



УКРАЇНА

(19) UA (11) 49838 (13) U
(51) МПК (2009)
G01M 7/00

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ДЕПАРТАМЕНТ
ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ
ВЛАСНОСТІ

ОПИС ДО ПАТЕНТУ НА КОРИСНУ МОДЕЛЬ

видається під
відповідальність
власника
патенту

(54) СПОСІБ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ НЕЛІНІЙНОЇ МЕХАНІЧНОЇ КОЛИВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

1

2

(21) u200912590

(22) 04.12.2009

(24) 11.05.2010

(46) 11.05.2010, Бюл.№ 9, 2010 р.

(72) ПУЗЬКО ІГОР ДАНИЛОВИЧ

(73) СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

(57) Спосіб визначення параметрів нелінійної механічної коливальної системи, за яким збуджують вільні коливання досліджуваної коливальної системи, фіксують і запам'ятовують часові моменти t_1 і t_2 , t_3 і t_4 проходження положення рівноваги по переміщенню, вимірюють і запам'ятовують перший і другий часові інтервали $\Delta t_1, \Delta t_2$ відповідно між першим і другим, третім і четвертим часовими моментами t_1 і t_2 , t_3 і t_4 положення рівноваги, а також амплітудні значення X_{a1}, X_{a2} в першому і другому часових інтервалах $\Delta t_1, \Delta t_2$ відповідно, який **відрізняється** тим, що додатково "N-1" разів фіксують і запам'ятовують часові моменти t_{1i} і t_{2i} , t_{3i} і t_{4i} проходження положення рівноваги, вимірюють і запам'ятовують "N-1" разів величини пер-

шого і другого часових інтервалів $\Delta t_1, \Delta t_2$ ($i=1,2,\dots,N$), а також "N-1" амплітудних значень X_{a1i}, X_{a2i} в кожному першому і кожному другому часовому інтервалі $\Delta t_1, \Delta t_2$ відповідно, а оцінки значень частоти ω_0 вільних коливань (резонансної частоти) лінійної породжувальної системи і параметр α^2 , що характеризує ступінь нелінійності, визначають із аналітичних співвідношень

$$\omega_0^2 = \pi \frac{\sum X_{a1i}^2 \langle \epsilon_{1it} \rangle^1 \sum \langle \epsilon_{2it} \rangle^2 - \sum X_{a2i}^2 \langle \epsilon_{2it} \rangle^1 \sum \langle \epsilon_{1it} \rangle^2}{\sum X_{a1i}^2 \langle \epsilon_{1it} \rangle^1 \sum \langle \epsilon_{2it} \rangle^1 - \sum X_{a2i}^2 \langle \epsilon_{2it} \rangle^1 \sum \langle \epsilon_{1it} \rangle^1};$$
$$\alpha^2 = \frac{8}{3} \pi^2 \frac{-\sum \langle \epsilon_{1it} \rangle^2 \sum \langle \epsilon_{2it} \rangle^1 + \sum \langle \epsilon_{1it} \rangle^1 \sum \langle \epsilon_{2it} \rangle^2}{\left[\sum X_{a1i}^2 \langle \epsilon_{1it} \rangle^1 \sum \langle \epsilon_{2it} \rangle^1 - \sum X_{a2i}^2 \langle \epsilon_{2it} \rangle^1 \sum \langle \epsilon_{1it} \rangle^1 \right]^2} \times$$
$$\times \left[\sum X_{a1i}^2 \langle \epsilon_{1it} \rangle^1 \sum \langle \epsilon_{2it} \rangle^2 - \sum X_{a2i}^2 \langle \epsilon_{2it} \rangle^1 \sum \langle \epsilon_{1it} \rangle^2 \right], \quad (\epsilon = 1, N),$$

де: N - число вимірювань першого і другого часових інтервалів $\Delta t_1, \Delta t_2$ та амплітудних значень X_{a1i}, X_{a2i} в кожному першому і кожному другому часовому інтервалі.

