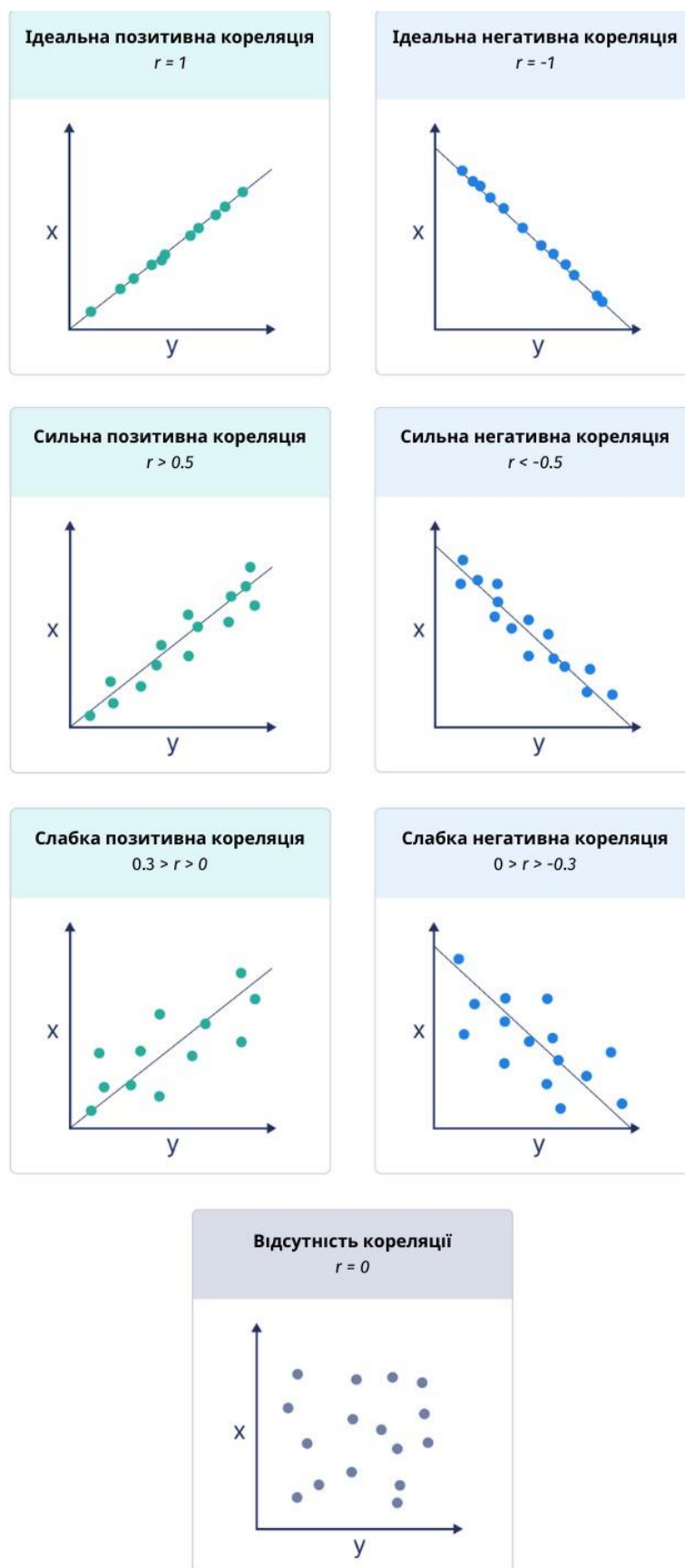


Рис. В.1



ДОДАТОК Г. Таблица значений  $\chi^2$ 

Degrees of Freedom	Chi-Square ( $\chi^2$ ) Distribution									
	Area to the Right of Critical Value									
	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	—	—	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.299
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.257	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

Рис. Г.1

## ДОДАТОК Д. Таблиця біноміального розподілу

У цій таблиці  $n$  – це кількість спроб, яка рахується у кінці, а  $x$  – це кількість успішних спроб, якими будуть вважатися позитивні або негативні числа, в залежності від того чия кількість найменша.

$n=8$

	p																		
x	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
0	0.663	0.430	0.272	0.168	0.100	0.058	0.032	0.017	0.008	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.943	0.813	0.657	0.503	0.367	0.255	0.169	0.106	0.063	0.035	0.018	0.009	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.994	0.962	0.895	0.797	0.679	0.552	0.428	0.315	0.220	0.145	0.088	0.050	0.025	0.011	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
3	1.000	0.995	0.979	0.944	0.886	0.806	0.706	0.594	0.477	0.363	0.260	0.174	0.106	0.058	0.027	0.010	0.003	0.000	0.000
4	1.000	1.000	0.997	0.990	0.973	0.942	0.894	0.826	0.740	0.637	0.523	0.406	0.294	0.194	0.114	0.056	0.021	0.005	0.000
5	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.989	0.975	0.950	0.912	0.855	0.780	0.685	0.572	0.448	0.321	0.203	0.105	0.038	0.006
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.991	0.982	0.965	0.937	0.894	0.831	0.745	0.633	0.497	0.343	0.187	0.057
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.996	0.992	0.983	0.968	0.942	0.900	0.832	0.728	0.570	0.337
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Рис. Д.1