Корисна модель відноситься до області випробуваної техніки і може знайти застосування при проведенні вібраційних випробувань об'єктів (конструкцій) на вібростійкість, вібронадійність, віброміцність.

Відомий спосіб визначення розсіяння енергії і власної частоти механічної коливальної системи, за яким збуджують вільні затухаючі коливання досліджуваної системи, фіксують моменти проходження положення рівноваги (нульового значення переміщення) і момент порівняння нульовому значенню швидкості переміщення [А. с. СССР №1583778, МПК G01M7/00, 1988].

Недолік відомого способу - обмежена область застосування за рахунок відсутності відповідного алгоритму і можливості визначення параметрів нелінійної механічної коливальної системи.

За прототип обраний спосіб визначення пара-

метрів механічної коливальної системи [А. с. СССР №2025685, МПК G01M7/00, 1994], за яким збуджують вільні затухаючі коливання досліджуваної коливальної системи, фіксують момент проходження коливального процесу положення рівноваги і момент порівняння нульовому значенню швидкості переміщення, вимірюють перший часовий інтервал Δt_1 між першим часовим моментом t_1 проходження положення рівноваги і часовим моментом t_2 порівняння нульовому значенню швидкості переміщення і другий часовий інтервал Δt_2 між першим і другим моментами часу t_1 і t_3 проходження положення рівноваги (нульовими значеннями переміщення), а параметр h розсіяння енергії і власну частоту ω_0 коливань породжувальної лінійної механічної коливальної системи визначають з умов

UA (13)

UA (11) 49838

UA (19)

$$h = \frac{\pi}{\Delta_2 t} \operatorname{ctg} \left(\pi \frac{\Delta_1 t}{\Delta_2 t} \right); \omega_0 = \frac{\pi}{\Delta_2 t} \left[\operatorname{sin} \left(\pi \frac{\Delta_1 t}{\Delta_2 t} \right) \right]^{-1}.$$

Вимірюють третій часовий інтервал $\Delta_3 t$ між часовими моментами t_4, t_5 проходження положення рівноваги (нульовими значеннями переміщення), а також амплітудні значення X_{a1}, X_{a2} в другому і третьому часових інтервалах $\Delta_2 t, \Delta_3 t$ відповідно, а параметр α_2 нелінійності і власну частоту ω_{0H} коливань нелінійної механічної коливальної системи визначають на підставі наведених аналітичних співвідношень

$$\alpha^2 = \frac{8}{3} \frac{\pi^2}{(\Delta_2 t \Delta_3 t)^2} \frac{(\Delta_3 t - \Delta_2 t) (X_{\alpha 1}^2 \Delta_2 t - X_{\alpha 2}^2 \Delta_3 t)}{(X_{\alpha 1}^2 - X_{\alpha 2}^2)^2};$$

$$\omega_{0H} = \frac{\pi}{\Delta_2 t \Delta_3 t} \frac{(X_{\alpha 1}^2 \Delta_2 t - X_{\alpha 2}^2 \Delta_3 t)}{(X_{\alpha 1}^2 - X_{\alpha 2}^2)^2}.$$

Недолік відомого способу - недостатня точність, яка обумовлена неврахуванням випадкових похибок при проведенні вимірювань часових інтервалів і амплітудних значень коливань, а також недостатнім по множині інформаційним масивом даних при проведенні вимірювань для формування регресійної залежності і застосування методу найменших квадратів.