## ДОДАТОК Е. Таблица критичних значень для U

n <sub>2</sub>	α	n <sub>1</sub>																		
		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
3	.05	--	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	
	.01	--	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	
4	.05	--	0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	14	
	.01	--	--	0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	7	8	
5	.05	0	1	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20	
	.01	--	--	0	1	1	2	3	4	5	6	7	7	8	9	10	11	12	13	
6	.05	1	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27	
	.01	--	0	1	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13	15	16	17	18	
7	.05	1	3	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	
	.01	--	0	1	3	4	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22	24	
8	.05	2	4	6	8	10	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41	
	.01	--	1	2	4	6	7	9	11	13	15	17	18	20	22	24	26	28	30	
9	.05	2	4	7	10	12	15	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48	
	.01	0	1	3	5	7	9	11	13	16	18	20	22	24	27	29	31	33	36	
10	.05	3	5	8	11	14	17	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55	
	.01	0	2	4	6	9	11	13	16	18	21	24	26	29	31	34	37	39	42	
11	.05	3	6	9	13	16	19	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62	
	.01	0	2	5	7	10	13	16	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	
12	.05	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69	
	.01	1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	31	34	37	41	44	47	51	54	
13	.05	4	8	12	16	20	24	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76	
	.01	1	3	7	10	13	17	20	24	27	31	34	38	42	45	49	53	56	60	
14	.05	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83	
	.01	1	4	7	11	15	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	63	67	
15	.05	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90	
	.01	2	5	8	12	16	20	24	29	33	37	42	46	51	55	60	64	69	73	
16	.05	6	11	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75	81	86	92	98	
	.01	2	5	9	13	18	22	27	31	36	41	45	50	55	60	65	70	74	79	
17	.05	6	11	17	22	28	34	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93	99	105	
	.01	2	6	10	15	19	24	29	34	39	44	49	54	60	65	70	75	81	86	
18	.05	7	12	18	24	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112	
	.01	2	6	11	16	21	26	31	37	42	47	53	58	64	70	75	81	87	92	
19	.05	7	13	19	25	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119	
	.01	3	7	12	17	22	28	33	39	45	51	56	63	69	74	81	87	93	99	
20	.05	8	14	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127	
	.01	3	8	13	18	24	30	36	42	48	54	60	67	73	79	86	92	99	105	

Рис. Е.1 – Значення для двостороннього U-тесту

n <sub>2</sub>	α	n <sub>1</sub>																		
		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
3	.05	0	0	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11	
	.01	--	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4	5	
4	.05	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18	
	.01	--	--	0	1	1	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	
5	.05	1	2	4	5	6	8	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22	23	25	
	.01	--	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
6	.05	2	3	5	7	8	10	12	14	16	17	19	21	23	25	26	28	30	32	
	.01	--	1	2	3	4	6	7	8	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22	
7	.05	2	4	6	8	11	13	15	17	19	21	24	26	28	30	33	35	37	39	
	.01	0	1	3	4	6	7	9	11	12	14	16	17	19	21	23	24	26	28	
8	.05	3	5	8	10	13	15	18	20	23	26	28	31	33	36	39	41	44	47	
	.01	0	2	4	6	7	9	11	13	15	17	20	22	24	26	28	30	32	34	
9	.05	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	
	.01	1	3	5	7	9	11	14	16	18	21	23	26	28	31	33	36	38	40	
10	.05	4	7	11	14	17	20	24	27	31	34	37	41	44	48	51	55	58	62	
	.01	1	3	6	8	11	13	16	19	22	24	27	30	33	36	38	41	44	47	
11	.05	5	8	12	16	19	23	27	31	34	38	42	46	50	54	57	61	65	69	
	.01	1	4	7	9	12	15	18	22	25	28	31	34	37	41	44	47	50	53	
12	.05	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42	47	51	55	60	64	68	72	77	
	.01	2	5	8	11	14	17	21	24	28	31	35	38	42	46	49	53	56	60	
13	.05	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56	61	65	70	75	80	84	
	.01	2	5	9	12	16	20	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	
14	.05	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66	71	77	82	87	92	
	.01	2	6	10	13	17	22	26	30	34	38	43	47	51	56	60	65	69	73	
15	.05	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72	77	83	88	94	100	
	.01	3	7	11	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56	61	66	70	75	80	
16	.05	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83	89	95	101	107	
	.01	3	7	12	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66	71	76	82	87	
17	.05	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96	102	109	115	
	.01	4	8	13	18	23	28	33	38	44	49	55	60	66	71	77	82	88	93	
18	.05	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109	116	123	
	.01	4	9	14	19	24	30	36	41	47	53	59	65	70	76	82	88	94	100	
19	.05	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	130	
	.01	4	9	15	20	26	32	38	44	50	56	63	69	75	82	88	94	101	107	
20	.05	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138	
	.01	5	10	16	22	28	34	40	47	53	60	67	73	80	87	93	100	107	114	

Рис. Е.2 -- Значення для одностороннього U-тесту

## ДОДАТОК Ж. Таблица критичних значень для W

n	Alpha value				
	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10
5	-	-	-	-	0
6	-	-	-	0	2
7	-	-	0	2	3
8	-	0	2	3	5
9	0	1	3	5	8
10	1	3	5	8	10
11	3	5	8	10	13
12	5	7	10	13	17
13	7	9	13	17	21
14	9	12	17	21	25
15	12	15	20	25	30
16	15	19	25	29	35
17	19	23	29	34	41
18	23	27	34	40	47
19	27	32	39	46	53
20	32	37	45	52	60
21	37	42	51	58	67
22	42	48	57	65	75
23	48	54	64	73	83
24	54	61	72	81	91
25	60	68	79	89	100
26	67	75	87	98	110
27	74	83	96	107	119
28	82	91	105	116	130
29	90	100	114	126	140
30	98	109	124	137	151

Рис. Ж.1