В основу корисної моделі поставлене завдання удосконалення способу визначення параметрів нелінійної механічної коливальної системи, що дає

$$\hat{\omega}_0 = \pi \frac{\sum X_{\alpha 1i}^2 \sum \langle 1_{1t} \rangle^1 \sum \langle 2_{2t} \rangle^2 - \sum X_{\alpha 2i}^2 \sum \langle 2_{2t} \rangle^1 \sum \langle 1_{1t} \rangle^2}{\sum X_{\alpha 1i}^2 \sum \langle 1_{1t} \rangle^1 \sum \langle 2_{2t} \rangle^1 - \sum X_{\alpha 2i}^2 \sum \langle 2_{2t} \rangle^1 \sum \langle 1_{1t} \rangle^1};$$

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{8}{3} \pi^2 \frac{-\sum \langle 1_{1t} \rangle^2 \sum \langle 2_{2t} \rangle^1 + \sum \langle 1_{1t} \rangle^1 \sum \langle 2_{2t} \rangle^2}{\left[\sum X_{\alpha 1i}^2 \sum \langle 1_{1t} \rangle^1 \sum \langle 2_{2t} \rangle^1 - \sum X_{\alpha 2i}^2 \sum \langle 2_{2t} \rangle^1 \sum \langle 1_{1t} \rangle^1 \right]^2} \times$$

$$\times \left[\sum X_{\alpha 1i}^2 \sum \langle 1_{1t} \rangle^1 \sum \langle 2_{2t} \rangle^2 - \sum X_{\alpha 2i}^2 \sum \langle 2_{2t} \rangle^1 \sum \langle 1_{1t} \rangle^2 \right], (\overline{1, N})$$

де: N - число вимірювань першого і другого часових інтервалів $\Delta_{1i} t, \Delta_{2i} t$ та амплітудних значень X_{a1i}, X_{a2i} в кожному першому і кожному другому часовому інтервалі.

Застосування запропонованого способу визначення параметрів нелінійної механічної коливальної системи разом з усіма суттєвими ознаками, включаючи відмінні, забезпечує можливість підвищення точності за рахунок введення нових технологічних операцій, що дає можливість сформулювати інформаційні масиви множини першого і другого часових інтервалів і масивів амплітудних значень в інформаційних масивах першого і другого часових інтервалів, що дає можливість урахування випадкових помилок при вимірюваннях шляхом формування регресійних залежностей і застосування методу найменших квадратів.

Розробка нового алгоритму для визначення

можливості врахування випадкових похибок при проведенні вимірювань значень часових інтервалів і амплітудних значень коливального процесу, а також можливість формування достатніх по множині інформаційних масивів значень часових інтервалів і амплітудних значень коливань для формування регресійних залежностей і застосування метода найменших квадратів.

Поставлене завдання вирішується тим, що у відомому способі визначення параметрів механічної коливальної системи, за яким збуджують вільні коливання досліджуваної коливальної системи, фіксують і запам'ятовують часові моменти t_1 і t_2, t_3 і t_4 проходження положення рівноваги по переміщенню, вимірюють і запам'ятовують перший і другий часові інтервали $\Delta_1 t, \Delta_2 t$ відповідно між першим і другим, третім і четвертим часовими моментами t_1 і t_2, t_3 і t_4 проходження положення рівноваги, а також амплітудні значення X_{a1}, X_{a2} в першому і другому часових інтервалах $\Delta_1 t, \Delta_2 t$ відповідно, згідно з яким, додатково "N-1" разів фіксують і запам'ятовують часові моменти t_{1i} і t_{2i}, t_{3i} і t_{4i} проходження положення рівноваги, вимірюють і запам'ятовують "N-1" рази величини першого і другого часових інтервалів $\Delta_{1i} t, \Delta_{2i} t$ ($i=1,2,\dots,N$), а також "N-1" амплітудних значень X_{a1i}, X_{a2i} в кожному першому і кожному другому часовому інтервалі $\Delta_{1i} t, \Delta_{2i} t$ відповідно, а оцінки значень частоти ω_0 вільних коливань (резонансної частоти) лінійної породжувальної системи і параметр α^2 , що характеризує ступінь не лінійності, визначають із аналітичних співвідношень:

параметрів механічної коливальної системи базується на наступному теоретичному дослідженні.

При наявності жорсткої характеристики відношувальної сили диференціальне рівняння вільних коливань нелінійної консервативної механічної коливальної системи з одним ступенем вільності [Быховский И.И. Основы теории вибрационной техники. М.: Машиностроение, 1969. - С.140-141] має вигляд

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha^2 x^3 = 0, \quad (1)$$

$$\text{де: } \ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \omega_0^2 = \frac{C}{m}, \alpha^2 = \frac{C_1}{m}, C > 0, C_1 > 0.$$

Аналітичне співвідношення, що відповідає рівнянню для скелетної кривої (залежності частоти ω_0 вільних коливань лінійної породжувальної коливальної системи від амплітуди X_a), при урахуванні

тільки двох перших членів розкладу нелінійного доданка $\alpha^2 X^3$ рівняння (1) [Быховский И. И. Основы теории вибрационной техники. М.: Машиностроение, 1969. - С.150-152] має вигляд

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{3}{8} \frac{\alpha^2}{\omega_0^2} X_\alpha^2 \right), \quad (2)$$

Аналітичне співвідношення (2) - математична модель скелетної кривої нелінійної коливальної системи включає інформацію про параметри коливальної системи ω_0 , α або ω_0, C_1 .

Проведемо нескладні перетворення (2). Введемо такі позначення:

$$\omega_0^{-1} = \beta, \frac{3}{8} C_1 C^{-1} = \gamma, \quad (3)$$

Тепер співвідношення (2) набуває вигляду:

$$\beta \omega - \gamma X_\alpha^2 - 1 = 0, \quad (4)$$

де: β, γ - невідомі параметри, які необхідно визначити при наявності можливості вимірювання

множини амплітудних значень X_a і відповідних значень множини частот ω .

При урахуванні наявності випадкових похибок при проведенні вимірювань значень множини частот і відповідних цим частотам множини амплітудних значень коливального процесу співвідношення (4) для двох значень амплітуд X_{a1}, X_{a2} набуває вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta} \omega_{1i} - \hat{\gamma} X_{\alpha 1i}^2 - 1 &= \varepsilon_{1i}; \\ \hat{\beta} \omega_{2i} - \hat{\gamma} X_{\alpha 2i}^2 - 1 &= \varepsilon_{2i}; \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

де: $\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}$ - випадкові величини, які характеризують регресійні залежності (5);

$\hat{\beta}, \hat{\gamma}$ - оцінки параметрів β, γ відповідно.

На підставі (5) мінімізуючи функціонали мають вигляд:

$$S_1 = \sum_{i=1}^N \left(\hat{\beta} \omega_{1i} - \hat{\gamma} X_{\alpha 1i}^2 - 1 \right)^2, \quad S_2 = \sum_{i=1}^N \left(\hat{\beta} \omega_{2i} - \hat{\gamma} X_{\alpha 2i}^2 - 1 \right)^2 \quad (6)$$

де: N - число вимірювань параметрів $\omega_{1i}, X_{a1i}, \omega_{2i}, X_{a2i}$.

Для визначення оцінок $\hat{\beta}, \hat{\gamma}$ параметрів β, γ необхідно сформулювати частинні похідні

$\frac{\partial S_1}{\partial \hat{\beta}}, \frac{\partial S_1}{\partial \hat{\gamma}}, \frac{\partial S_2}{\partial \hat{\beta}}, \frac{\partial S_2}{\partial \hat{\gamma}}$ і отримати системи рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta} \sum_{i=1}^N \omega_{1i}^2 - \hat{\gamma} \sum_{i=1}^N \omega_{1i} X_{\alpha 1i}^2 &= \sum_{i=1}^N \omega_{1i}; \\ \hat{\beta} \sum_{i=1}^N \omega_{1i} X_{\alpha 1i}^2 - \hat{\gamma} \sum_{i=1}^N X_{\alpha 1i}^4 &= \sum_{i=1}^N X_{\alpha 1i}^2; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta} \sum_{i=1}^N \omega_{2i}^2 - \hat{\gamma} \sum_{i=1}^N \omega_{2i} X_{\alpha 2i}^2 &= \sum_{i=1}^N \omega_{2i}; \\ \hat{\beta} \sum_{i=1}^N \omega_{2i} X_{\alpha 2i}^2 - \hat{\gamma} \sum_{i=1}^N X_{\alpha 2i}^4 &= \sum_{i=1}^N X_{\alpha 2i}^2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Застосовуємо перші рівняння систем (7), (8) і отримуємо аналітичні співвідношення для визна-

чення оцінок $\hat{\beta}, \hat{\gamma}$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta} \sum_{i=1}^N \omega_{1i}^2 - \hat{\gamma} \sum_{i=1}^N \omega_{1i} X_{\alpha 1i}^2 &= \sum_{i=1}^N \omega_{1i}; \\ \hat{\beta} \sum_{i=1}^N \omega_{2i}^2 - \hat{\gamma} \sum_{i=1}^N \omega_{2i} X_{\alpha 2i}^2 &= \sum_{i=1}^N \omega_{2i}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Із (9) маємо:

$$\hat{\beta} = \frac{\Delta \beta}{\Delta} = \frac{\left(-\sum \omega_{2i} X_{\alpha 2i}^2 \sum \omega_{1i} + \sum \omega_{1i} X_{\alpha 1i}^2 \sum \omega_{2i} \right)}{\left(-\sum \omega_{2i} X_{\alpha 2i}^2 \sum \omega_{1i}^2 + \sum \omega_{1i} X_{\alpha 1i}^2 \sum \omega_{2i}^2 \right)} \quad (10)$$

$$\hat{\gamma} = \frac{\Delta \gamma}{\Delta} = \frac{\left(-\sum \omega_{2i} \sum \omega_{1i}^2 + \sum \omega_{1i} \sum \omega_{2i}^2 \right)}{\left(-\sum \omega_{2i} X_{\alpha 2i}^2 \sum \omega_{1i}^2 + \sum \omega_{1i} X_{\alpha 1i}^2 \sum \omega_{2i}^2 \right)} \quad (11)$$

Визначимо оцінки $\hat{\omega}_0, \hat{\alpha}^2$ параметрів ω_0, α^2

$$\hat{\omega}_0 = \frac{1}{\hat{\beta}} = \frac{\left(-\sum \omega_{2i} X_{\alpha 2i}^2 \sum \omega_{1i}^2 + \sum \omega_{1i} X_{\alpha 1i}^2 \sum \omega_{2i}^2 \right)}{\left(-\sum \omega_{2i} X_{\alpha 2i}^2 \sum \omega_{1i} + \sum \omega_{1i} X_{\alpha 1i}^2 \sum \omega_{2i} \right)} \quad (12)$$

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{8}{3} \hat{\gamma} \hat{\omega}_0^2 = \frac{8 \left(\sum \omega_{1i}^2 \sum \omega_{2i} - \sum \omega_{1i} \sum \omega_{2i}^2 \right)}{3 \left(-\sum \omega_{2i} X_{\alpha 2i}^2 \sum \omega_{1i} + \sum \omega_{1i} X_{\alpha 1i}^2 \sum \omega_{2i} \right)^2} \times \left(-\sum \omega_{2i} X_{\alpha 2i}^2 \sum \omega_{1i}^2 + \sum \omega_{1i} X_{\alpha 1i}^2 \sum \omega_{2i}^2 \right) \quad (13)$$

При застосуванні відомих співвідношень

$$\omega_{1i} = \frac{\pi}{\Delta_{1i} t}, \omega_{2i} = \frac{\pi}{\Delta_{2i} t}, \quad (i = \overline{1, N})$$

співвідношення (12), (13) приймають вигляд

$$\hat{\omega}_0 = \pi \frac{\sum X_{\alpha 1i}^2 \sum_{i=1}^N \omega_{1i}^2 - \sum X_{\alpha 2i}^2 \sum_{i=1}^N \omega_{2i}^2}{\sum X_{\alpha 1i}^2 \sum_{i=1}^N \omega_{1i} - \sum X_{\alpha 2i}^2 \sum_{i=1}^N \omega_{2i}} \quad (14)$$

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{8}{3} \pi^2 \frac{-\sum \omega_{1i}^2 \sum \omega_{2i} + \sum \omega_{1i} \sum \omega_{2i}^2}{\left[\sum X_{\alpha 1i}^2 \sum_{i=1}^N \omega_{1i} - \sum X_{\alpha 2i}^2 \sum_{i=1}^N \omega_{2i} \right]^2} \times \left[\sum X_{\alpha 1i}^2 \sum_{i=1}^N \omega_{1i}^2 - \sum X_{\alpha 2i}^2 \sum_{i=1}^N \omega_{2i}^2 \right], \quad (i = \overline{1, N}) \quad (15)$$

На підставі аналітичних співвідношень (10), (11), (12), (13), (14), (15) отримаємо новий алгоритм для визначення оцінок $\hat{\omega}_0, \hat{\alpha}^2$ параметрів ω_0, α^2 нелінійної коливальної системи.

Алгоритм реалізують на підставі виконання наступних операцій.

1) Реалізують "2N" режимів вільних коливань досліджуваної нелінійної коливальної системи.

2) Фіксують і запам'ятовують в перших N режимах вільних коливань досліджуваної нелінійної коливальної системи перший часовий інтервал $\Delta_{1i} t$ ($i = \overline{1, N}$) між часовими сусідніми моментами проходження положення рівноваги і амплітудне значення X_{a1i} , переміщення в кожному i-му режимі ($i = \overline{1, N}$).

3) Фіксують і запам'ятовують в других N режимах вільних коливань досліджуваної нелінійної коливальної системи другий часовий інтервал $\Delta_{2i} t$ між часовими сусідніми моментами проходження положення рівноваги і амплітудне значення X_{a2i}

переміщення в кожному i-му режимі ($i = \overline{1, N}$).

Новим в алгоритмі реалізації способу визначення параметрів нелінійної механічної коливальної системи є проведення операцій вимірювання, фіксації і запам'ятовування "N-1" значень перших часових інтервалів $\Delta_{1i} t$, і "N-1" амплітудних значень X_{a1i} коливань відповідно часовим інтервалам, а також "N-1" значень других часових інтервалів $\Delta_{2i} t$ і "N-1" амплітудних значень X_{a2i} коливань в цих інтервалах.

Спосіб визначення параметрів нелінійної механічної коливальної системи реалізують наступним чином:

1) Установлюють досліджувану конструкцію на рухому платформу вібростенда електродинамічного типу.

2) Послідовно реалізують "2N" режимів вільних коливань досліджуваної конструкції. В кожному із "N" перших режимів вимірюють, фіксують і запам'ятовують перший часовий інтервал. Перший часовий інтервал має місце між першим і другим сусідніми часовими моментами проходження по-

ложення рівноваги по переміщенню при значенні амплітуди X_{a1i} коливань. Другий часовий інтервал має місце між третім і четвертим сусідніми часовими моментами проходження положення рівноваги по переміщенню при значенні амплітуди X_{a2i} коливань ($X_{a2i} \neq X_{a1i}$) в кожному із "N" других режимів.

3) За допомогою вимірювально-обчислювального комплексу проводять обробку інформаційних

масивів зафіксованих сигналів, які відповідають масиву першого і другого часових інтервалів і масиву амплітудних значень коливань в масивах першого і другого часових інтервалів відповідно досліджуваної конструкції і на підставі отриманих після формування регресійних залежностей аналітичних співвідношень визначають оцінки значень параметрів нелінійної коливальної системи.